

# Άσκηση 16

## Ροπή αδράνειας στερεών σωμάτων

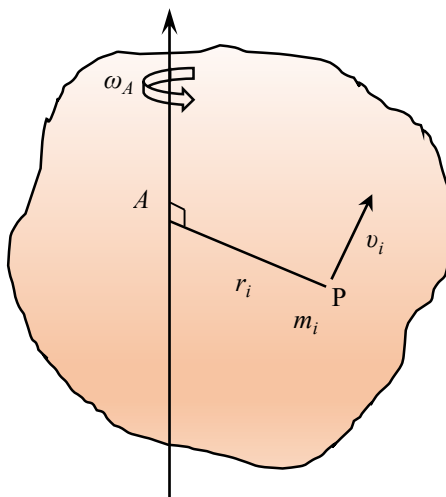
### 16.1. Σκοπός

Στην άσκηση αυτή εξετάζεται η έννοια της ροπής αδράνειας και υπολογίζονται οι ροπές αδράνειας τεσσάρων στερεών σωμάτων: ενός δίσκου, ενός συμπαγούς κυλίνδρου, ενός κυλινδρικού σωλήνα και μιας σφαίρας.

### 16.2. Γενικά

#### 16.2.1. Κινητική ενέργεια περιστρεφόμενου στερεού σώματος – Ροπή αδράνειας

Ας εξετάσουμε ένα στερεό σώμα (Σχ. 16.1) που περιστρέφεται γύρω από έναν σταθερό άξονα,  $A$ , ο οποίος δεν είναι απαραίτητο να διαπερνά το σώμα.



Σχήμα 16.1. Περιστροφή ενός στερεού σώματος γύρω από έναν σταθερό άξονα,  $A$ .

Αν κάποια χρονική στιγμή το σώμα έχει γωνιακή ταχύτητα  $\omega_A$ , ένα μικρό στοιχείο μάζας  $m_i$  που βρίσκεται στο σημείο  $P$ , σε σταθερή απόσταση  $r_i$  από τον άξονα  $A$ , θα έχει στιγμιαία ταχύτητα  $v_i = \omega_A r_i$ . Επομένως, η κινητική του ενέργεια θα είναι  $K_i = \frac{1}{2} m_i (\omega_A r_i)^2$ . Αθροίζοντας για όλα τα στοιχεία μάζας που αποτελούν το σώμα, προκύπτει η κινητική ενέργεια του σώματος λόγω της περιστροφής του:

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i \omega_A^2 r_i^2 = \frac{1}{2} \omega_A^2 \sum_i m_i r_i^2 \quad (16.1)$$

Το άθροισμα στην Εξ. (16.1) εξαρτάται μόνο από τη γεωμετρική κατανομή της μάζας του σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής. Το άθροισμα αυτό ονομάζεται **ροπή αδράνειας του σώματος** ως προς τον άξονα  $A$ ,  $I_A$ , και ορίζεται ως

$$I_A = \sum_i m_i r_i^2 \quad (16.2)$$

όπου ο δείκτης  $A$  υποδηλώνει τον άξονα ως προς τον οποίον υπολογίζεται η ροπή αδράνειας. Έτσι, η κινητική ενέργεια ενός στερεού σώματος, λόγω της περιστροφής του γύρω από τον άξονα  $A$  με γωνιακή ταχύτητα  $\omega_A$ , είναι

$$K = \frac{1}{2} I_A \omega_A^2 \quad (16.3)$$

Η ομοιότητα της Εξ. (16.3) με τη γνωστή σχέση  $K = (1/2) m v^2$  για τη μεταφορική κίνηση δείχνει ότι, στην περιστροφική κίνηση, όπως η γωνιακή ταχύτητα παίζει τον ρόλο που παίζει η ταχύτητα στη μεταφορική κίνηση, έτσι και η ροπή αδράνειας παίζει τον ρόλο που παίζει η μάζα.

Οι ροπές αδράνειας πολλών στερεών σωμάτων ως προς κάποιους χαρακτηριστικούς άξονες υπολογίζονται εύκολα, δεδομένου ότι, στο όριο  $m_i \rightarrow dm$ , το άθροισμα στην Εξ. (16.2) μετατρέπεται στο ολοκλήρωμα

$$I_A = \int r^2 dm \quad (16.4)$$

Στον Πίνακα I που ακολουθεί δίνονται οι ροπές αδράνειας μερικών στερεών, ως προς διάφορους άξονες.

