



# Γραμμική Άλγεβρα

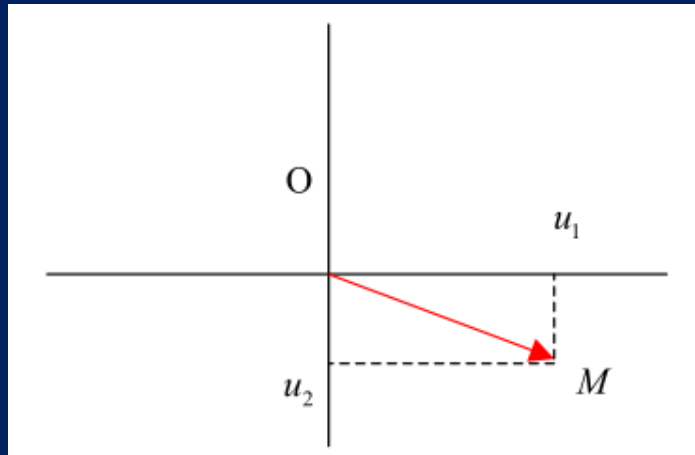
## 13. Εισαγωγή στους Διανυσματικούς Χώρους

Κάλλια Παυλοπούλου

2023-2024

## Ο χώρος $R^2$

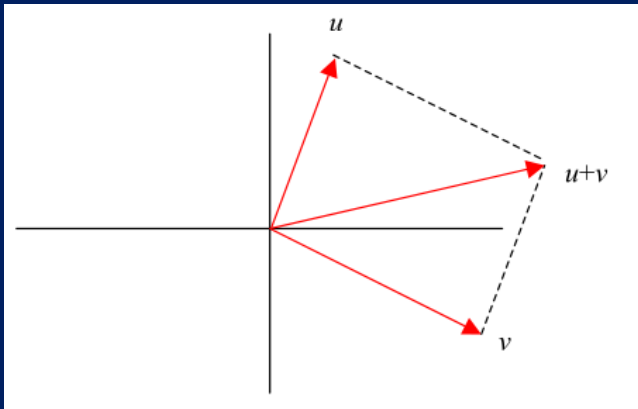
Μπορούμε να αντιστοιχίσουμε στο στοιχείο  $(u_1, u_2)$  του  $R^2$  το διάνυσμα  $\overrightarrow{OM}$  του επιπέδου που έχει αρχή το σημείο  $O = (0, 0)$  και πέρας το σημείο  $M = (u_1, u_2)$  όπως φαίνεται στο σχήμα



Μπορούμε το διάνυσμα  $\overrightarrow{OM}$  του επιπέδου να το συμβολίζουμε με έναν πίνακα γραμμή  $[u_1 \quad u_2]$  ή με έναν πίνακα στήλη  $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ .

# Οι πράξεις των διανυσμάτων στο $R^2$

## Πρόσθεση



### Γεωμετρικά

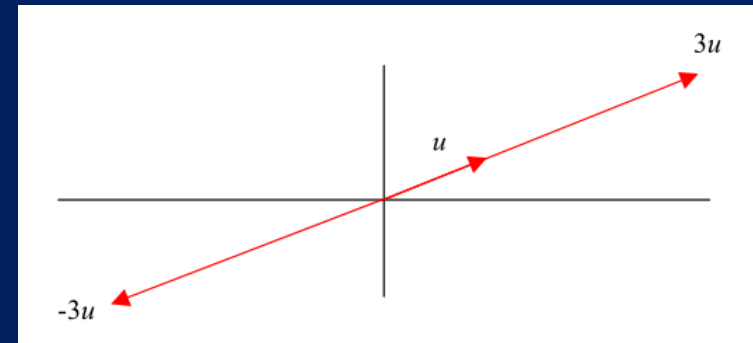
Το διάνυσμα  $\vec{u} + \vec{v}$  προκύπτει από τον κανόνα του παραλληλογράμμου.

