ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICAL AND PHYSICAL SCIENCES

# Γραμμική Άλγεβρα
# 7. Επίλυση Ομογενούς Γραμμικού Συστήματος $A \cdot \vec{x} = \vec{0},\ A \in M_{\mu \times \nu}$
# Παραδείγματα

Κάλλια Παυλοπούλου

2023-2024

Στη συνέχεια,

θα χρησιμοποιήσουμε τη $\boxed{\text{θεωρία των πινάκων}}$ για να αναπτύξουμε συστηματικές μεθόδους για την επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων (οι άγνωστοι υψωμένοι στην 1η δύναμη).

Πιο συγκεκριμένα, θα αρχίσουμε περιγράφοντας μία μέθοδο η οποία βασίζεται στη $\boxed{\text{θεωρία των γραμμοπράξεων.}}$

**<u>Παράδειγμα 1 :</u>** Θα ξεκινήσουμε μελετώντας ένα παράδειγμα ενός γραμμικού συστήματος με 2 εξισώσεις και 2 αγνώστους όπου οι σταθεροί όροι είναι μηδενικοί.

**γραμμικό σύστημα $2 \times 2$ ομογενές**

2 άγνωστοι

$1^{ος}$ άγνωστος x

$2^{ος}$ άγνωστος y

2 εξισώσεις

$1^{η}$ εξίσωση

$2^{η}$ εξίσωση

$$\left\{\begin{aligned} -3x + 3y &= \boxed{0} \\ 5x + 2y &= \boxed{0} \end{aligned}\right\}$$

**Σταθεροί όροι μηδενικοί**

**Όταν οι σταθεροί όροι ενός γραμμικού συστήματος είναι μηδενικοί, τότε το σύστημα ονομάζεται <u>ομογενές</u>**

# Παράδειγμα 1: ομογενές σύστημα $2 \times 2$

$$\begin{cases} -3x + 3y = 0 \\ 5x + 2y = 0 \end{cases}$$

Ας το γράψουμε σε μορφή πινάκων

$$\begin{bmatrix} -3x + 3y \\ 5x + 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\vec{0}$:Πίνακας-στήλη $(2 \times 1)$ σταθερών όρων του συστήματος

$A$ : Πίνακας $(2 \times 2)$ συντελεστών του συστήματος

$\vec{x}$: Πίνακας-στήλη $(2 \times 1)$ οι άγνωστοι του συστήματος

**Άρα το σύστημα παίρνει τη μορφή $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$, $A \in M_{2\times2}$**

**Το γραμμικό μας σύστημα «αντιπροσωπεύεται», καθορίζεται πλήρως, από τον επόμενο πίνακα (επαυξημένος) διότι διαθέτει όλες τις πληροφορίες : τους συντελεστές των αγνώστων και τους σταθερούς όρους!**

$$\begin{array}{ccc} \text{Συντελεστές του } x & \text{Συντελεστές του } y & \text{Στήλη των σταθερών όρων} \end{array}$$

$$\boldsymbol{E} = \left[\begin{array}{cc|c} -3 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$\boldsymbol{E}$ **: Επαυξημένος πίνακας του συστήματος, παραθέτοντας δίπλα στον <u>πίνακα των συντελεστών</u> τη στήλη των <u>σταθερών όρων</u>**

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{E} = \left[\begin{array}{cc|c} -3 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

Κάθε γραμμικό σύστημα εξισώσεων ανάγεται σε ένα ισοδύναμο γραμμικό σύστημα του οποίου ο επαυξημένος πίνακας είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον αρχικό αλλά σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.

**Πολύ σημαντική πρακτική αξία!**

# Αναγωγή του επαυξημένου σε ανηγμένο κλιμακωτό

$$E = [\underbrace{\begin{matrix} -3 & 3 \\ 5 & 2 \end{matrix}}_{A} \;\vdots\; \underbrace{\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}}_{0}] \xrightarrow{\gamma_1 \to \frac{1}{-3}\cdot\gamma_1} \left[\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma_2 \to \gamma_2 - 5\gamma_1}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma_2 \to \frac{1}{7}\gamma_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma_1 \to \gamma_1 + \gamma_2} [\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{A_R} \;\vdots\; \underbrace{\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}}_{\vec{0}}] = E_R$$

Ο πίνακας $E$ είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον $E_R$ και ο $A$ με τον $A_R$

Ας δούμε το σύστημα που αντιστοιχεί στον γραμμοϊσοδύναμο $\boldsymbol{E_R} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{A_R} \quad \underbrace{\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}}_{\mathbf{0}}$$

Λύνω ως προς $x, y$ (pivots).

$$\mathrm{A}_R \cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 1x + 0y = 0 \\ 0x + 1y = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

**Το οποίο είναι ισοδύναμο με το αρχικό $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$**

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**Λύση του συστήματος**

**Σε μορφή πίνακα**

Το σύστημα $\boldsymbol{A} \cdot \vec{x} = \vec{0}$ έχει μία και μοναδική λύση την $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

## Ας παρατηρήσουμε τον πίνακα $E_R$ :

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} x & y & \end{array} \\ E_R = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Παρατηρούμε πως ο βαθμός του πίνακα $A$ είναι ίδιος με τον βαθμό του επαυξημένου $E$ του συστήματος.

$rank(A) = rank(E)$ = αριθμός των pivots = πλήθος των μη μηδενικών γραμμών (σε κλιμακωτή μορφή)=2

**<u>2 βασικοί άγνωστοι:</u>**
**αντιστοιχούν στα pivots ($x$, $y$).**

# Παράδειγμα 2: ομογενές σύστημα $3 \times 4$

$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 10x_4 = 0 \end{cases}$$

**Σε μορφή πινάκων**

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\vec{0}$ : Πίνακας-στήλη $(3 \times 1)$ σταθερών όρων του συστήματος

$A$ : Πίνακας $(3 \times 4)$ συντελεστών του συστήματος

$\vec{x}$ : Πίνακας-στήλη $(4 \times 1)$ οι άγνωστοι του συστήματος

# Το γραμμικό μας σύστημα «αντιπροσωπεύεται» από τον επόμενο πίνακα (επαυξημένος) διότι διαθέτει όλες τις πληροφορίες : τους συντελεστές και τους σταθερούς όρους!

Συντελεστές του $x_1$

Συντελεστές του $x_2$

Συντελεστές του $x_3$

Συντελεστές του $x_4$

Στήλη των σταθερών όρων

$$E = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & 0 \end{array}\right]$$

$A$ $\qquad$ $\vec{0}$

# Αναγωγή του επαυξημένου σε ανηγμένο κλιμακωτό

$$E = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma_2 \to \gamma_2 - 2\gamma_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma_3 \to \gamma_3 - 3\gamma_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma_2 \to \frac{1}{2}\gamma_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma_3 \to \gamma_3 - 2\gamma_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma_1 \to \gamma_1 - 2\gamma_2} \left[\begin{array}{cccc|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A_R} & \underbrace{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}}_{\vec{0}} \end{array}\right] = E_R$$

Ας δούμε το σύστημα που αντιστοιχεί στον γραμμοϊσοδύναμο $E_R = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$, με $A_R$ τις τέσσερις πρώτες στήλες και $0$ την τελευταία.

Λύνω ως προς $x_1, x_3$.

$$A_R \cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1x_1 + 2x_2 + 0x_3 - 2x_4 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 2x_4 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = -2x_2 + 2x_4 \\ x_3 = -2x_4 \\ 0 = 0 \end{array}\right\}$$

Το οποίο είναι ισοδύναμο με το αρχικό $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$

Λύση του συστήματος

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 + 2x_4 \\ x_2 \\ -2x_4 \\ x_4 \end{bmatrix}, x_2, x_4, \in R$$

Σε μορφή πίνακα

Το σύστημα $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ έχει άπειρες λύσεις της μορφής $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 + 2x_4 \\ x_2 \\ -2x_4 \\ x_4 \end{bmatrix}, x_2, x_4, \in R$

Τις λύσεις θα μπορούσαμε να τις γράψουμε στην εξής μορφή (πίνακα-διανυσμάτων):

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 + 2x_4 \\ x_2 \\ -2x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x_4 \\ 0 \\ -2x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \kappa \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \kappa, \lambda \in R.$$

Άρα το σύνολο λύσεων του συστήματος αποτελείται από τα διανύσματα της μορφής :

$$\boxed{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \kappa \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \kappa, \lambda \in R.}$$

Δηλαδή είναι οι γραμμικοί συνδυασμοί των διανυσμάτων $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Δηλαδή το σύνολο λύσεων του συστήματος παράγεται από τα δύο αυτά διανύσματα.

## Ας παρατηρήσουμε τον πίνακα $E_R$ :

$$E_R = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ E_R = \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \phantom{0} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Παρατηρούμε πως ο βαθμός του πίνακα $A$ είναι ίδιος με τον βαθμό του επαυξημένου $E$ του συστήματος.

$rank(A) = rank(E)$
= αριθμός των pivots =
πλήθος των μη μηδενικών γραμμών (σε κλιμακωτή μορφή)=2

**2 βασικοί άγνωστοι:**
**αντιστοιχούν στα pivots ($x_1, x_3$)**

**2 ελεύθεροι άγνωστοι:**
**αντιστοιχούν σε εκείνους όπου δεν υπάρχουν pivots στις αντίστοιχες στήλες($x_2, x_4$).**