### ΠΙΝΑΚΑΣ I

#### Ροπές αδράνειας μερικών κοινών στερεών σωμάτων

Ομογενές σώμα μάζας $M$	Άξονας	Ροπή αδράνειας
Ράβδος μήκους $L$	Κάθετος στη ράβδο, στο κέντρο της	$\frac{1}{12} M L^2$
	Κάθετος στη ράβδο, στο ένα της άκρο	$\frac{1}{3} M L^2$
Κυκλικός δακτύλιος ακτίνας $R$	Κάθετος στο επίπεδο του δακτυλίου, στο κέντρο του	$M R^2$
	Μια διάμετρος του δακτυλίου	$\frac{1}{2} M R^2$
Κυκλικός δίσκος ακτίνας $R$	Κάθετος στο επίπεδο του δίσκου, στο κέντρο του	$\frac{1}{2} M R^2$
	Μια διάμετρος του δίσκου	$\frac{1}{4} M R^2$
Συμπαγής σφαίρα ακτίνας $R$	Μια διάμετρος της σφαίρας	$\frac{2}{5} M R^2$
Συμπαγής κύλινδρος ακτίνας $R$	Ο άξονας του κυλίνδρου	$\frac{1}{2} M R^2$
Λεπτότοιχος σωλήνας ακτίνας $R$	Ο άξονας του σωλήνα	$M R^2$

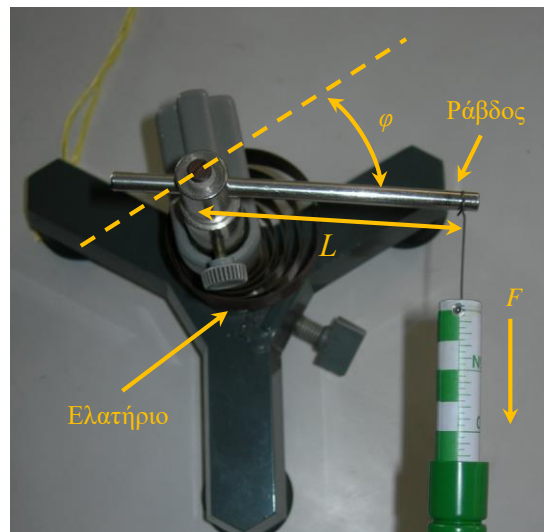
#### 16.2.2. Δυναμική ενέργεια σπειροειδούς ελατηρίου

Αν το ένα άκρο ενός σπειροειδούς ελατηρίου διατηρείται ακίνητο, ενώ στο άλλο ασκείται μια δύναμη, το δεύτερο αυτό άκρο θα περιστραφεί γύρω από τον άξονα του ελατηρίου. Έστω,

λοιπόν, ότι το ένα άκρο του ελατηρίου διατηρείται ακίνητο, ενώ στο άλλο του άκρο συνδέεται μια ράβδος, η οποία μπορεί να περιστραφεί γύρω από άξονα που περνά από το κέντρο του ελατηρίου και είναι κάθετος στο επίπεδό του (Σχ. 16.2). Αν μια δύναμη,  $F$ , ασκηθεί κάθετα στο ελεύθερο άκρο της ράβδου, το οποίο απέχει απόσταση  $L$  από τον άξονα περιστροφής, η ράβδος θα περιστραφεί κατά μια γωνία  $\varphi$ , ανάλογη της δύναμης. Συγκεκριμένα, ισχύει

$$\varphi = \frac{FL}{D} \quad (16.5)$$

όπου  $D$  είναι μια σταθερά του ελατηρίου, γνωστή ως **σταθερά στρέψης**.



Σχήμα 16.2. Περιστροφή σπειροειδούς ελατηρίου.

Ακριβέστερα, η δύναμη  $F$  ασκεί στο ελατήριο ροπή η οποία έχει, ως προς το κέντρο του ελατηρίου, μέτρο ίσο με

$$N_F = FL \quad (16.6)$$

Το άκρο του ελατηρίου περιστρέφεται κατά γωνία  $\varphi$ , τόση ώστε το ελατήριο να αντιδράσει ασκώντας ίση και αντίθετη ροπή επαναφοράς  $N = N_F$ , όπου

$$N = -D\varphi \quad (16.7)$$

Η τελευταία σχέση είναι ο **νόμος του Hooke** για το σπειροειδές ελατήριο.