### Αλγεβρικά

$$\text{Αν } \vec{u} = (u_1, u_2) \text{ και } \vec{v} = (v_1, v_2):$$
$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

**Λέμε ότι το  $\vec{u} + \vec{v}$  είναι το άθροισμα των  $\vec{u}$  και  $\vec{v}$**

## Βαθμωτός πολλαπλασιασμός



### Γεωμετρικά

Το διάνυσμα  $\lambda \cdot \vec{u}$  αντιστοιχεί σε ένα διάνυσμα που έχει την ίδια διεύθυνση με το  $\vec{u}$ . Η φορά του εξαρτάται από το πρόσημο του  $\lambda$ .

### Αλγεβρικά

$$\text{Αν } \vec{u} = (u_1, u_2) \text{ και } \lambda \in R (\lambda \neq 0):$$
$$\lambda \cdot \vec{u} = (\lambda \cdot u_1, \lambda \cdot u_2)$$

**Λέμε ότι το  $\lambda \cdot \vec{u}$  είναι συγγραμμικό με το  $\vec{u}$**

## Ο χώρος $R^n$

Το σύνολο όλων των διατεταγμένων  $n$ -άδων  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ , δηλαδή

$$R^n = \{(u_1, u_2, \dots, u_n) : u_i \in R, i = 1, 2, \dots, n\}$$

Εφοδιασμένο με :

A) την εσωτερική πράξη της πρόσθεσης

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) + (v_1, v_2, \dots, v_n) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$$

B) και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού (επί πραγματικό αριθμό)

$$\lambda \cdot (u_1, u_2, \dots, u_n) = (\lambda \cdot u_1, \lambda \cdot u_2, \dots, \lambda \cdot u_n)$$

είναι διανυσματικός χώρος.

Σημείωση: Τα στοιχεία του συνόλου  $R^n$  μπορούν να θεωρηθούν και πίνακες μεγέθους  $1 \times n$ , δηλαδή πίνακες-γραμμή και τα στοιχεία του τα λέμε διανύσματα. Όταν αναφερόμαστε στο σύνολο  $R^n$  μαζί με τις προηγούμενες πράξεις θα χρησιμοποιούμε την έκφραση ο χώρος  $R^n$  ή ο δ.χ.  $R^n$ .

# Διανυσματικός χώρος $V$

Έστω ένα μη κενό σύνολο  $V$  και  $K$  το σύνολο των πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών. Το σύνολο  $V$  εφοδιασμένο με δύο πράξεις, μία εσωτερική  $+$  (πρόσθεση) και μία εξωτερική  $\cdot$  (βαθμωτό πολλαπλασιασμό), ονομάζεται  $K$ -διανυσματικός χώρος όταν ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

- 1)  $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- 2)  $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V, (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- 3)  $\exists \mathbf{0} \in V: \forall \vec{u} \in V, \vec{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \vec{u} = \vec{u}$
- 4)  $\forall \vec{u} \in V, \exists (-\vec{u}) \in V: \vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \mathbf{0}$
- 5)  $\forall \lambda \in K, \forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$
- 6)  $\forall \lambda, \mu \in K, \forall \vec{u} \in V, (\lambda + \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{u}$
- 7)  $\forall \lambda, \mu \in K, \forall \vec{u} \in V, (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{u})$
- 8)  $\exists \mathbf{1} \in K: \forall \vec{u} \in V, \mathbf{1} \cdot \vec{u} = \vec{u}$

Οι ιδιότητες των πράξεων ενός  $K$ -δ.χ.  $V$

Τα στοιχεία του  $V$  ονομάζονται **διανύσματα**.

# Γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων στον $R^n$

Αν έχουμε  $m$  διανύσματα  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$  του χώρου του  $R^n$ , τότε θα λέμε ότι το διάνυσμα  $\vec{x}$  του  $R^n$  είναι ένας **γραμμικός συνδυασμός** των διανυσμάτων αυτών, αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  τέτοιοι ώστε να ισχύει:

$$\vec{x} = \lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + \lambda_m \cdot \vec{v}_m, \lambda_i \in R$$

άθροισμα πολλαπλασίων αυτών των διανυσμάτων

## Παράδειγμα 1

Το διάνυσμα  $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$  είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$  και  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ;

### Λύση:

- Πρέπει να εξετάσουμε αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί  $\kappa, \lambda$  τέτοιοι ώστε:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \kappa \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa \\ 2 \cdot \kappa + \lambda \\ -\kappa + 2 \cdot \lambda \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = 1 \\ 2\kappa + \lambda = 4 \\ -\kappa + 2\lambda = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = 1 \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

- Άρα το διάνυσμα  $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$  γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των άλλων δύο ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

# Διανυσματικός Υπόχωρος

## Ορισμός:

Έστω  $V$  ένας  $K$ -διανυσματικός χώρος. Ένα μη κενό υποσύνολο  $W$  του  $V$  θα λέγεται  **$K$ -διανυσματικός υποχώρος** του  $V$  αν είναι διανυσματικός χώρος ως προς τις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού στον  $V$ .

## Θεώρημα:

Ένα μη κενό υποσύνολο  $W$  ενός  $K$ -διανυσματικού χώρου  $V$  θα είναι διανυσματικός υποχώρος του  $V$  αν και μόνο αν ισχύουν για το  $W$  οι επόμενες δύο ιδιότητες:

- i)  $\forall \vec{u}, \vec{v} \in W, \vec{u} + \vec{v} \in W$ , δηλ. να είναι **κλειστό ως προς την πρόσθεση**
- ii)  $\forall \vec{u} \in W, \forall \lambda \in K, \lambda \cdot \vec{u} \in W$ , δηλ. να είναι **κλειστό ως προς τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό**



## Τα διανύσματα παράγουν τον χώρο...

Θα λέμε ότι τα διανύσματα  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$  παράγουν τον χώρο  $R^n$ , αν κάθε διάνυσμα  $\vec{x}$  του  $R^n$  μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός τους.

Δηλαδή, θα εξετάζουμε αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  τέτοιοι ώστε να ισχύει η επόμενη σχέση για όλα τα διανύσματα  $\vec{x}$  του  $R^n$

$$\vec{x} = \lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + \lambda_m \cdot \vec{v}_m, \lambda_i \in R$$

Π.χ.

Προφανώς τα διανύσματα  $\vec{e}_1 = (1,0), \vec{e}_2 = (0,1)$  παράγουν τον χώρο  $R^2$ .

Ομοίως τα  $n$  διανύσματα  $\vec{e}_1 = (1,0, \dots, 0), \vec{e}_2 = (0,1, \dots, 0), \dots, \vec{e}_n = (0,0, \dots, 1)$  παράγουν τον χώρο  $R^n$ .

## Παράδειγμα 2

Θα δείξουμε ότι τα διανύσματα  $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  παράγουν τον χώρο  $R^2$ .

### Λύση:

Πρέπει να εξετάσουμε αν **για κάθε** διάνυσμα  $\vec{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί  $\kappa, \lambda$  τέτοιοι ώστε:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \kappa \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Άγνωστοι  $\kappa, \lambda$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \kappa \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa \\ \kappa \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa \\ \kappa + \lambda \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = x \\ \kappa + \lambda = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = x \\ \lambda = y - x \end{cases}$$

Άρα κάθε διάνυσμα του  $R^2$  μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των δύο αυτών διανυσμάτων:  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (y - x) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Επομένως τα διανύσματα  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  και  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  ΠΑΡΑΓΟΥΝ ΤΟΝ ΧΩΡΟ  $R^2$ .