Η Εξ. (16.5) μπορεί να γραφεί και με τη μορφή

$$F = \frac{D}{L}\varphi \quad (16.8)$$

Αν τώρα το άκρο του ελατηρίου περιστραφεί κατά ολική γωνία  $\varphi_0$ , μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι το έργο που παράγεται είναι

$$W = \frac{1}{2} D \varphi_0^2 \quad (16.9)$$

Αυτή είναι και η δυναμική ενέργεια που αποθηκεύεται στο σπειροειδές ελατήριο [συγκρίνετε με τη δυναμική ενέργεια  $(1/2)kx^2$  του γραμμικού ελατηρίου].

### 16.3. Μέθοδος

Έστω ότι ένα στερεό σώμα μπορεί να περιστραφεί γύρω από έναν άξονα,  $A$  (Σχ. 16.3). Στην περιστροφή του σώματος αντιστέκεται σπειροειδές ελατήριο, το οποίο ασκεί ροπή επαναφοράς ανάλογη της γωνίας περιστροφής του σώματος από τη θέση ισορροπίας του. Το σύστημα αυτό αποτελεί έναν **στροφικό αρμονικό ταλαντωτή**, ο οποίος, αν περιστραφεί κατά μια γωνία και αφεθεί ελεύθερος, θα εκτελέσει στροφικές ταλαντώσεις.



Σχήμα 16.3. Στροφικός ταλαντωτής.

Σύμφωνα με όσα αναπτύχθηκαν παραπάνω, αν το σώμα έχει περιστραφεί κατά γωνία  $\varphi$  από τη θέση ισορροπίας του και έχει γωνιακή ταχύτητα περιστροφής γύρω από τον άξονα  $A$  ίση με  $\omega_A$ , θα έχει δυναμική ενέργεια  $U = (1/2) D \varphi^2$  αποθηκευμένη στο ελατήριο και κινητική ενέργεια  $K = (1/2) I \omega_A^2$  λόγω της περιστροφής του σώματος. Η ολική ενέργεια του ταλαντωτή θα είναι ίση με

$$E = \frac{1}{2} I \omega_A^2 + \frac{1}{2} D \varphi^2 \quad (16.10)$$

Αν οι τριβές μπορούν να αγνοηθούν, η  $E$  θα παραμένει σταθερή. Επομένως, ο ρυθμός μεταβολής της  $E$  ως προς τον χρόνο θα είναι ίσος με μηδέν:

$$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} I \omega_A^2 \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} D \varphi^2 \right) = 0 \Rightarrow I \omega_A \frac{d\omega_A}{dt} + D \varphi \frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad (16.11)$$

Όμως, η γωνία  $\varphi$  και η γωνιακή ταχύτητα  $\omega_A$  συνδέονται μέσω της σχέσης

$$\omega_A = \frac{d\varphi}{dt} \quad (16.12)$$

Συνεπώς, η Εξ. (16.11) γράφεται ως

$$I \frac{d\omega_A}{dt} + D \varphi = 0 \quad \text{ή} \quad I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + D \varphi = 0$$

ή ακόμη

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2 \varphi = 0 \quad \text{όπου} \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{I}} \quad (16.13)$$

Αυτή είναι η γνωστή εξίσωση κίνησης του απλού αρμονικού ταλαντωτή για ελεύθερες ταλαντώσεις, η γενική λύση της οποίας είναι

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega t + \theta) \quad (16.14)$$

όπου  $\varphi_0$  είναι το πλάτος της ταλάντωσης (σε ακτίνια),  $\theta$  μια γωνιακή σταθερά (επίσης σε ακτίνια), γνωστή ως σταθερά φάσης, και  $\omega$  η γωνιακή συχνότητα των ταλαντώσεων (σε ακτίνια ανά δευτερόλεπτο). Οι σταθερές  $\varphi_0$  και  $\theta$  καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες ή κάποιες άλλες συνθήκες του προβλήματος.

Από την Εξ. (16.13) και τη γνωστή σχέση  $T = 2\pi/\omega$ , η περίοδος των στροφικών ταλαντώσεων βρίσκεται ίση με

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}} \quad (16.15)$$

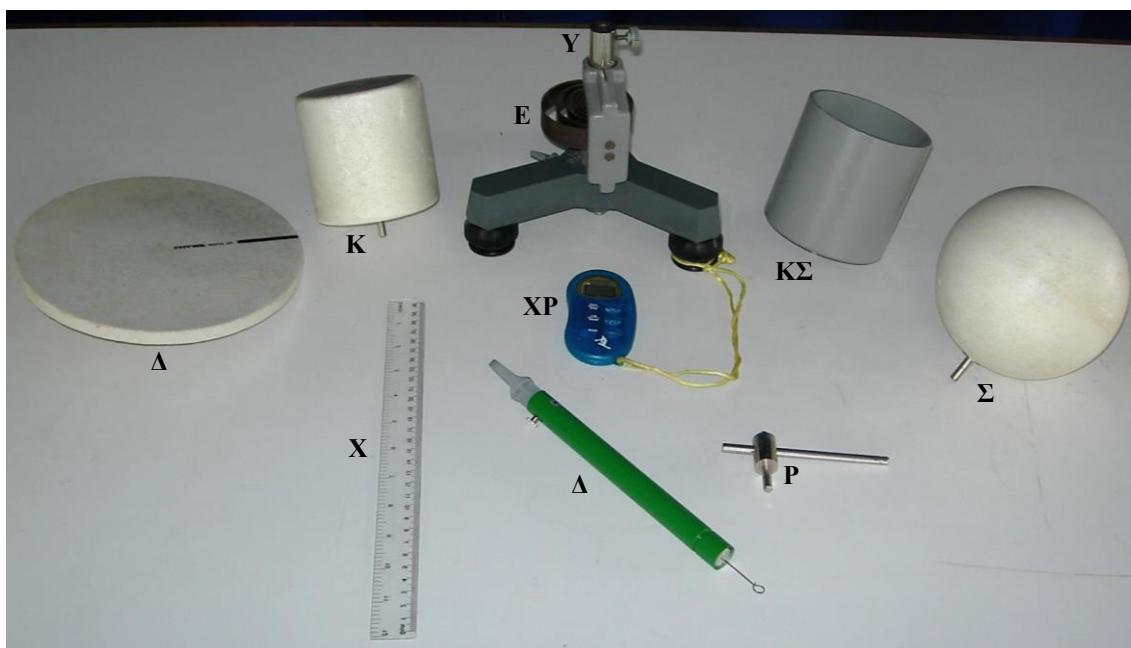
Επομένως, η ροπή αδράνειας του σώματος μπορεί να υπολογιστεί από την περίοδο των ταλαντώσεων του ως

$$I = \frac{T^2 D}{4\pi^2} \quad (16.16)$$

εξίσωση η οποία αποτελεί και τη βάση για τον προσδιορισμό των ροπών αδράνειας στην παρούσα άσκηση.

#### 16.4. Πειραματική διάταξη

Η πειραματική διάταξη της άσκησης φαίνεται στο Σχ. 16.4. Όπως αναφέρθηκε, θα υπολογιστούν οι ροπές αδράνειας τεσσάρων στερεών σωμάτων: ενός δίσκου ( $\Delta$ ), ενός συμπαγούς κυλίνδρου ( $K$ ), ενός κυλινδρικού σωλήνα ( $K\Sigma$ ) και μιας σφαίρας ( $\Sigma$ ).



Σχήμα 16.4. Η πειραματική διάταξη της άσκησης.

Μία από τις συσκευές που χρησιμοποιούνται ευρύτατα για τη μέτρηση της ροπής αδράνειας των σωμάτων είναι ο στροφικός ταλαντωτής, ο οποίος εικονίζεται και στο Σχ. 16.3. Τα σώματα μπορούν να τοποθετηθούν στην υποδοχή του ( $Y$ ) ώστε, όταν στραφούν, να

εκτελούν στροφικές ταλαντώσεις γύρω από κατακόρυφο άξονα. Οι περίοδοι αυτών των ταλαντώσεων μετρούνται με τη βοήθεια ενός ψηφιακού χρονομέτρου χειρός (XP), ενώ οι μάζες και οι χαρακτηριστικές διαστάσεις των σωμάτων αναγράφονται επάνω στις επιφάνειές τους.