## Παράδειγμα 3- γεωμετρικός τρόπος λύσης

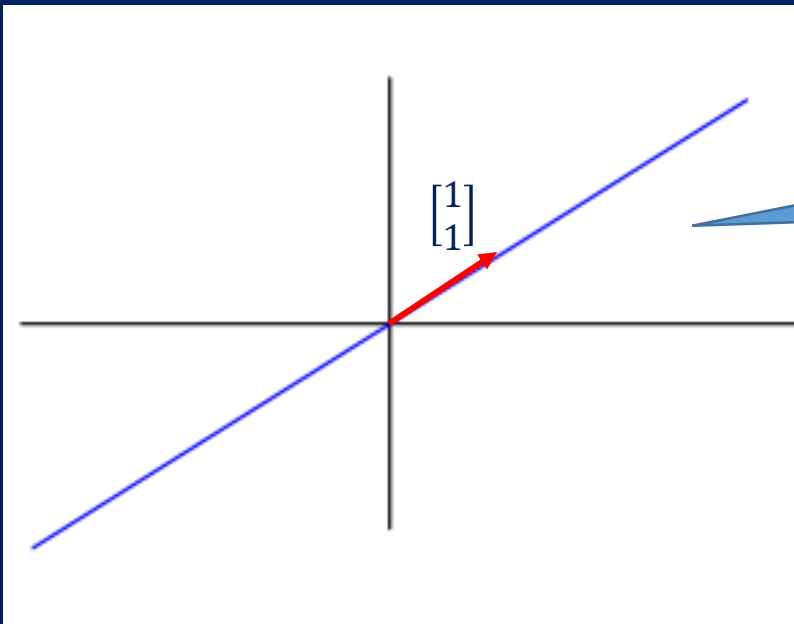
Τα διανύσματα  $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$  δεν παράγουν τον χώρο  $R^2$ .

**Λύση:** Πράγματι, τα διανύσματα  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  είναι συγγραμμικά αφού  $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot \vec{v}_1$

Άρα όλα τα διανύσματα  $\vec{x}$  που γράφονται ως γραμμικός συνδυασμός των  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \kappa \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \kappa \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \cdot 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = (\kappa + 2 \cdot \lambda) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \kappa, \lambda \in R$$

είναι συγγραμμικά με το  $\vec{v}_1$ , και το  $\vec{v}_2$ , δηλαδή ανήκουν σε μία ευθεία και δεν «καλύπτουν» όλο το επίπεδο!



Δηλαδή όλοι οι γραμμικοί συνδυασμοί των  $\vec{v}_1$  και  $\vec{v}_2$  ανήκουν σε μία ευθεία και δεν καλύπτουν όλο το επίπεδο!

## Παράδειγμα 3-αλγεβρικός τρόπος λύσης

Τα διανύσματα  $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$  δεν παράγουν τον χώρο  $R^2$ .

### Λύση:

Πρέπει να εξετάσουμε αν **για κάθε** διάνυσμα  $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in R^2$  υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί  $\kappa, \lambda$  τέτοιοι ώστε:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \kappa \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa + 2\lambda \\ \kappa + 2\lambda \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa + 2\lambda = x \\ \kappa + 2\lambda = y \end{cases}$$

Άγνωστοι  $\kappa, \lambda$

Το παραπάνω σύστημα έχει λύση αν και μόνον αν  $x = y$ .

Αν  $x \neq y$  τότε το σύστημα είναι αδύνατο δηλαδή τα διανύσματα  $\vec{x} = (x, y) \in R^2$  με  $x \neq y$ , δεν μπορούν να γραφτούν ως γραμμικοί συνδυασμοί των  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ .

Επομένως τα διανύσματα  $\vec{v}_1$  και  $\vec{v}_2$  δεν παράγουν το χώρο  $R^2$ !

## Γραμμική ανεξαρτησία διανυσμάτων στον $R^n$

- Αν έχουμε  $m$  διανύσματα  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$  του χώρου του  $R^n$ , τότε
- θα τα ονομάζουμε **γραμμικά ανεξάρτητα** αν
- από τη σχέση  $\lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{v}_3 + \dots + \lambda_m \cdot \vec{v}_m = \vec{0}$ ,  $\lambda_i \in R$ , έπεται αναγκαστικά ότι  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$ .

$$\lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + \lambda_m \cdot \vec{v}_m = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$$

- Διαφορετικά τα ονομάζουμε **γραμμικά εξαρτημένα**.

Άλλος ορισμός: Τα διανύσματα  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$  ενός διανυσματικού χώρου  $R^n$  είναι **γραμμικά εξαρτημένα** αν τουλάχιστον ένα από αυτά μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

# Παράδειγμα 4-γραμμική ανεξαρτησία

Τα διανύσματα  $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ,  $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ , του χώρου  $R^4$ , είναι γραμμικά ανεξάρτητα;

**Λύση:**

Θα διερευνήσουμε για ποιους συντελεστές  $\kappa, \lambda, \mu$  ο γραμμικός συνδυασμός  $\kappa \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{w}$  δίνει το  $\vec{0}$ .

$$\kappa \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{w} = \vec{0} \Leftrightarrow \kappa \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa + \lambda + \mu = 0 \\ \kappa + \lambda + \mu = 0 \\ \kappa - \lambda + 3\mu = 0 \\ -\kappa - 2\mu = 0 \end{cases}$$

**Σύστημα**

Άγνωστοι  $\kappa, \lambda, \mu$

**Επαυξημένος**

$$A_E = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right]$$

**Επαυξημένος σε ανηγμ. κλιμ. μορφή**

$$A_R = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

**Άπειρες λύσεις**  
 $rank(A_R) = 2 < 3$

$$\begin{cases} \kappa = -2\mu \\ \lambda = \mu \end{cases}, \mu \in R$$

Άρα υπάρχουν άπειροι συνδυασμοί που μας δίνουν το  $\vec{0}$ .

Επομένως τα  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  είναι γραμμικά εξαρτημένα!

Πράγματι:  
 $\vec{w} = 2 \cdot \vec{u} - \vec{v}$

## Παρατήρηση: Γραμμική ανεξαρτησία διανυσμάτων στον $R^n$

Η σχέση  $\lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + \lambda_m \cdot \vec{v}_m = \vec{0}$ , γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$\lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + \lambda_m \cdot \vec{v}_m = \vec{0} \Leftrightarrow \underbrace{[\vec{v}_1 | \vec{v}_2 | \dots | \vec{v}_m]}_{\text{Matrix}} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \boxed{A_{n \times m} \cdot \vec{\lambda} = \vec{0}}$$

Ο πίνακας με στήλες τις συντεταγμένες των διανυσμάτων  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$

Άρα το πρόβλημα διερεύνησης της γραμμικής ανεξαρτησίας  $m$  διανυσμάτων στο  $R^n$  ανάγεται στην επίλυση ενός ομογενούς γραμμικού συστήματος.

Σχηματίζουμε λοιπόν τον πίνακα  $A_{n \times m} = [\vec{v}_1 | \vec{v}_2 | \dots | \vec{v}_m]$  και εξετάζουμε αν το ομογενές σύστημα  $A_{n \times m} \cdot \vec{\lambda} = \vec{0}$  έχει μία και μοναδική λύση την  $\vec{\lambda} = \vec{0}$  (ανεξάρτητα) ή αν έχει άπειρες λύσεις (εξαρτημένα).

Αν  **$rank(A_{n \times m}) = m$**  τότε το σύστημα έχει μία και μοναδική λύση τη μηδενική, άρα  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητα

Αν  **$rank(A_{n \times m}) < m$**  τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, άρα  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$  είναι γραμμικώς εξαρτημένα

## Παράδειγμα 5-γραμμική ανεξαρτησία

Τα διανύσματα  $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$ ,  $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ ,  $\vec{w} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ ,  $\vec{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ , του χώρου  $R^4$ , είναι γραμμικά ανεξάρτητα;

### Λύση:

Έχουμε να λύσουμε το ομογενές σύστημα  $A \cdot \vec{\lambda} = \vec{0}$ ,

όπου  $A$  ο πίνακας με στήλες τις συντεταγμένες των διανυσμάτων  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z}$ .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 7 & -1 & -3 & 4 \\ 6 & 5 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

1) Μπορούμε να υπολογίσουμε την τάξη  $r(A) = 4$  μετατρέποντάς τον σε κλιμακωτό πίνακα, και να συμπεράνουμε ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

2) Εναλλακτικά, επειδή ο  $A$  είναι τετραγωνικός, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε και την ορίζουσά του:  $\det(A) = -56 \neq 0$ .

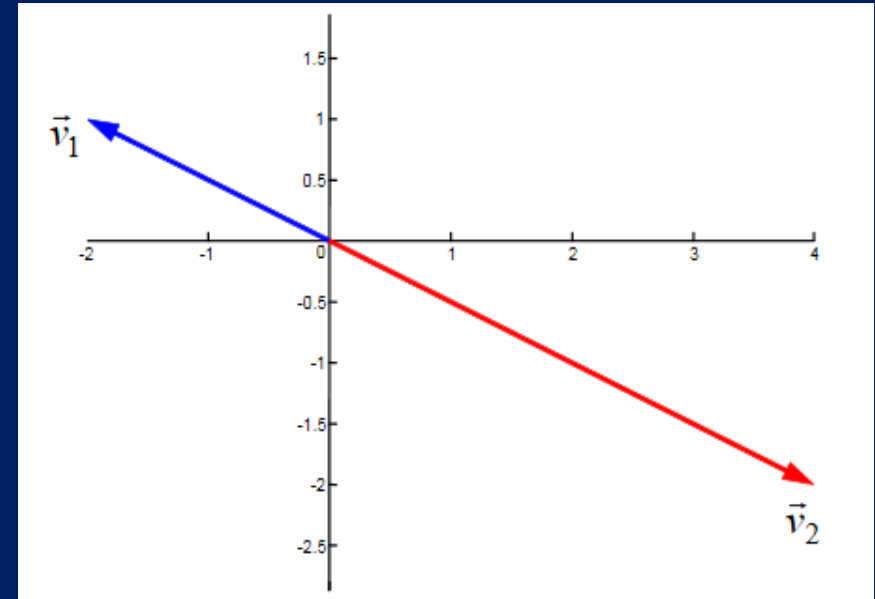
Επειδή  $\det A \neq 0$ , το ομογενές σύστημα  $A \cdot \vec{\lambda} = \vec{0}$  έχει μία και μοναδική λύση την μηδενική. Άρα τα διανύσματα  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z}$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα.



# Γραμμική εξάρτηση διανυσμάτων στον $R^2$

- Δύο διανύσματα στον  $R^2$  είναι γραμμικώς εξαρτημένα αν και μόνο αν είναι **συνευθειακά**

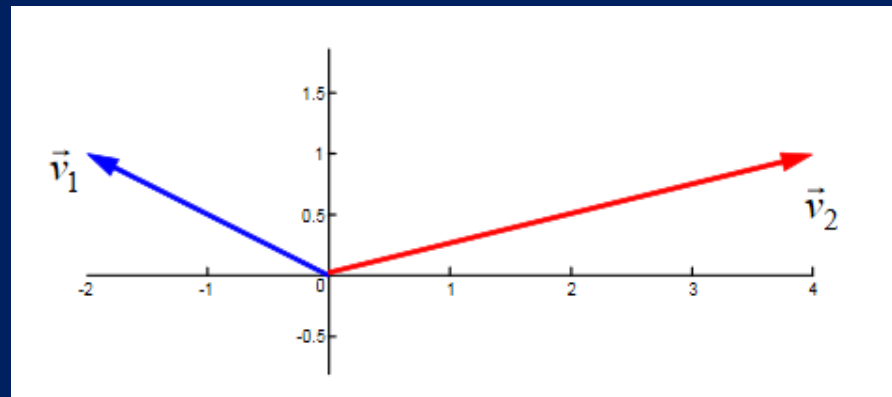
Παράδειγμα: Τα διανύσματα  $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$  και  $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$  είναι γραμμικώς εξαρτημένα διότι  $\vec{v}_2 = -2 \cdot \vec{v}_1$



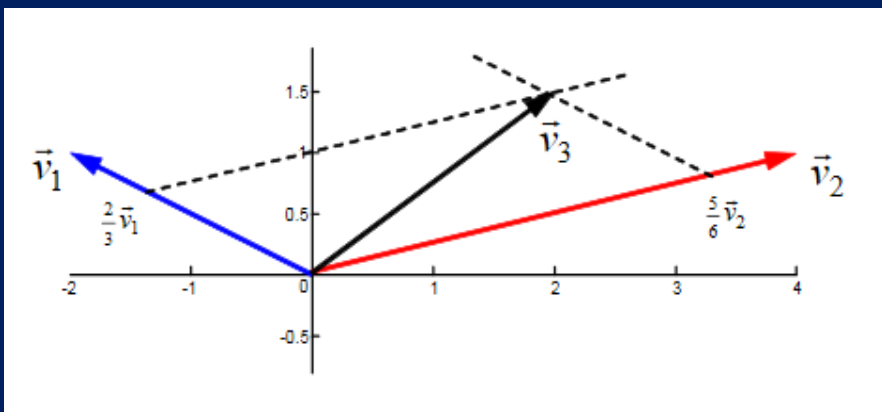
# Γραμμική ανεξαρτησία διανυσμάτων στον $R^2$

- Επομένως, **δύο μη συνευθειακά** διανύσματα του  $R^2$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Παράδειγμα: Για τα διανύσματα  $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$  και  $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  
δεν υπάρχει  $\lambda \in R: \vec{v}_2 = \lambda \cdot \vec{v}_1$



- Τρία και πλέον διανύσματα του  $R^2$  είναι πάντα γραμμικά εξαρτημένα



Παράδειγμα: Για τα διανύσματα  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  ισχύει:

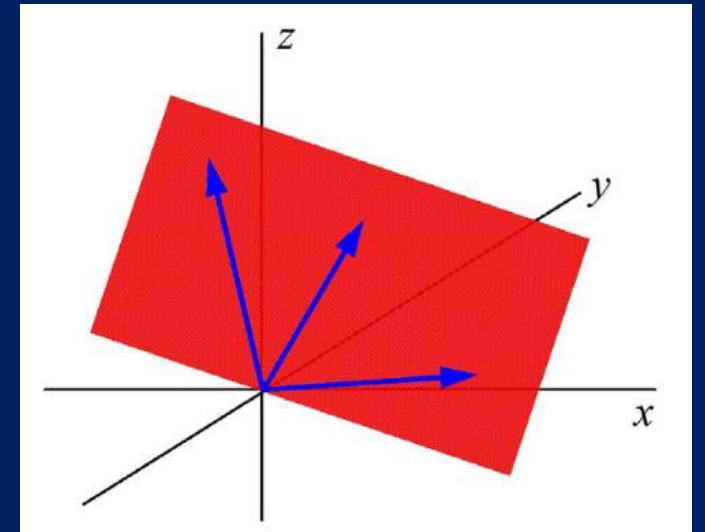
$$\vec{v}_3 = \frac{2}{3} \cdot \vec{v}_1 + \frac{5}{6} \cdot \vec{v}_2$$

# Γραμμική εξάρτηση διανυσμάτων στον $R^3$

- Δύο διανύσματα στον  $R^3$  είναι γραμμικώς εξαρτημένα αν και μόνο αν είναι συνευθειακά

Παράδειγμα: Τα διανύσματα  $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$  και  $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \\ 15 \end{bmatrix}$  είναι γραμμικώς εξαρτημένα διότι  $\vec{v}_2 = -3 \cdot \vec{v}_1$

- Τρία διανύσματα του  $R^3$  είναι πάντα γραμμικά εξαρτημένα
- αν και μόνο αν είναι συνεπίπεδα.



- Τέσσερα και πλέον διανύσματα του  $R^3$  είναι πάντοτε γραμμικώς εξαρτημένα.

## Βάση του $R^n$

Το σύνολο  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$  των  $m$  στοιχείων του  $R^n$  ονομάζεται βάση του  $R^n$  αν έχει τις εξής ιδιότητες:

- 1) Τα  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$  παράγουν το χώρο  $R^n$  και
- 2) Τα  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Π.χ.

Προφανώς τα διανύσματα  $\vec{e}_1 = (1,0), \vec{e}_2 = (0,1)$  αποτελούν μία βάση του χώρου  $R^2$ .

Ομοίως τα  $n$  διανύσματα  $\vec{e}_1 = (1,0, \dots, 0), \vec{e}_2 = (0,1, \dots, 0), \dots, \vec{e}_n = (0,0, \dots, 1)$  αποτελούν μία βάση του χώρου  $R^n$ .

# Παρατηρήσεις για τη βάση ενός δ.χ. $V$

- Κάθε διανυσματικός χώρος έχει **άπειρες βάσεις**. Δηλαδή υπάρχουν άπειρα σύνολα γραμμικών ανεξαρτήτων διανυσμάτων που παράγουν το χώρο  $V$ .
- Καθεμιά από τις άπειρες βάσεις ενός δ.χ.  $V$  έχει το ίδιο πλήθος διανυσμάτων.

Διάσταση ενός δ.χ.  $V$  είναι το πλήθος των διανυσμάτων κάθε βάσης του  $V$  και συμβολίζεται με  $\dim(V)$ .

## Σημείωση:

- $\dim(V)$  = μέγιστο πλήθος γραμμικών ανεξαρτήτων διανυσμάτων του  $V$ .
- $\dim(\mathbb{R}^n) = n$
- Το  $\mathbb{R}^n$  έχει άπειρο πλήθος βάσεων οι οποίες έχουν όλες  $n$  το πλήθος διανύσματα.
- Αν  $k$ -το πλήθος διανύσματα του  $\mathbb{R}^n$  με  $k > n$ , τότε αποδεικνύεται ότι αυτά είναι πάντα γραμμικώς εξαρτημένα.

## Βάση στον $R^2$

- Αναφέραμε πως δύο οποιαδήποτε διανύσματα  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  του  $R^2$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν και μόνο αν είναι μη παράλληλα. Ας δούμε πότε θα αποτελούν βάση.
- Σχηματίζουμε λοιπόν τον πίνακα  $A_{2 \times 2} = [\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2]$  και εξετάζουμε αν το ομογενές σύστημα  $A_{2 \times 2} \cdot \vec{\lambda} = \vec{0}$  έχει μία και μοναδική λύση την  $\vec{\lambda} = \vec{0}$  (ανεξάρτητα) ή αν έχει άπειρες λύσεις (εξαρτημένα).
- Άρα αν  **$\text{rank}(A_{2 \times 2}) = 2$**  τότε τα  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και στην προκειμένη περίπτωση αποτελούν και βάση του  $R^2$ .
- Εναλλακτικά, επειδή ο  $A_{2 \times 2}$  είναι τετραγωνικός, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε και την ορίζουσά του  **$\det(A_{2 \times 2})$** . **Άρα θα αποτελούν βάση του  $R^2$  αν και μόνο αν  $\det A_{2 \times 2} \neq 0$ .**

## Βάση στον $R^3$

- Δύο οποιαδήποτε μη παράλληλα διανύσματα  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  του  $R^3$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αλλά δεν αποτελούν βάση του  $R^3$ .
- Τρία οποιαδήποτε μη συνεπίπεδα διανύσματα  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  του  $R^3$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και αποτελούν βάση του  $R^3$  αν και μόνο αν είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, δηλαδή αν το ομογενές σύστημα  $A_{3 \times 3} \cdot \vec{\lambda} = \vec{0}$ , όπου  $A_{3 \times 3} = [\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \vec{v}_3]$  έχει μία και μοναδική λύση την  $\vec{\lambda} = \vec{0}$ .
- Δηλαδή αν  **$\text{rank}(A_{3 \times 3}) = 3$**  τότε τα  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  αποτελούν και βάση του  $R^3$ .
- Ή αλλιώς, αν  **$\det(A_{3 \times 3}) \neq 0$**  τότε τα  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  αποτελούν και βάση του  $R^3$ .