Η ροπή επαναφοράς παρέχεται από ένα σπειροειδές ελατήριο (E). Η σταθερά αυτού του ελατηρίου (η σταθερά στρέψης,  $D$ ) μπορεί να μετρηθεί με τη βοήθεια ενός δυναμομέτρου ( $\Delta$ ) και μιας λεπτής ράβδου (P). Η ράβδος αυτή τοποθετείται στην υποδοχή Y του στροφικού ταλαντωτή, δηλαδή κάθετα στον άξονα περιστροφής του συστήματος, και έτσι μπορεί να ασκήσει μετρήσιμη ροπή στο ελατήριο και να το περιστρέψει (βλ. Σχ. 26.2). Το μήκος της ράβδου (εγκοπή – άξονας περιστροφής)  $L$  μπορεί να μετρηθεί με τη βοήθεια ενός χάρακα (X).

## Βιβλιογραφία

1. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Φυσική: Βασικές αρχές*, Τόμος Α: *Μηχανική – Κύματα – Θερμοδυναμική* (Αθήνα, 2021), 7.4, 10.3-10.6, 15.1, 15.3.
2. R. A. Serway, J. W. Jewett, *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς: Μηχανική – Ταλαντώσεις και Μηχανικά Κύματα – Θερμοδυναμική – Σχετικότητα* (Αθήνα, 2012), M7.4, M10.1, M.10.3-10.8, T1.2, T1.5.
3. H. D. Young, R. A. Freedman, *Πανεπιστημιακή Φυσική με Σύγχρονη Φυσική*, Τόμος Α: *Μηχανική – Κύματα – Θερμοδυναμική* (Αθήνα, <sup>4</sup>2022), 6.3, 9.1, 9.3-9.6, 10.1, 14.2-14.4.
4. C. Kittel et al., *Μηχανική (Μαθήματα Φυσικής Berkeley, Τόμος 1)* (Αθήνα, <sup>2</sup>1998), Κεφ. 8.
5. ΕΜΠ, Τομέας Φυσικής, ΣΕΜΦΕ, *Εργαστηριακές Ασκήσεις Φυσικής*, Τόμος Ι (Αθήνα, <sup>2</sup>2010), σ. 223-233.

## 16.5. Εκτέλεση

### 16.5.1. Μέτρηση της σταθεράς του ελατηρίου

1. Εισαγάγετε στην υποδοχή του στροφικού ταλαντωτή τη λεπτή ράβδο και σφίξτε τη βίδα που βρίσκεται στο πλευρό της υποδοχής. Βεβαιωθείτε ότι μπορείτε να περιστρέψετε τη ράβδο κατά 360 μοίρες (στη βάση της υποδοχής υπάρχουν χαραγές ανά 45 μοίρες).
2. Πάρτε το δυναμόμετρο και, με προσοχή, περάστε τη θηλιά του στην εγκοπή της ράβδου. Το δυναμόμετρο και η ράβδος πρέπει σε κάθε μέτρηση να σχηματίζουν ορθή γωνία, όπως φαίνεται στο Σχ. 16.2.
3. Τραβήξτε το δυναμόμετρο κάθετα προς τη ράβδο, έως ότου η ράβδος περιστραφεί κατά γωνία,  $\varphi$ , ίση με 45 μοίρες. Σημειώστε την ένδειξη του δυναμομέτρου (σε Newton, N).
4. Επαναλάβετε το βήμα 3 για τις γωνίες 90, 135, 180, 225, 270, 315 και 360 μοίρες, και καταχωρήστε τις μετρήσεις σας στις δύο πρώτες στήλες του Πίνακα II.

Πίνακας II

$\varphi$ (μοίρες)	$F$ (N)	$\varphi$ (rad)

5. Μετρήστε με τον χάρακα την απόσταση  $L$  μεταξύ της εγκοπής και του άξονα περιστροφής, και εκτιμήστε το σφάλμα της.

### 16.5.2. Μέτρηση των περιόδων των στροφικών ταλαντώσεων

1. Αφαιρέστε τη ράβδο από την υποδοχή και στη θέση της τοποθετήστε τον δίσκο. Σφίξτε τη βίδα που βρίσκεται στο πλευρό της υποδοχής.
2. Στρέψτε τον δίσκο κατά περίπου 45 μοίρες και αφήστε τον να εκτελέσει στροφικές ταλαντώσεις. Μετρήστε τον συνολικό χρόνο για έναν αριθμό,  $N$ , ταλαντώσεων, 6 φορές διαδοχικά.
3. Επαναλάβετε τη διαδικασία αυτή για τον συμπαγή κύλινδρο, τον κυλινδρικό σωλήνα και τη σφαίρα, συμπληρώνοντας τον Πίνακα III. **Προσοχή:** δεν είναι απαραίτητο ο αριθμός,  $N$ , των ταλαντώσεων να είναι ίδιος για κάθε σώμα.
4. Σημειώστε τις μάζες και τις διαστάσεις αυτών των σωμάτων.

Πίνακας III

Α/Α Μέτρησης	Δίσκος	Συμπαγής κύλινδρος	Κυλινδρικός σωλήνας	Σφαίρα
	Χρόνος για $N$ πλήρεις ταλαντώσεις, $T_N$ (s)			
1				
2				
3				
4				
5				
6				
Μέση τιμή	$\overline{T}_N = \dots\dots$ s $\overline{T} = \dots\dots$ s	$\overline{T}_N = \dots\dots$ s $\overline{T} = \dots\dots$ s	$\overline{T}_N = \dots\dots$ s $\overline{T} = \dots\dots$ s	$\overline{T}_N = \dots\dots$ s $\overline{T} = \dots\dots$ s

## 16.6. Επεξεργασία των μετρήσεων

### 16.6.1. Έλεγχος της γραμμικότητας και βαθμονόμηση του ελατηρίου

1. Αφού συμπληρώσετε τον Πίνακα II, σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της δύναμης επαναφοράς  $F$  ως συνάρτηση της γωνίας περιστροφής  $\varphi$  του ελατηρίου (σε ακτίνια, rad).
2. Διαπιστώστε αν η σχέση  $F = f(\varphi)$  είναι της μορφής  $y = bx$ , όπως αναμένεται από την Εξ. (16.8), και υπολογίστε την κλίση της ευθείας,  $b \pm \delta b$ .
3. Υπολογίστε τη σταθερά στρέψης,  $D \pm \delta D$ , δεδομένου ότι, από την Εξ. (16.8),  $b = D/L$ .

### 16.6.2. Υπολογισμός της ροπής αδράνειας των σωμάτων

1. Από τις μέσες τιμές της περιόδου  $\overline{T} = \overline{T}_N/N$ , που προκύπτουν από τον Πίνακα III, την τιμή  $D$  που υπολογίστηκε και την Εξ. (16.16), υπολογίστε την πειραματική τιμή της ροπής

αδράνειας,  $I_{\pi}$ , του δίσκου, του συμπαγούς κυλίνδρου, του κυλινδρικού σωλήνα και της σφαίρας, καθώς και τα αντίστοιχα σφάλματα  $\delta I_{\pi}$ , και συμπληρώστε την πρώτη γραμμή του Πίνακα IV.

2. Από τις σχέσεις που δίνονται στον Πίνακα I, υπολογίστε τις θεωρητικές τιμές των ροπών αδράνειας,  $I_{\theta}$ , των σωμάτων αυτών, με βάση τις μάζες και τις διαστάσεις τους, και συμπληρώστε τη δεύτερη γραμμή του Πίνακα IV.

3. Υπολογίστε τις διαφορές  $\Delta I$  ανάμεσα στις πειραματικές και τις θεωρητικές τιμές της ροπής αδράνειας για τις διάφορες περιπτώσεις και συμπληρώστε την τρίτη γραμμή του Πίνακα IV. Οι διαφορές αυτές είναι μικρότερες από τα πειραματικά σφάλματα που υπολογίστηκαν; Είναι εν τέλει σημαντικές; Αν ναι, σε τι κατά τη γνώμη σας μπορεί να οφείλονται;

**Πίνακας IV**

	Δίσκος	Συμπαγής κύλινδρος	Κυλινδρικός σωλήνας	Σφαίρα
$I_{\pi} \pm \delta I_{\pi}$ ( $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ )				
$I_{\theta}$ ( $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ )				
$\Delta I$ ( $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ )				