Θεωρία Μέτρου

Υποδείξεις για τις Ασκήσεις

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα, 2022

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

σ-άλγεβρες

Ομάδα Α΄.

1.1. Έστω X ένα μη κενό σύνολο, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ μια άλγεβρα (αντίστοιχα σ-άλγεβρα) στο X και $C \subseteq X$. Να δείξετε ότι η οικογένεια

$$\mathcal{A}_C = \{A \cap C : A \in \mathcal{A}\}$$

είναι επίσης άλγεβρα (αντίστοιχα σ-άλγεβρα) στο C.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα. Για να δείξουμε ότι η $\mathcal{A}_C$ είναι σ-άλγεβρα στο C αποδεικνύουμε τα εξής:

(α) $C \in \mathcal{A}_C$: Έχουμε $X \in \mathcal{A}$ και $C = X \cap C$, άρα $C \in \mathcal{A}_C$.

(β) Έστω $B \in \mathcal{A}_C$. Τότε, $B = A \cap C$ για κάποιο $A \in \mathcal{A}$. Το συμπλήρωμα του B στο C είναι το $C \setminus B = C \setminus (A \cap C) = (X \setminus A) \cap C \in \mathcal{A}_C$, διότι $X \setminus A \in \mathcal{A}$.

(γ) Έστω $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία στην $\mathcal{A}_C$. Τότε, υπάρχουν $A_n \in \mathcal{A}$ ώστε $B_n = A_n \cap C$, $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ και $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap C) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap C$, άρα $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}_C$.

Για την περίπτωση που η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα δουλεύουμε με τον ίδιο τρόπο (απλώς, η ένωση που θεωρούμε είναι πεπερασμένη).

1.2. Έστω X, Y δύο μη κενά σύνολα, $f : X \to Y$ και $\mathcal{B}$ μια άλγεβρα (αντίστ. σ-άλγεβρα) στο Y. Να δείξετε ότι η οικογένεια

$$f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$$

είναι επίσης άλγεβρα (αντίστ. σ-άλγεβρα) στο X.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι η $\mathcal{B}$ είναι σ-άλγεβρα και θα δείξουμε ότι η $f^{-1}(\mathcal{B})$ είναι σ-άλγεβρα:

(α) Έχουμε $Y \in \mathcal{B}$, συνεπώς $X = f^{-1}(Y) \in f^{-1}(\mathcal{B})$.

(β) Έστω $A \in f^{-1}(\mathcal{B})$. Υπάρχει $B \in \mathcal{B}$ ώστε $A = f^{-1}(B)$. Τότε, $Y \setminus B \in \mathcal{B}$ και $X \setminus A = f^{-1}(Y \setminus B)$, συνεπώς $X \setminus A \in f^{-1}(\mathcal{B})$.

(γ) Έστω $A_n \in f^{-1}(\mathcal{B})$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $B_n \in \mathcal{B}$ ώστε $A_n = f^{-1}(B_n)$. Αφού η $\mathcal{B}$ είναι σ-άλγεβρα, έχουμε $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{B}$. Όμως, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)$, συνεπώς $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in f^{-1}(\mathcal{B})$.

Για την περίπτωση που η $\mathcal{B}$ είναι άλγεβρα δουλεύουμε με τον ίδιο τρόπο (απλώς, η ένωση που θεωρούμε είναι πεπερασμένη).

1.3. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και
$$C = \{\{x\} : x \in X\}.$$
Να περιγράψετε την $\sigma(C)$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε την οικογένεια συνόλων
$$\mathcal{A} = \{A \subseteq X : A \text{ αριθμήσιμο ή } A^c \text{ αριθμήσιμο}\}.$$

Θα δείξουμε ότι $\sigma(C) = \mathcal{A}$. Αρχικά αποδεικνύουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα:

(α) Έχουμε $X \in \mathcal{A}$ διότι το $X^c = \emptyset$ είναι αριθμήσιμο.

(β) Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε είτε το A είναι αριθμήσιμο οπότε το A^c έχει αριθμήσιμο συμπλήρωμα είτε το A^c είναι αριθμήσιμο. Σε κάθε περίπτωση, $A^c \in \mathcal{A}$.

(γ) Έστω (A_n) ακολουθία στην $\mathcal{A}$. Αν όλα τα A_n είναι αριθμήσιμα τότε το $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι κι αυτό αριθμήσιμο, άρα ανήκει στην $\mathcal{A}$. Αν υπάρχει κάποιο A_m που δεν είναι αριθμήσιμο, τότε το A_m^c είναι αριθμήσιμο, άρα το
$$\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c \subseteq A_m^c$$
είναι αριθμήσιμο. Άρα, πάλι, το $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ανήκει στην $\mathcal{A}$.

Παρατηρούμε τώρα ότι κάθε αριθμήσιμο $A \subseteq X$ γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση μονοσυνόλων, των $\{x\}$ όπου $x \in A$, άρα ανήκει στην $\sigma(C)$. Αφού η $\sigma(C)$ είναι σ-άλγεβρα, περιέχει και τα συμπληρώματα των αριθμήσιμων συνόλων. Αυτό δείχνει ότι $\mathcal{A} \subseteq \sigma(C)$.

Αντίστροφα, κάθε μονοσύνολο $\{x\}$, όπου $x \in X$, είναι αριθμήσιμο σύνολο, άρα ανήκει στην $\mathcal{A}$. Συνεπώς, $C \subseteq \mathcal{A}$ και έπεται ότι $\sigma(C) \subseteq \mathcal{A}$.

1.4. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και (A_n) μια ακολουθία υποσυνόλων του X. Ορίζουμε τα σύνολα
$$\limsup_n A_n = \{x \in X : \text{ το } x \text{ ανήκει σε άπειρα από τα } A_n\}$$
και
$$\liminf_n A_n = \{x \in X : \text{ το } x \text{ ανήκει σε όλα τελικά τα } A_n\}.$$

(α) Να δείξετε ότι
$$\limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{και} \quad \liminf_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

(β) Αν η (A_n) είναι αύξουσα, τότε
$$\limsup_n A_n = \liminf_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$
ενώ αν είναι φθίνουσα
$$\limsup_n A_n = \liminf_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ αν και μόνο αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $x \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, δηλαδή αν και μόνο αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $k \geqslant n$ ώστε $x \in A_k$. Εξηγήστε γιατί η τελευταία πρόταση ισχύει αν και μόνο αν $x \in A_k$ για άπειρες τιμές του k.

Ανάλογα, παρατηρήστε ότι $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ αν και μόνο υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$, δηλαδή αν και μόνο αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $k \geqslant n$ να ισχύει $x \in A_k$, δηλαδή αν και μόνο αν το x ανήκει σε τελικά όλα τα A_k.

(β) Αρχικά παρατηρούμε ότι $\liminf_n A_n \subseteq \limsup_n A_n$ (αυτό είναι άμεσο, για παράδειγμα, άπό τον ορισμό). Θέτουμε $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ και $C_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$. Παρατηρήστε ότι η (B_n) είναι φθίνουσα και η (C_n) αύξουσα. Επίσης, $C_n \subseteq A_n \subseteq B_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Έστω ότι η (A_n) είναι αύξουσα. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = A_n$, άρα

$$\liminf_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = B_1 \supseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \limsup_n A_n \supseteq \liminf_n A_n,$$

άρα έχουμε παντού ισότητα.

Έστω ότι η (A_n) είναι φθίνουσα. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $B_n = A_n$, άρα

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = C_1 \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \liminf_n A_n \subseteq \limsup_n A_n,$$

άρα έχουμε παντού ισότητα.

Ομάδα Β΄.

1.5. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X. Αποδείξτε ότι υπάρχει η μικρότερη άλγεβρα που περιέχει την $\mathcal{F}$. Αυτή λέγεται η *άλγεβρα που παράγει η* $\mathcal{F}$ και συμβολίζεται με $\mathcal{A}(\mathcal{F})$.

Υπόδειξη. Αρχικά, παρατηρούμε ότι αν $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ είναι μια μη κενή οικογένεια από άλγεβρες του X, τότε και η $\bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ είναι μια άλγεβρα στο X. Θεωρούμε τώρα την οικογένεια αλγεβρών

$$C = \{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X) : \mathcal{A} \text{ αλγεβρα και } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}\}.$$

Έχουμε $C \neq \emptyset$ διότι $\mathcal{P}(X) \in C$, και η οικογένεια υποσυνόλων του X

$$\mathcal{A} = \bigcap C = \bigcap \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \in C\}$$

είναι μια άλγεβρα στο X. Εύκολα βλέπουμε τώρα ότι $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ και ότι η $\mathcal{A}$ είναι η ελάχιστη άλγεβρα με αυτή την ιδιότητα.

1.6. Θεωρούμε την οικογένεια

$$\overline{\mathcal{I}} = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Να δείξετε ότι $\sigma(\overline{\mathcal{I}}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Υπόδειξη. Κάθε κλειστό διάστημα $[a, b]$ ανήκει στην Borel σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, δηλαδή $\overline{\mathcal{I}} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Έπεται ότι $\sigma(\overline{\mathcal{I}}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό παρατηρούμε ότι κάθε φραγμένο ανοικτό διάστημα (a, b) γράφεται στη μορφή

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big[a + \frac{b-a}{3n}, b - \frac{b-a}{3n}\Big],$$

άρα $(a, b) \in \sigma(\overline{\mathcal{I}})$. Κάθε μη κενό ανοικτό σύνολο $G \subseteq \mathbb{R}$ γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση φραγμένων ανοικτών διαστημάτων, άρα $G \in \sigma(\overline{\mathcal{I}})$. Αφού η $\sigma(\overline{\mathcal{I}})$ είναι σ-άλγεβρα και περιέχει όλα τα ανοικτά $G \subseteq \mathbb{R}$ έπεται ότι $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \sigma(\overline{\mathcal{I}})$.

1.7. Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{I}_{\mathbb{Q}} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Να δείξετε ότι $\sigma(\mathcal{I}_{\mathbb{Q}}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Υπόδειξη. Κάθε ανοικτό διάστημα (a, b) με άκρα ρητούς αριθμούς ανήκει στην Borel σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, δηλαδή $\mathcal{I}_{\mathbb{Q}} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Έπεται ότι $\sigma(\mathcal{I}_{\mathbb{Q}}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό παρατηρούμε ότι κάθε φραγμένο ανοικτό διάστημα (x, y) με άκρα πραγματικούς αριθμούς γράφεται στη μορφή

$$(x, y) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n),$$

όπου (a_n, b_n) διαστήματα με ρητά άκρα (θεωρήστε ρητούς $a_n < b_n$ στο (x, y) με την (a_n) να φθίνει γνήσια προς το x και την (b_n) να αυξάνει γνήσια προς το y) άρα $(x, y) \in \sigma(\mathcal{I}_{\mathbb{Q}})$. Κάθε μη κενό ανοικτό σύνολο $G \subseteq \mathbb{R}$ γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση φραγμένων ανοικτών διαστημάτων, άρα $G \in \sigma(\mathcal{I}_{\mathbb{Q}})$. Αφού η $\sigma(\mathcal{I}_{\mathbb{Q}})$ είναι σ-άλγεβρα και περιέχει όλα τα ανοικτά $G \subseteq \mathbb{R}$ έπεται ότι $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \sigma(\mathcal{I}_{\mathbb{Q}})$.

1.8. Έστω $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ ένα αριθμήσιμο σύνολο. Περιγράψτε όλες τις σ-άλγεβρες στο X.

Υπόδειξη. Έστω $\mathcal{A}$ μια σ-άλγεβρα στο X. Θεωρούμε τη σχέση

$$x \sim y \iff \text{για κάθε } A \in \mathcal{A} \text{ ισχύει ότι } x \in A \text{ αν και μόνο αν } y \in A.$$

Μπορούμε να ελέγξουμε ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο X, άρα οι κλάσεις ισοδυναμίας της $\sim$ ορίζουν διαμέριση του X.

Δείχνουμε ότι κάθε κλάση ισοδυναμίας της $\sim$ ανήκει στην $\mathcal{A}$. Πράγματι, θεωρούμε $x \in X$ και την κλάση ισοδυναμίας του, C. Από τον ορισμό της $\sim$, για κάθε $y \in X \setminus C$ υπάρχει $A_y \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $x \in A_y$ και $y \notin A_y$ (εξηγήστε γιατί). Πάλι από τον ορισμό της $\sim$ έχουμε $C \subseteq A_y$ και $y \notin A_y$. Το $X \setminus C$ είναι αριθμήσιμο, άρα $\bigcap_{y \in X \setminus C} A_y \in \mathcal{A}$. Όμως, $C \subseteq \bigcap_{y \in X \setminus C} A_y$ και για κάθε $z \in X \setminus C$ έχουμε $z \notin \bigcap_{y \in X \setminus C} A_y$. Έπεται ότι

$$C = \bigcap_{y \in X \setminus C} A_y \in \mathcal{A}.$$

Το πλήθος των κλάσεων ισοδυναμίας της $\sim$ είναι πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο. Για κάθε $A \in \mathcal{A}$ έχουμε ότι $C_x \subseteq A$ για κάθε $x \in A$, όπου C_x είναι η κλάση ισοδυναμίας στην οποία ανήκει το x. Δηλαδή, $A = \bigcup_{x \in A} C_x$. Με άλλα λόγια, τα $A \in \mathcal{A}$ είναι οι (πεπερασμένες ή άπειρες αριθμήσιμες) ενώσεις κλάσεων ισοδυναμίας της $\sim$.

1.9. Έστω $(X,d),(Y,\sigma)$ μετρικοί χώροι και μια συνάρτηση $f:X\to Y$. Να δείξετε ότι το σύνολο

$$A=\{x\in X:\ \text{η } f \text{ είναι συνεχής στο } x\}$$

είναι Borel υποσύνολο του X.

Υπόδειξη. Για κάθε $m\in\mathbb{N}$ ορίζουμε

$$A_m=\Big\{x\in X:\ \text{υπάρχει } \delta>0 \text{ ώστε για κάθε } y,z\in B(x,\delta),\ \sigma(f(y),f(z))<\frac{1}{m}\Big\}.$$

Παρατηρούμε ότι $A=\bigcap_{m=1}^{\infty}A_m$. Έστω $x\in A$ και έστω $m\in\mathbb{N}$. Αφού η f είναι συνεχής στο x, υπάρχει $\delta>0$ ώστε, για κάθε $y\in B(x,\delta)$ ισχύει $\sigma(f(y),f(x))<\frac{1}{2m}$. Τότε, για κάθε $y,z\in B(x,\delta)$ έχουμε

$$\sigma(f(y),f(z))\leqslant\sigma(f(y),f(x))+\sigma(f(x),f(z))<\frac{1}{2m}+\frac{1}{2m}=\frac{1}{m},$$

άρα $x\in A_m$. Αφού το m ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $A\subseteq\bigcap_{m=1}^{\infty}A_m$. Αντίστροφα, αν $x\in\bigcap_{m=1}^{\infty}A_m$ μπορούμε να δείξουμε ότι $x\in A$: έστω $\varepsilon>0$. Βρίσκουμε $m\in\mathbb{N}$ με $\frac{1}{m}<\varepsilon$, και αφού $x\in A_m$ μπορούμε να βρούμε $\delta>0$ με την εξής ιδιότητα: αν $y,z\in B(x,\delta)$ τότε $\sigma(f(y),f(z))<\frac{1}{m}$. Ειδικότερα, για κάθε $y\in B(x,\delta)$, θέτοντας $z=x$, παίρνουμε

$$\sigma(f(y),f(x))<\frac{1}{m}<\varepsilon.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η f είναι συνεχής στο x, δηλαδή $x\in A$. Έτσι, $\bigcap_{m=1}^{\infty}A_m\subseteq A$.

Επίσης, κάθε A_m είναι ανοικτό σύνολο. Έστω $x\in A_m$. Μπορούμε να βρούμε $\delta>0$ με την εξής ιδιότητα: αν $y,z\in B(x,\delta)$ τότε $\sigma(f(y),f(z))<\frac{1}{m}$. Θα δείξουμε ότι $B(x,\delta)\subseteq A_m$, δηλαδή το x είναι εσωτερικό σημείο του A_m. Έστω $u\in B(x,\delta)$. Υπάρχει $\delta_1>0$ ώστε $B(u,\delta_1)\subseteq B(x,\delta)$. Τότε, αν $y,z\in B(u,\delta_1)$ έχουμε $y,z\in B(x,\delta)$, άρα $\sigma(f(y),f(z))<\frac{1}{m}$. Συνεπώς, $u\in A_m$.

Αφού κάθε A_m είναι ανοικτό σύνολο και $A=\bigcap_{m=1}^{\infty}A_m$, έπεται ότι το A είναι G_δ–σύνολο.

1.10. Έστω X μετρικός χώρος και μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n:X\to\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι το σύνολο

$$B=\{x\in X:\ \text{υπάρχει το } \lim_{n\to\infty}f_n(x)\}$$

είναι Borel υποσύνολο του X.

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι, για κάθε $x\in X$, το $\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ υπάρχει αν και μόνο αν η ακολουθία $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία Cauchy. Έτσι, μπορείτε να γράψετε το B στη μορφή

$$B=\bigcap_{m=1}^{\infty}\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}\Big(\bigcap_{r,s=k}^{\infty}\Big\{x\in X:\ |f_r(x)-f_s(x)|\leqslant\frac{1}{m}\Big\}\Big)\Big).$$

Από τη συνέχεια των f_n, για κάθε k και m, το σύνολο

$$\bigcap_{r,s=k}^{\infty}\Big\{x\in X:\ |f_r(x)-f_s(x)|\leqslant\frac{1}{m}\Big\}$$

είναι κλειστό σύνολο (ως τομή κλειστών συνόλων). Άρα, για κάθε $m \in \mathbb{N}$, το σύνολο

$$B_m = \bigcup_{k=1}^{\infty}\Big(\bigcap_{r,s=k}^{\infty}\Big\{x \in X : \ |f_r(x) - f_s(x)| \leqslant \frac{1}{m}\Big\}\Big)$$

είναι F_σ–σύνολο. Έπεται ότι το $B = \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m$ είναι $F_{\sigma\delta}$–σύνολο.

1.11. Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Μια μη κενή οικογένεια $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ λέγεται *δακτύλιος* αν είναι κλειστή ως προς τις πεπερασμένες ενώσεις και τις διαφορές. Αν επιπλέον η $\mathcal{R}$ είναι κλειστή ως προς τις αριθμήσιμες ενώσεις, θα λέγεται σ-δακτύλιος. Αποδείξτε τα ακόλουθα:

(α) Οι δακτύλιοι (αντίστ. οι σ-δακτύλιοι) είναι κλειστοί ως προς πεπερασμένες (αντίστ. αριθμήσιμες) τομές.

(β) Ένας δακτύλιος (αντίστ. σ-δακτύλιος) $\mathcal{R}$ είναι άλγεβρα (αντίστ. σ-άλγεβρα) αν και μόνο αν $X \in \mathcal{R}$.

(γ) Αν ο $\mathcal{R}$ είναι σ-δακτύλιος, τότε το $\{E \subseteq X : E \in \mathcal{R} \text{ ή } E^c \in \mathcal{R}\}$ είναι σ-άλγεβρα.

(δ) Αν ο $\mathcal{R}$ είναι σ-δακτύλιος, τότε το $\{E \subseteq X : E \cap F \in \mathcal{R} \text{ για κάθε } F \in \mathcal{R}\}$ είναι σ-άλγεβρα.

Υπόδειξη. (α) Υποθέτουμε πρώτα ότι ο $\mathcal{R}$ είναι δακτύλιος. Έστω $A, B \in \mathcal{R}$. Τότε, $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{R}$. Επαγωγικά βλέπουμε ότι αν $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{R}$ τότε $A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \mathcal{R}$. Αν υποθέσουμε ότι ο $\mathcal{R}$ είναι σ-δακτύλιος και αν $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία στον $\mathcal{R}$, τότε

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_1 \setminus A_n) \in \mathcal{R},$$

δηλαδή ο $\mathcal{R}$ είναι κλειστός ως προς αριθμήσιμες τομές.

(β) Αν ο $\mathcal{R}$ είναι άλγεβρα ή σ-άλγεβρα τότε από τον ορισμό έχουμε $X \in \mathcal{R}$. Έστω $\mathcal{R}$ δακτύλιος ή σ-δακτύλιος με $X \in \mathcal{R}$. Αφού ο $\mathcal{R}$ είναι κλειστός ως προς συνολοθεωρητικές διαφορές, για κάθε $A \in \mathcal{R}$ έχουμε $A^c = X \setminus A \in \mathcal{R}$, δηλαδή ο $\mathcal{R}$ είναι κλειστός ως προς συμπληρώματα. Έπεται τώρα ότι είναι άλγεβρα (αντίστοιχα σ-άλγεβρα) αφού είναι κλειστός ως προς πεπερασμένες (αντίστοιχα αριθμήσιμες) ενώσεις.

(γ) Ορίζουμε $\mathcal{B} = \{E \subseteq X : E \in \mathcal{R} \text{ ή } E^c \in \mathcal{R}\}$. Από τον ορισμό είναι φανερό ότι $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{B}$, άρα $\mathcal{B} \neq \emptyset$, και ότι η $\mathcal{B}$ είναι κλειστή ως προς συμπληρώματα. Για να δείξουμε ότι η $\mathcal{B}$ είναι σ-άλγεβρα, αρκεί να δείξουμε ότι είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες τομές. Έστω $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία στην $\mathcal{B}$. Θέτουμε $I = \{n : E_n \in \mathcal{R}\}$ και $J = \{n : E_n \notin \mathcal{R}\}$. Παρατηρήστε ότι $I \cap J = \emptyset$ και $\mathbb{N} = I \cup J$. Έχουμε $\bigcap_{n\in I} E_n \in \mathcal{R}$ και για κάθε $n \in J$ έχουμε $E_n^c \in \mathcal{R}$, άρα $\bigcup_{n\in J} E_n^c \in \mathcal{R}$, άρα

$$\bigcap_{n\in J} E_n = X \setminus \Big(\bigcup_{n\in J} E_n^c\Big) \in \mathcal{R}.$$

Συνεπώς,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \Big(\bigcap_{n\in I} E_n\Big) \cap \Big(\bigcap_{n\in J} E_n\Big) \in \mathcal{R} \subseteq \mathcal{B}.$$

(δ) Ορίζουμε $\mathcal{C} = \{E \subseteq X : E \cap F \in \mathcal{R} \text{ για κάθε } F \in \mathcal{R}\}$. Από τον ορισμό είναι φανερό ότι $X \in \mathcal{C}$. Αν $E \in \mathcal{C}$ τότε για κάθε $F \in \mathcal{R}$ έχουμε $E \cap F \in \mathcal{R}$, άρα για κάθε $F \in \mathcal{R}$ έχουμε $E^c \cap F = F \setminus E = F \setminus (E \cap F) \in \mathcal{R}$, το οποίο δείχνει ότι $E^c \in \mathcal{C}$. Άρα, η $\mathcal{C}$ είναι κλειστή ως προς συμπληρώματα. Για να δείξουμε ότι η $\mathcal{C}$ είναι σ-άλγεβρα, αρκεί να δείξουμε ότι είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες ενώσεις. Έστω $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία στην $\mathcal{C}$. Για κάθε $F \in \mathcal{R}$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $E_n \cap F \in \mathcal{R}$, άρα

$$\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) \cap F = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \cap F) \in \mathcal{R}.$$

Συνεπώς, $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{C}$.

1.12. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Να δείξετε ότι για κάθε $A \in \sigma(\mathcal{F})$ υπάρχει αριθμήσιμη οικογένεια συνόλων $\mathcal{C}_A \subseteq \mathcal{F}$ ώστε $A \in \sigma(\mathcal{C}_A)$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq X \mid \text{ υπάρχει αριθμήσιμη υποοικογένεια } \mathcal{C}_A \text{ της } \mathcal{F} \text{ ώστε } A \in \sigma(\mathcal{C}_A)\}.$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ–άλγεβρα:

(α) Η $\mathcal{A}$ είναι μη κενή και μάλιστα περιέχει την $\mathcal{F}$: αν $E \in \mathcal{F}$ τότε $E \in \sigma(\mathcal{C}_E)$ όπου $\mathcal{C}_E = \{E\} \subseteq \mathcal{F}$. Άρα, $E \in \mathcal{A}$.

(β) Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε υπάρχει αριθμήσιμη $\mathcal{C}_A \subseteq \mathcal{F}$ ώστε $A \in \sigma(\mathcal{C}_A)$. Έπεται ότι $A^c \in \sigma(\mathcal{C}_A)$. Άρα, $A \in \mathcal{A}$ (πάρτε $\mathcal{C}_{A^c} = \mathcal{C}_A$).

(γ) Έστω $A_n \in \mathcal{A}$. Υπάρχουν αριθμήσιμες $\mathcal{C}_{A_n} \subseteq \mathcal{F}$ ώστε $A_n \in \sigma(\mathcal{C}_{A_n})$. Η οικογένεια $\mathcal{C}_{\cup A_n} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_{A_n} \subseteq \mathcal{F}$ είναι αριθμήσιμη και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$A_n \in \sigma(\mathcal{C}_{A_n}) \subseteq \sigma(\mathcal{C}_{\cup A_n}).$$

Άρα,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \sigma(\mathcal{C}_{\cup A_n}).$$

Αφού η σ–άλγεβρα $\mathcal{A}$ περιέχει την $\mathcal{F}$, συμπεραίνουμε ότι $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{A}$. Δηλαδή, για κάθε $A \in \sigma(\mathcal{F})$ υπάρχει αριθμήσιμη $\mathcal{C}_A \subseteq \mathcal{F}$ ώστε $A \in \sigma(\mathcal{C}_A)$.

1.13. Αν X είναι ένα μη κενό σύνολο, μια σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ στο X λέγεται *αριθμήσιμα παραγόμενη* αν υπάρχει αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{C}$ ώστε $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$. Αποδείξτε ότι η $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη. Επιπλέον, αποδείξτε το ίδιο για την $\mathcal{B}(X)$, όπου (X, d) τυχών διαχωρίσιμος μετρικός χώρος.

Υπόδειξη. Θεωρούμε αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο D του X και την αριθμήσιμη οικογένεια

$$\mathcal{C} = \left\{B\left(x, \tfrac{1}{n}\right) : x \in D, n \in \mathbb{N}\right\}$$

από ανοικτές μπάλες του X. Έχουμε $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}(X)$, άρα $\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Αντίστροφα, από την Πραγματική Ανάλυση είναι γνωστό ότι κάθε ανοικτό σύνολο $G \subseteq X$ γράφεται ως (αριθμήσιμη) ένωση συνόλων από την $\mathcal{C}$, άρα $\mathcal{B}(X) \subseteq \sigma(\mathcal{C})$. Τελικά, $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{C})$ και η $\mathcal{C}$ είναι αριθμήσιμη, άρα η $\mathcal{B}(X)$ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη.

Τα παραπάνω ισχύουν για την $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ αφού το $\mathbb{Q}$ είναι ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Ομάδα Γ΄.

1.14. Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Μια οικογένεια $\mathcal{M}$ υποσυνόλων του X λέγεται *μονότονη κλάση* στο X αν ικανοποιεί τα εξής:

(i) Είναι κλειστή ως προς αύξουσες ενώσεις, δηλαδή αν (A_n) είναι μια αύξουσα ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{M}$, τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

(ii) Είναι κλειστή ως προς φθίνουσες τομές, δηλαδή αν (A_n) είναι μια φθίνουσα ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{M}$, τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

Αν Δ είναι μια οικογένεια υποσυνόλων του X, συμβολίζουμε με $m(\Delta)$ τη μικρότερη μονότονη κλάση που περιέχει την Δ (λέμε ότι η $m(\Delta)$ *παράγεται* από την Δ). Να αποδείξετε τα εξής:

(α) Κάθε κλάση Dynkin είναι μονότονη κλάση.

(β) Αν Δ είναι μια οικογένεια υποσυνόλων του X, τότε $m(\Delta) \subseteq \delta(\Delta)$.

(γ) Υπάρχει μονότονη κλάση που δεν είναι κλάση Dynkin.

(δ) Αν Δ είναι μια άλγεβρα στο X, τότε

$$m(\Delta) = \sigma(\Delta).$$

Υπόδειξη. (α) Έστω $\mathcal{D}$ μια κλάση Dynkin. Από τον ορισμό της κλάσης Dynkin, η $\mathcal{D}$ είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες αύξουσες ενώσεις, αρκεί λοιπόν να ελέγξουμε ότι είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες φθίνουσες τομές. Έστω (A_n) φθίνουσα ακολουθία συνόλων στην $\mathcal{D}$. Η $\mathcal{D}$ είναι κλειστή ως προς συμπληρώματα, άρα η αύξουσα ακολουθία $(X \setminus A_n)$ περιέχεται στην $\mathcal{D}$. Έπεται ότι $\bigcup_{n=1}^{\infty}(X \setminus A_n) \in \mathcal{D}$, δηλαδή $X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$. Αφού η $\mathcal{D}$ είναι κλειστή ως προς συμπληρώματα, έχουμε τελικά ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$.

(β) Η $\delta(\Delta)$ είναι κλάση Dynkin, άρα είναι μονότονη κλάση από το (α). Αφού $\Delta \subseteq \delta(\Delta)$, από τον ορισμό της $m(\Delta)$ παίρνουμε αμέσως ότι $m(\Delta) \subseteq \delta(\Delta)$.

(γ) Έστω $X = \mathbb{N}$ και $\mathcal{M} = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$. Η $\mathcal{M}$ είναι μονότονη κλάση αλλά δεν είναι κλάση Dynkin, διότι το $\{1, 2\} \setminus \{1\} = \{2\} \notin \mathcal{M}$.

(δ) Αφού η Δ είναι άλγεβρα, γνωρίζουμε ότι $\delta(\Delta) = \sigma(\Delta)$. Από το (β) έπεται ότι $m(\Delta) \subseteq \sigma(\Delta)$. Μένει να δείξουμε ότι $\sigma(\Delta) \subseteq m(\Delta)$, και αφού $\Delta \subseteq m(\Delta)$ αρκεί να δείξουμε ότι η $m(\Delta)$ είναι σ-άλγεβρα, και αφού η $m(\Delta)$ είναι κλειστή ως προς αύξουσες αριθμήσιμες ενώσεις αρκεί να δείξουμε ότι η $m(\Delta)$ είναι άλγεβρα:

1. Έχουμε $X \in \Delta \subseteq m(\Delta)$.

2. Δείχνουμε ότι η οικογένεια $\mathcal{C} = \{A \subseteq X : A^c \in m(\Delta)\}$ είναι μονότονη κλάση (εξηγήστε τις λεπτομέρειες). Αφού η Δ είναι άλγεβρα, έχουμε $\Delta \subseteq \mathcal{C}$. Έπεται ότι $m(\Delta) \subseteq \mathcal{C}$, δηλαδή για κάθε $A \in m(\Delta)$ ισχύει ότι $A^c \in m(\Delta)$. Άρα, η $m(\Delta)$ είναι κλειστή ως προς συμπληρώματα.

3. Δείχνουμε ότι η οικογένεια $\mathcal{D} = \{A \subseteq X : A \cap B \in m(\Delta)$ για κάθε $B \in m(\Delta)\}$ είναι μονότονη κλάση και ότι $\Delta \subseteq \mathcal{D}$ (για τον δεύτερο εγκλεισμό σταθεροποιούμε $A \in \Delta$ και δείχνουμε ότι η $\mathcal{C}_A = \{B \subseteq X : A \cap B \in m(\Delta)\}$ είναι μονότονη κλάση και περιέχει την Δ). Από τα παραπάνω έπεται ότι $m(\Delta) \subseteq \mathcal{D}$, δηλαδή για κάθε $A, B \in m(\Delta)$ ισχύει $A \cap B \in m(\Delta)$. Επαγωγικά, η $m(\Delta)$ είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες τομές.

1.15. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $\mathcal{F}$ μια μη κενή αριθμήσιμη οικογένεια υποσυνόλων του X. Να δειχθεί ότι και η $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ (βλ. Άσκηση 1.5) είναι αριθμήσιμη.

Υπόδειξη. Ορίζουμε $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$ και επαγωγικά, αν για κάποιον $n \in \mathbb{N}$ έχει οριστεί η $\mathcal{F}_n$, ορίζουμε $\mathcal{F}_{n+1}$ να είναι η οικογένεια όλων των πεπερασμένων ενώσεων και των συμπληρωμάτων στοιχείων της $\mathcal{F}_n$. Δηλαδή,

$$\mathcal{F}_{n+1} = \{A_1 \cup \cdots \cup A_n : n \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{F}_n\} \cup \{A^c : A \in \mathcal{F}_n\}.$$

Παρατηρήστε ότι $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$. Επαγωγικά αποδεικνύουμε ότι κάθε $\mathcal{F}_n$ είναι αριθμήσιμη οικογένεια συνόλων. Επαγωγικά αποδεικνύουμε επίσης ότι $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{F})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε τώρα την (επίσης αριθμήσιμη) οικογένεια

$$\mathcal{A} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n.$$

Από τα προηγούμενα έχουμε $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{F})$. Θα δείξουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα, οπότε $\mathcal{A}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{A}$ και έχουμε το ζητούμενο.

Αρχικά παρατηρούμε ότι υπάρχει $E \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$, άρα $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Επίσης, αν $A \in \mathcal{A}$ τότε υπάρχει $n \geqslant 0$ ώστε $A \in \mathcal{F}_n$ και τότε $A^c \in \mathcal{F}_{n+1} \subseteq \mathcal{A}$. Μένει να δείξουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες ενώσεις. Έστω $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$. Υπάρχουν $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$ ώστε $A_i \in \mathcal{F}_{k_i}$. Αν θέσουμε $m = \max\{k_1, \ldots, k_n\}$ τότε $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}_m$, άρα $A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{F}_{m+1} \subseteq \mathcal{A}$.

1.16. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $\mathcal{A}$ μια σ-άλγεβρα στο X με άπειρα στοιχεία. Να δείξετε ότι:

(α) Η $\mathcal{A}$ περιέχει μια άπειρη ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων.

(β) Η $\mathcal{A}$ είναι υπεραριθμήσιμη.

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε την μερική διάταξη $\subseteq$ στην $\mathcal{A}$ και θα δείξουμε ότι υπάρχει άπειρο ολικά διατεταγμένο υποσύνολο $\{E_i : i \in I\}$ στην $\mathcal{A}$. Πράγματι, αν αυτό δεν ισχύει τότε υπάρχει ένα μεγιστικό ολικά διατεταγμένο υποσύνολο $E_1 \subsetneq E_2 \subsetneq \cdots \subsetneq E_n$ της $\mathcal{A}$. Θεωρούμε την σ-άλγεβρα $\mathcal{B} = \sigma(\{E_1, \ldots, E_n\})$. Τότε, η $\mathcal{B}$ έχει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων (εξηγήστε γιατί) και αφού η $\mathcal{A}$ είναι άπειρη, υπάρχει $E \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$. Τότε, $E \subseteq E_n$ αλλιώς θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε το ολικά διατεταγμένο σύνολο $E_1 \subsetneq E_2 \subsetneq \cdots \subsetneq E_n \subsetneq E_n \cup E$ στην $\mathcal{A}$. Παρατηρούμε ότι

$$E = E \cap E_n = E \cap \Big(E_1 \cup \Big(\bigcup_{k=2}^{n} (E_k \setminus E_{k-1})\Big)\Big) = (E \cap E_1) \cup \Big(\bigcup_{k=2}^{n} (E \cap (E_k \setminus E_{k-1})\Big)\Big).$$

Αφού $E \notin \mathcal{B}$, τουλάχιστον ένα από τα $E \cap E_1$ και $E \cap (E_k \setminus E_{k-1})$, $2 \leqslant k \leqslant n$ δεν ανήκει στην $\mathcal{B}$:

1. Αν $E \cap E_1 \notin \mathcal{B}$ τότε $E \cap E_1 \subsetneq E_1$ και έχουμε άτοπο θεωρώντας το ολικά διατεταγμένο σύνολο $E \cap E_1 \subsetneq E_1 \subsetneq \cdots \subsetneq E_n$ στην $\mathcal{A}$.

2. Έστω ότι υπάρχει $k \geqslant 2$ τέτοιος ώστε $E \cap (E_k \setminus E_{k-1}) \notin \mathcal{B}$. Ορίζουμε $F = E_{k-1} \cup (E \cap (E_k \setminus E_{k-1}))$ και θεωρούμε την ακολουθία $E_1 \subsetneq \cdots \subsetneq E_{k-1} \subseteq F \subseteq E_k \subsetneq \cdots \subsetneq E_n$ στην $\mathcal{A}$. Δεν μπορεί να ισχύει $F = E_{k-1}$, διότι τότε $E \cap (E_k \setminus E_{k-1}) = \emptyset \in \mathcal{B}$. Άρα, $E_{k-1} \subsetneq F$. Αν πάλι $F = E_k$ τότε $E \cap (E_k \setminus E_{k-1}) = E_k \setminus E_{k-1} \in \mathcal{B}$. Άρα. $F \subsetneq E_k$. Έχουμε λοιπόν το ολικά διατεταγμένο σύνολο $E_1 \subsetneq \cdots \subsetneq E_{k-1} \subsetneq F \subsetneq E_k \subsetneq \cdots \subsetneq E_n$, το οποίο είναι άτοπο αφού το $E_1 \subsetneq E_2 \subsetneq \cdots \subsetneq E_n$ ήταν μεγιστικό ολικά διατεταγμένο υποσύνολο της $\mathcal{A}$.

Καταλήξαμε σε άτοπο, άρα το I είναι άπειρο, δηλαδή υπάρχει μια γνησίως αύξουσα ακολουθία $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ στοιχείων της $\mathcal{A}$. Ορίζουμε $A_1 = E_1$ και $A_n = E_n \setminus E_{n-1}$ για κάθε $k \geqslant 2$. Τα A_n είναι άπειρα το πλήθος ξένα ανά δύο σύνολα στην $\mathcal{A}$.

(β) Θεωρούμε μια ακολουθία $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ διακεκριμένων ξένων ανά δύο συνόλων στην $\mathcal{A}$. Για κάθε $M \subseteq \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$A_M = \bigcup_{n \in M} A_n.$$

Τα σύνολα A_M είναι διαφορετικά ανά δύο στοιχεία της $\mathcal{A}$ και το πλήθος τους είναι το ίδιο με τον πληθάριθμο $|\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ του $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, δηλαδή υπεραριθμήσιμο. Άρα, η $\mathcal{A}$ είναι υπεραριθμήσιμη.

Κεφάλαιο 2

Μέτρα

Ομάδα Α΄.

2.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και έστω $C \in \mathcal{A}$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $\mu_C : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ με

$$\mu_C(A) = \mu(A \cap C), \quad A \in \mathcal{A}$$

ορίζει ένα μέτρο στον χώρο $(X, \mathcal{A})$.

Υπόδειξη. Παρατηρούμε αρχικά ότι $\mu_C(\varnothing) = \mu(\varnothing \cap C) = \mu(\varnothing) = 0$. Έστω τώρα $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων στην $\mathcal{A}$. Τα σύνολα $A_n \cap C$ ανήκουν στην $\mathcal{A}$ και είναι επίσης ξένα ανά δύο. Αφού το μ είναι μέτρο, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\mu_C\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) &= \mu\Big(\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \cap C\Big) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap C)\Big)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap C) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_C(A_n).\end{aligned}$$

Άρα, το μ_C είναι μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$.

2.2. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και (A_n) μια ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$. Να δείξετε ότι

$$\mu(\liminf_n A_n) \leqslant \liminf_n \mu(A_n)$$

και ότι, αν επιπλέον $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty$, τότε

$$\limsup_n \mu(A_n) \leqslant \mu(\limsup_n A_n).$$

Υπόδειξη. (α) Έχουμε $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right)$. Η ακολουθία $B_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ είναι αύξουσα και $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \liminf\limits_{n\to\infty} A_n$. Από τη συνέχεια του μ έπεται ότι

$$\mu(\liminf_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n).$$

Επίσης, $B_n \subseteq A_n$, άρα $\mu(B_n) \leqslant \mu(A_n)$ και έπεται ότι $\lim_n \mu(B_n) \leqslant \liminf_n \mu(A_n)$. Συνεπώς,

$$\mu(\liminf_{n\to\infty} A_n) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

(β) Έχουμε $\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)$. Η ακολουθία $C_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ είναι φθίνουσα και $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \limsup_{n\to\infty} A_n$. Από την υπόθεση, $\mu(C_1) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty$. Από τη συνέχεια του μ έπεται ότι

$$\mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(C_n).$$

Επίσης, $A_n \subseteq C_n$, άρα $\mu(A_n) \leqslant \mu(C_n)$ και έπεται ότι $\limsup_n \mu(A_n) \leqslant \lim_n \mu(C_n)$. Συνεπώς,

$$\limsup_{n\to\infty} \mu(A_n) \leqslant \mu(\limsup_{n\to\infty} A_n).$$

2.3. (1ο Λήμμα Borel-Cantelli) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και (A_n) ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$ για τα οποία ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty.$$

Να δείξετε ότι $\mu(\limsup_n A_n) = 0$.

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\mu\Big(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\Big) \leqslant \sum_{n=k}^{\infty} \mu(A_n) < \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν και $\mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) \leqslant \mu\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, συμπεραίνουμε ότι $\mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$.

2.4. Έστω $A \neq \varnothing$ και $a : A \to [0, \infty]$ μια συνάρτηση. Θέτουμε

$$\sum_{x\in A} a(x) = \sup\left\{\sum_{x\in F} a(x) : F \subseteq A,\ F \neq \varnothing \text{ και } F \text{ πεπερασμένο}\right\}.$$

Επιπλέον, θέτουμε $\sum_{x\in\varnothing} a(x) = 0$. Έστω $X \neq \varnothing$ και μια συνάρτηση $a : X \to [0, \infty]$. Αποδείξτε τα εξής:

(α) Αν $\sum_{x\in X} a(x) < \infty$, τότε το σύνολο $J = \{x \in X : a(x) > 0\}$ είναι αριθμήσιμο. *Υπόδειξη:*

$$J = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big\{x \in X : a(x) > \frac{1}{n}\Big\}.$$

(β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $\mu_a : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ που ορίζεται από την

$$\mu_a(A) = \sum_{x\in A} a(x)$$

ορίζει ένα μέτρο στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{P}(X))$. Η μ_a είναι η *σημειακή κατανομή που επάγεται από την a* και ο $a(x)$ είναι η *μάζα* του x.

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι $J = \{x \in X : a(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$, όπου

$$J_n = \Big\{x \in X : a(x) > \frac{1}{n}\Big\}.$$

Κάθε J_n είναι πεπερασμένο σύνολο: αν κάποιο J_n είναι άπειρο, τότε για κάθε $N \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $F \subseteq J_n$ με N στοιχεία, και τότε

$$\frac{1}{n} N \leqslant \sum_{x\in F} a(x) \leqslant \sum_{x\in X} a(x).$$

Αφήνοντας το $N \to \infty$ καταλήγουμε σε άτοπο. Τώρα, αφού κάθε J_n είναι πεπερασμένο, το $J = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ είναι αριθμήσιμο.

(β) Έχουμε θέσει $\sum_{x\in\emptyset} a(x) = 0$, συνεπώς $\mu_a(\emptyset) = 0$. Έστω (A_n) ακολουθία ξένων ανά δύο υποσυνόλων του X. Θέτουμε $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ Για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο F του A υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $F \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_N$. Ορίζουμε $F_n = F \cap A_n$, $n = 1, \ldots, N$. Τότε,

$$\sum_{x\in F} a(x) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{x\in F_n} a(x) \leqslant \sum_{n=1}^{N} \mu_a(A_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu_a(A_n),$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την $\sum_{x\in F_n} a(x) \leqslant \mu_a(A_n)$ που ισχύει αφού το F_n είναι (πεπερασμένο) υποσύνολο του A_n. Παίρνοντας supremum πάνω από όλα τα πεπερασμένα $F \subseteq A$ καταλήγουμε στην

$$\mu_a(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu_a(A_n).$$

Αντίστροφα, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $N \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\sum_{n=1}^{N} \mu_a(A_n) \leqslant \mu_a(A).$$

Για κάθε επιλογή πεπερασμένων $F_n \subseteq A_n$, $n = 1, \ldots, N$, έχουμε ότι τα F_n είναι ξένα και το $F = F_1 \cup \cdots \cup F_N$ είναι πεπερασμένο υποσύνολο του A. Συνεπώς,

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{x\in F_n} a(x) = \sum_{x\in F} a(x) \leqslant \mu_a(A).$$

Παίρνοντας διαδοχικά supremum ως προς τα πεπερασμένα $F_n \subseteq A_n$ έχουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{N} \mu_a(A_n) \leqslant \mu_a(A).$$

2.5. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $\{\mu_n\}$ μια αύξουσα ακολουθία μέτρων στον $(X, \mathcal{A})$, δηλαδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $A \in \mathcal{A}$ ισχύει $\mu_n(A) \leqslant \mu_{n+1}(A)$. Για $A \in \mathcal{A}$ ορίζουμε

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(A).$$

Να δείξετε ότι το μ είναι ένα μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$.

Υπόδειξη. Αφού η $\{\mu_n\}$ είναι αύξουσα, το $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(A)$ υπάρχει (και ενδεχομένως είναι άπειρο) για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Επίσης, $\mu(A) \geqslant \mu_n(A)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Δείχνουμε ότι το μ είναι μέτρο:

(i) Από τον ορισμό του μ έχουμε $\mu(\emptyset) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(\emptyset) = 0$, αφού $\mu_n(\emptyset) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Έστω $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ ακολουθία ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}$. Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} \mu(A_k) &= \sum_{k=1}^{N} \lim_{n\to\infty} \mu_n(A_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \mu_n(A_k) = \lim_{n\to\infty} \mu_n\Big(\bigcup_{k=1}^{N} A_k\Big)\\ &\leqslant \lim_{n\to\infty} \mu_n\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big).\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \leqslant \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big).$$

Για την αντίστροφη ανισότητα παρατηρήστε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu_n\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(A_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Άρα,

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu_n\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

2.6. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $\{\mu_n\}$ μια ακολουθία μέτρων στον $(X, \mathcal{A})$. Να δείξετε ότι:

(α) Η συνάρτηση $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ με

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A), \quad A \in \mathcal{A}$$

είναι μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$.

(β) Αν επιπλέον κάθε μ_n είναι μέτρο πιθανότητας, τότε και η συνάρτηση $\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ με

$$\nu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mu_n(A), \quad A \in \mathcal{A}$$

είναι επίσης μέτρο πιθανότητας.

Υπόδειξη. (α) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $\nu_n = \mu_1 + \cdots + \mu_n$. Κάθε ν_n είναι μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$ και $\nu_n(A) \leqslant \nu_{n+1}(A)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $A \in \mathcal{A}$. Επίσης, $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \nu_n(A)$. Το όριο στο δεξιό μέλος υπάρχει, και ενδεχομένως είναι άπειρο, για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Επίσης, $\mu(A) \geqslant \nu_n(A)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Δείχνουμε ότι το μ είναι μέτρο:

(i) Από τον ορισμό του μ έχουμε $\mu(\emptyset) = \lim_{n\to\infty} \nu_n(\emptyset) = 0$, αφού $\nu_n(\emptyset) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k(\emptyset) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Έστω $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ ακολουθία ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}$. Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} \mu(A_k) &= \sum_{k=1}^{N} \lim_{n\to\infty} \nu_n(A_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \nu_n(A_k) = \lim_{n\to\infty} \nu_n\Big(\bigcup_{k=1}^{N} A_k\Big)\\ &\leqslant \lim_{n\to\infty} \nu_n\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big).\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \leqslant \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big).$$

Για την αντίστροφη ανισότητα παρατηρήστε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\nu_n\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_n(A_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Άρα,

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \lim_{n\to\infty} \nu_n\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

(β) Το ν είναι μέτρο από το (α), αφού για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η $A \mapsto \frac{1}{2^n}\mu_n(A)$, $A \in \mathcal{A}$ είναι μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$. Μένει να ελέγξουμε ότι $\nu(X) = 1$. Όμως, κάθε μ_n είναι μέτρο πιθανότητας, άρα $\mu_n(X) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και έπεται ότι

$$\nu(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\mu_n(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

2.7. Περιγράψτε όλα τα μέτρα στο χώρο $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

Υπόδειξη. Έστω μ ένα μέτρο στο $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $a_n = \mu(\{n\})$. Τότε, για κάθε $A \subseteq \mathbb{N}$ έχουμε

$$\mu(A) = \sum_{n\in A} \mu(\{n\}) = \sum_{n\in A} a_n.$$

Αντίστροφα, αν (a_n) είναι τυχούσα ακολουθία στο $[0, \infty]$, ορίζουμε $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, +\infty]$ με

$$\mu(A) = \sum_{n\in A} a_n.$$

Από την Άσκηση 2.4 η μ είναι μέτρο.

2.8. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας πλήρης χώρος μέτρου. Αν για κάποια $A \in \mathcal{A}$ και $B \subseteq X$ έχουμε $A \triangle B \in \mathcal{A}$ και $\mu(A \triangle B) = 0$, να δείξετε ότι $B \in \mathcal{A}$ και $\mu(A) = \mu(B)$.

Υπόδειξη. Αφού $B \setminus A \subseteq A \triangle B$ και $\mu(A \triangle B) = 0$, η πληρότητα του $(X, \mathcal{A}, \mu)$ εξασφαλίζει ότι $B \setminus A \in \mathcal{A}$ και $\mu(B \setminus A) = 0$. Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι $A \setminus B \in \mathcal{A}$ και $\mu(A \setminus B) = 0$.

Η $\mathcal{A}$ είναι σ–άλγεβρα, συνεπώς, $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{A}$ και $\mu(A \cap B) = \mu(A) - \mu(A \setminus B) = \mu(A) - 0 = \mu(A)$. Ομοίως, $B = (A \cap B) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{A}$ και $\mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A) = \mu(A \cap B) + 0 = \mu(A)$.

Ομάδα Β΄.

2.9. Δώστε παράδειγμα σ-πεπερασμένου μέτρου μ στο χώρο $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ ώστε $\mu((a, b)) = \infty$ για κάθε $a < b \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε μια αρίθμηση $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ των ρητών αριθμών και το μέτρο $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{q_n}$, όπου δ_x είναι το μέτρο Dirac στο $x \in \mathbb{R}$. Από την Άσκηση 2.6 (α) το μ είναι μέτρο στον $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$. Για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ το μέτρο $\mu(A)$ του A είναι ίσο με το πλήθος των ρητών που ανήκουν στο A. Για κάθε $a < b$ στο $\mathbb{R}$ υπάρχουν άπειροι το πλήθος ρητοί στο ανοικτό διάστημα (a, b), συνεπώς $\mu((a, b)) = \infty$.

2.10. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου και $(A_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια ξένων ανά δύο στοιχείων της $\mathcal{A}$. Να δείξετε ότι για κάθε $E \in \mathcal{A}$ το σύνολο $J_A = \{i \in I : \mu(E \cap A_i) > 0\}$ είναι αριθμήσιμο.

Υπόδειξη. Αφού το μ είναι σ–πεπερασμένο, υπάρχει ακολουθία $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}$ ώστε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ και $\mu(B_n) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω $E \in \mathcal{A}$. Για κάθε $i \in I$ έχουμε

$$\mu(E \cap A_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E \cap B_n \cap A_i).$$

Έπεται (εξηγήστε γιατί) ότι

$$\{i \in I : \mu(E \cap A_i) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{i \in I : \mu(E \cap B_n \cap A_i) > 0\}.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το σύνολο $U_n = \{i \in I : \mu(E \cap B_n \cap A_i) > 0\}$ είναι αριθμήσιμο. Παρατηρήστε ότι, για κάθε n και για κάθε k, το σύνολο

$$U_{n,k} = \{i \in I : \mu(E \cap B_n \cap A_i) > 1/k\}$$

είναι πεπερασμένο: τα σύνολα $(E \cap B_n \cap A_i)_{i \in U_{n,k}}$ είναι ξένα και περιέχονται στο $E \cap B_n$, άρα

$$\frac{1}{k} \cdot \mathrm{card}(U_{n,k}) \leqslant \mu(E \cap B_n) \leqslant \mu(B_n) < \infty.$$

Έπεται ότι το $U_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_{n,k}$ είναι αριθμήσιμο.

2.11. Έστω $\mathcal{F}$ μια άλγεβρα σε ένα σύνολο X και μ ένα πεπερασμένο μέτρο στο χώρο $(X, \sigma(\mathcal{F}))$. Να δείξετε ότι για κάθε $A \in \sigma(\mathcal{F})$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $F \in \mathcal{F}$ ώστε

$$\mu(A \triangle F) < \varepsilon,$$

όπου $A \triangle F = (A \setminus F) \cup (F \setminus A)$.

Υπόδειξη. Ορίζουμε

$$\mathcal{A} = \{A \in \sigma(\mathcal{F}) : \text{ για κάθε } \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } F \in \mathcal{F} \text{ ώστε } \mu(A \triangle F) < \varepsilon\}.$$

Είναι φανερό ότι $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ (αν $A \in \mathcal{F}$ τότε παίρνοντας $F = A$ έχουμε $A \triangle F = A \triangle A = \emptyset$). Ειδικότερα, $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

Αν $A \in \mathcal{A}$ και αν $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει $F \in \mathcal{F}$ ώστε $\mu(A \triangle F) < \varepsilon$. Παρατηρούμε ότι $F^c \in \mathcal{F}$ και $A^c \triangle F^c = A \triangle F$, άρα $\mu(A^c \triangle F^c) < \varepsilon$. Έπεται ότι $A^c \in \mathcal{A}$.

Έστω $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}$ και έστω $\varepsilon > 0$. Αφού το μ είναι πεπερασμένο μέτρο, έχουμε $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty$. Συνεπώς, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\sum_{n=k+1}^{\infty} \mu(A_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Για $n = 1, \ldots, k$ βρίσκουμε $F_n \in \mathcal{F}$ ώστε $\mu(A_n \triangle F_n) < \frac{\varepsilon}{2k}$. Αφού η $\mathcal{F}$ είναι άλγεβρα, η ένωση $F = F_1 \cup \cdots \cup F_k \in \mathcal{F}$. Παρατηρήστε ότι

$$\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \triangle F \subseteq \Big(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n\Big) \cup (A_1 \triangle F_1) \cup \cdots \cup (A_k \triangle F_k).$$

Συνεπώς,

$$\mu\Big(\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \triangle F\Big) \leqslant \sum_{n=k+1}^{\infty} \mu(A_n) + \sum_{n=1}^{k} \mu(A_n \triangle F_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=1}^{k} \frac{\varepsilon}{2k} = \varepsilon.$$

Έπεται ότι $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Από τα παραπάνω, η $\mathcal{A}$ είναι σ–άλγεβρα. Αφού $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{F}$, έχουμε ότι $\mathcal{A} \supseteq \sigma(\mathcal{F})$. Όμως, από τον ορισμό της $\mathcal{A}$ έχουμε και τον εγκλεισμό $\mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{F})$, άρα τελικά συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{F})$.

2.12. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος πεπερασμένου μέτρου και (A_n) μια ακολουθία υποσυνόλων του X για την οποία υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\mu(A_n) \geqslant \delta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(α) Δείξτε ότι $\mu(\limsup_n A_n) > 0$.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών $\{k_n\}$ ώστε

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n} \neq \varnothing.$$

Υπόδειξη. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε $\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \supseteq A_k$, άρα

$$\mu\Big(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\Big) \geqslant \mu(A_k) \geqslant \delta.$$

Αν θέσουμε $E_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$, τότε $E_k \searrow \limsup A_n$ και $\mu(E_1) \leqslant \mu(X) < \infty$. Συνεπώς,

$$\mu(\limsup A_n) = \lim_{k\to\infty} \mu(E_k) \geqslant \delta > 0.$$

Αφού $\mu(\limsup A_n) > 0$, έχουμε $\limsup A_n \neq \varnothing$. Δηλαδή, υπάρχει $x \in E$ το οποίο ανήκει σε άπειρα το πλήθος A_n. Ισοδύναμα, υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία $\{k_n\}$ φυσικών με την ιδιότητα $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n}$. Με άλλα λόγια, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n} \neq \varnothing$.

2.13. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Το μ λέγεται *ημιπεπερασμένο* αν για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) = \infty$ υπάρχει $B \subseteq A$ με $B \in \mathcal{A}$ και $0 < \mu(B) < \infty$. Να δείξετε ότι αν $(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι ένας χώρος ημιπεπερασμένου μέτρου και $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) = \infty$, τότε για κάθε $M > 0$ υπάρχει $B \in \mathcal{A}$ με $B \subseteq A$ και $M < \mu(B) < \infty$.

Υπόδειξη. Έστω $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) = \infty$. Ορίζουμε

$$S = \{B \in \mathcal{A}, B \subseteq A, 0 < \mu(B) < \infty\}$$

και θέτουμε

$$s = \sup(S).$$

Αφού το μ είναι ημιπεπερασμένο, το σύνολο S είναι μη κενό. Συνεπώς, $s > 0$.

Υποθέτουμε ότι $s < \infty$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ βρίσκουμε $B_n \in S$ ώστε $\mu(B_n) > \left(1 - \frac{1}{n}\right) s$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $N \in \mathbb{N}$ έχουμε $\bigcup_{n=1}^{N} \in \mathcal{A}$, $\bigcup_{n=1}^{N} B_n \subseteq A$ και

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{N} B_n\Big) \leqslant \sum_{n=1}^{N} \mu(B_n) < \infty.$$

Άρα, $\bigcup_{n=1}^N B_n \in S$ και ισχύει ότι $\mu\left(\bigcup_{n=1}^N B_n\right) \leqslant s$. Θεωρούμε το σύνολο

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Τότε, $B \in \mathcal{A}$ και $B \subseteq A$. Από τη συνέχεια του μέτρου,

$$\mu(B) = \lim_{N\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{N} B_n\Big) \leqslant s,$$

δηλαδή $\mu(B) < \infty$, και συνεπώς, $B \in S$. Επίσης,

$$\mu(B) \geqslant \mu(B_n) > \left(1 - \frac{1}{n}\right) s$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $\mu(B) = s$. Θεωρούμε το $A \setminus B$: έχουμε $\mu(A \setminus B) = \infty$. Αφού το μ είναι ημιπεπερασμένο, μπορούμε να βρούμε $C \subseteq A \setminus B$ ώστε $0 < \mu(C) < \infty$. Όμως τότε, $B \cup C \subseteq A$ και $0 < \mu(B \cup C) < \infty$, οπότε $B \cup C \in S$ και $\mu(B \cup C) = \mu(B) + \mu(C) > s$. Άτοπο.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $s = \infty$. Από τον ορισμό του s έπεται τώρα ότι για κάθε $M > 0$ υπάρχει $B \in \mathcal{A}$ ώστε $B \subseteq A$ και $M < \mu(B) < \infty$.

Ομάδα Γ΄.

2.14. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Ορίζουμε $\mu_0 : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ με

$$\mu_0(A) = \sup\{\mu(F) : F \subseteq A \text{ και } \mu(F) < \infty\}, \quad A \in \mathcal{A}.$$

Να δείξετε ότι:

(α) Το μ_0 είναι ημιπεπερασμένο μέτρο (το *ημιπεπερασμένο μέρος* του μ).

(β) Αν το μ είναι ημιπεπερασμένο, τότε $\mu_0 = \mu$.

(γ) Υπάρχει μέτρο ν στον $(X, \mathcal{A})$ που παίρνει μόνο τις τιμές 0 και ∞, τέτοιο ώστε $\mu = \mu_0 + \nu$.

Υπόδειξη. Παρατηρούμε αρχικά ότι από τον ορισμό του μ_0 (και τη μονοτονία του μ) έχουμε $\mu_0(A) \leqslant \mu(A)$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Επίσης, αν $F \in \mathcal{A}$ και $\mu(F) < \infty$ τότε $\mu_0(F) = \mu(F)$ (εξηγήστε γιατί). Για κάθε $A \in \mathcal{A}$ ορίζουμε

$$S(A) = \{F \in \mathcal{A} : F \subseteq A \text{ και } \mu(F) < \infty\}.$$

(α) Έστω $A \in \mathcal{A}$ με $\mu_0(A) = \infty$. Από τον ορισμό του $\mu_0(A)$ υπάρχει ακολουθία (F_n) στην $\mathcal{A}$ με $F_n \subseteq A$, $\mu(F_n) < \infty$ και $\mu(F_n) \to \mu_0(A) = \infty$. Άρα, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $0 < \mu(F_N)$. Τότε, για το $F := F_N$ έχουμε $F \subseteq A$, $F \in \mathcal{A}$ και $0 < \mu_0(F) = \mu(F) < \infty$. Με βάση τον ορισμό (της Άσκησης 2.13) το μ_0 είναι ημιπεπερασμένο.

Για να δείξουμε ότι το μ_0 είναι μέτρο, αρκεί να ελέγξουμε την αριθμήσιμη προσθετικότητα. Έστω (A_n) ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων στην $\mathcal{A}$. Ορίζουμε $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Αν $F \in S(A)$ τότε $F \cap A_n \in S(A_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και τα $F \cap A_n$ είναι ξένα, συνεπώς

$$\mu(F) = \mu(F \cap A) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} (F \cap A_n)\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F \cap A_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n).$$

Άρα,

$$\mu_0(A) = \sup\{\mu(F) : F \in S(A)\} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n).$$

Για την αντίστροφη ανισότητα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mu_0(A) < \infty$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\mu_0(A_n) \leqslant \mu_0(A) < \infty$. Άρα, για τυχόν $\varepsilon > 0$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $F_n \in S(A_n)$ με $\mu_0(A_n) < \mu(F_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. Για τυχόν $N \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το $B_N = \bigcup_{n=1}^{N} F_n$. Έχουμε $B_N \in \mathcal{A}$, $B_N \subseteq A$ και $\mu(B_N) = \sum_{n=1}^{N} \mu(F_n) \leqslant \sum_{n=1}^{N} \mu_0(A_n) < \infty$, άρα $B_N \in S(A)$. Συνεπώς,

$$\mu_0(A) \geqslant \mu(B_N) = \sum_{n=1}^{N} \mu(F_n) > \sum_{n=1}^{N} (\mu_0(A_n) - \varepsilon/2^n) > \sum_{n=1}^{N} \mu_0(A_n) - \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, παίρνουμε

$$\mu_0(A) \geqslant \sum_{n=1}^{N} \mu_0(A_n),$$

και αφήνοντας το $N \to \infty$ έχουμε το ζητούμενο.

(β) Έχουμε σημειώσει ότι αν $A \in \mathcal{A}$ και $\mu(A) < \infty$ τότε $\mu_0(A) = \mu(A)$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι αν $A \in \mathcal{A}$ και $\mu(A) = \infty$ τότε $\mu_0(A) = \infty$. Όμως, αφού το μ είναι ημιπεπερασμένο, από την Άσκηση 2.13 γνωρίζουμε ότι για κάθε $n > 0$ υπάρχει $F_n \in \mathcal{A}$ με $F_n \subseteq A$ και $n < \mu(F) < \infty$. Συνεπώς,

$$\mu_0(A) = \sup\{\mu(F) : F \subseteq A \text{ και } \mu(F) < \infty\} = \infty = \mu(A).$$

(γ) Συμβολίζουμε με C την κλάση όλων των $A \in \mathcal{A}$ με την ακόλουθη ιδιότητα: $\mu(A) < \infty$ ή $\mu(A) = \infty$ και για κάθε $F \subseteq A$ με $\mu(F) = \infty$ υπάρχει $F_1 \subseteq F$ με $0 < \mu(F_1) < \infty$. Ορίζουμε $\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ με $\nu(A) = 0$ αν $A \in C$ και $\nu(A) = \infty$ αλλιώς.

Αρκεί να ελέγξουμε την αριθμήσιμη προσθετικότητα του ν. Έστω (A_n) ακολουθία ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}$. Ορίζουμε $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ και διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) Υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $A_m \notin C$. Από τον ορισμό της C είναι τότε φανερό ότι $A \notin C$, άρα

$$\nu(A) = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n).$$

(ii) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $A_n \in C$. Θα δείξουμε ότι $A \in C$, οπότε έχουμε πάλι ισότητα, αυτή τη φορά την

$$\nu(A) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n).$$

Έστω $F \subseteq A$ με $\mu(F) = \infty$. Αφού $\mu(F) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F \cap A_n)$, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\mu(F \cap A_m) > 0$. Αν $\mu(F \cap A_m) < \infty$ τότε ορίζουμε $F_1 = F \cap A_m$ και έχουμε $F_1 \subseteq F$ και $0 < \mu(F_1) < \infty$. Αν $\mu(F \cap F_m) = \infty$ τότε αφού $A_m \in C$ πάλι μπορούμε να βρούμε $F_1 \subseteq F \cap A_m \subseteq F$ με $0 < \mu(F_1) < \infty$. Αφού το $F \subseteq A$ ήταν τυχόν (με $\mu(F) = \infty$) έπεται ότι $A \in C$.

Μένει να ελέγξουμε ότι $\mu = \mu_0 + \nu$. Έστω $A \in \mathcal{A}$.

(i) Αν $\mu(A) < \infty$ τότε έχουμε $\mu_0(A) = \mu(A)$ και επίσης $A \in C$ άρα $\nu(A) = 0$. Συνεπώς, $\mu(A) = \mu_0(A) + \nu(A)$.

(ii) Αν $\mu(A) = \infty$ και $A \in C$ τότε όπως στην Άσκηση 2.13 βλέπουμε ότι $\mu_0(A) = \infty$, άρα πάλι ισχύει ότι $\mu(A) = \mu_0(A) + \nu(A)$.

(iii) Τέλος, αν $A \notin C$ έχουμε $\mu(A) = \infty$ και $\nu(A) = \infty$, άρα και πάλι ισχύει ότι $\mu(A) = \mu_0(A) + \nu(A)$.

2.15. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου.

(α) Για δύο σύνολα $A, B \in \mathcal{A}$ γράφουμε $A \sim B$ αν $\mu(A \triangle B) = 0$. Να δείξετε ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας στην $\mathcal{A}$.

(β) Για $A, B \in \mathcal{A}$ ορίζουμε $\rho(A, B) = \mu(A \triangle B)$. Να δείξετε ότι η ρ είναι πλήρης μετρική στο σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας $\mathcal{A}/\sim$.

Υπόδειξη. (α) Είναι φανερό ότι $A \sim A$ και ότι $A \sim B \implies B \sim A$ για κάθε $A, B \in \mathcal{A}$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι αν $A, B, C \in \mathcal{A}$, $A \sim B$ και $B \sim C$ τότε $A \sim C$.

Έχουμε $\mu(A \triangle B) = 0$ και $\mu(B \triangle C) = 0$. Παρατηρούμε ότι: $A \setminus C \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$ και $C \setminus A \subseteq (C \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Άρα,

$$\begin{aligned}\mu(A \triangle C) &= \mu(A \setminus C) + \mu(C \setminus A)\\ &\leqslant \mu((A \setminus B) \cup (B \setminus C)) + \mu((C \setminus B) \cup (B \setminus A))\\ &= \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus C) + \mu(C \setminus B) + \mu(B \setminus A)\\ &= \mu(A \triangle B) + \mu(B \triangle C) = 0.\end{aligned}$$

Έπεται ότι $A \sim C$.

(β) Στο (α) δείξαμε ότι η ρ είναι ψευδομετρική στην $\mathcal{A}$, δηλαδή ικανοποιεί την

$$\rho(A, B) = \mu(A \triangle B) \leqslant \mu(A \triangle C) + \mu(C \triangle B) = \rho(A, C) + \rho(C, B)$$

για κάθε $A, B, C \in \mathcal{A}$. Αν λοιπόν ορίσουμε $\rho([A], [B]) = \rho(A, B)$ στο σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας $\mathcal{D}_\mu := \mathcal{A}/\sim$ τότε έχουμε μετρική.

Έστω $([A_n])_n$ μια βασική ακολουθία στον (D_μ, ρ). Μπορούμε να βρούμε υπακολουθία $([B_n])_n = ([A_{k_n}])_n$ της $([A_n])_n$ τέτοια ώστε $\rho(B_n, B_m) \leqslant \frac{1}{2^n}$ για κάθε $m \geqslant n$. Ορίζουμε $E_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} B_m$. Τότε, $B_n \subseteq E_n$ και

$$E_n \setminus B_n = \bigcup_{m=n+1}^{\infty} (B_m \setminus B_n) \subseteq \bigcup_{m=n+1}^{\infty} (B_m \setminus B_{m-1})$$

διότι $B_m \setminus B_n \subseteq \bigcup_{k=n+1}^{m} (B_k \setminus B_{k-1})$, άρα

$$\begin{aligned}\mu(E_n \triangle B_n) = \mu(E_n \setminus B_n) &\leqslant \sum_{m=n+1}^{\infty} \mu(B_m \setminus B_{m-1}) \leqslant \sum_{m=n+1}^{\infty} \mu(B_m \triangle B_{m-1})\\ &\leqslant \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{m-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}.\end{aligned}$$

Θέτουμε $B = \limsup B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$. Παρατηρούμε ότι

$$\mu(B \setminus B_n) \leqslant \mu(E_n \setminus B_n) \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης έχουμε

$$\mu(B_n \setminus B) = \mu\Big(B_n \cap \Big(\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m^c\Big)\Big) = \mu\Big(\bigcup_{m=1}^{\infty}(B_n \cap E_m^c)\Big) = \lim_{m\to\infty} \mu(B_n \cap E_m^c)$$
$$= \lim_{m\to\infty} \mu(B_n \setminus E_m) \leqslant \limsup_{m\to\infty} \mu(B_n \setminus B_m) \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι

$$\rho(B_n, B) = \mu(B_n \setminus B) + \mu(B \setminus B_n) \leqslant \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{3}{2^n},$$

δηλαδή

$$\rho([A_{k_n}], [B]) = \rho([B_n], [B]) \to 0.$$

Αφού η $([A_n])_n$ είναι βασική ακολουθία και έχει υπακολουθία που συγκλίνει στο $[B]$, συμπεραίνουμε ότι $\rho([A_n], [B]) \to 0$. Άρα, ο $(\mathcal{D}_\mu, \rho)$ είναι πλήρης.

2.16. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Ένα σύνολο $E \subseteq X$ λέγεται *τοπικά μετρήσιμο* αν $E \cap A \in \mathcal{A}$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < \infty$. Ορίζουμε

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{E \subseteq X : \ E \text{ τοπικά μετρήσιμο}\}.$$

(α) Να δείξετε ότι $\mathcal{A} \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$ και ότι η $\tilde{\mathcal{A}}$ είναι σ-άλγεβρα. Αν $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}}$ τότε ο $(X, \mathcal{A}, \mu)$ λέγεται *κορεσμένος* χώρος μέτρου.

(β) Δείξτε ότι αν το μ είναι σ-πεπερασμένο, τότε $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}}$.

(γ) Ορίζουμε τη συνάρτηση $\tilde{\mu} : \tilde{\mathcal{A}} \to [0, \infty]$ με $\tilde{\mu}(A) = \mu(A)$ για $A \in \mathcal{A}$ και $\tilde{\mu}(A) = \infty$ για $A \in \tilde{\mathcal{A}} \setminus \mathcal{A}$. Δείξτε ότι ο $(X, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$ είναι κορεσμένος χώρος μέτρου.

Υπόδειξη. (α) Δείχνουμε πρώτα ότι $\mathcal{A} \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$: αν $E \in \mathcal{A}$, τότε $E \cap A \in \mathcal{A}$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$ (δεν χρειάζεται η υπόθεση ότι $\mu(A) < \infty$). Ειδικότερα, η $\tilde{\mathcal{A}}$ είναι μη κενή.

Έστω $E \in \tilde{\mathcal{A}}$. Για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < \infty$ έχουμε $E \cap A \in \mathcal{A}$, άρα $E^c \cap A = A \setminus (E \cap A) \in \mathcal{A}$. Από τον ορισμό, $E^c \in \tilde{\mathcal{A}}$.

Τέλος, έστω $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία συνόλων στην $\tilde{\mathcal{A}}$. Για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < \infty$ έχουμε

$$\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) \cap A = \bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n \cap A) \in \mathcal{A}$$

διότι η $\mathcal{A}$ είναι σ–άλγεβρα και $E_n \cap A \in \mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα, $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \tilde{\mathcal{A}}$.

(β) Υποθέτουμε ότι το μ είναι σ–πεπερασμένο. Υπάρχει ακολουθία $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}$ ώστε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Έστω $E \in \tilde{\mathcal{A}}$. Τότε, $E \cap B_n \in \mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού η $\mathcal{A}$ είναι σ–άλγεβρα,

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty}(E \cap B_n) \in \mathcal{A}.$$

Δηλαδή, $\tilde{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{A}$.

(γ) Δείξτε πρώτα ότι το $\tilde{\mu}$ είναι μέτρο στον $(X,\tilde{\mathcal{A}})$. Έστω E ένα τοπικά μετρήσιμο σύνολο στον $(X,\tilde{\mathcal{A}},\tilde{\mu})$. Τότε, για κάθε $A\in\tilde{\mathcal{A}}$ με $\tilde{\mu}(A)<\infty$ έχουμε $E\cap A\in\tilde{\mathcal{A}}$. Από τον ορισμό του $\tilde{\mu}$ αυτό σημαίνει ότι για κάθε $A\in\mathcal{A}$ με $\mu(A)=\tilde{\mu}(A)<\infty$ έχουμε $E\cap A\in\tilde{\mathcal{A}}$ και $\tilde{\mu}(E\cap A)\leqslant\tilde{\mu}(A)<\infty$, δηλαδή $E\cap A\in\mathcal{A}$. Συνεπώς, $E\in\tilde{\mathcal{A}}$. Αφού κάθε τοπικά μετρήσιμο σύνολο του $(X,\tilde{\mathcal{A}},\tilde{\mu})$ είναι στην $\tilde{\mathcal{A}}$, ο $(X,\tilde{\mathcal{A}},\tilde{\mu})$ είναι κορεσμένος χώρος μέτρου.

2.17. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ ένας χώρος πεπερασμένου μέτρου. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Το σύνολο $\{\mu(A):A\in\mathcal{A}\}$ είναι άπειρο.

(β) Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $A\in\mathcal{A}$ με $0<\mu(A)<\varepsilon$.

(γ) Υπάρχει ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στην $\mathcal{A}$ ώστε $\mu(A_n)>0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

Υπόδειξη. (α) $\Longrightarrow$ (γ): Για κάθε $E\in\mathcal{A}$ ορίζουμε

$$G(E)=\{\mu(F):F\in\mathcal{A},F\subseteq E\}.$$

Δείχνουμε αρχικά ότι αν το $G(E)$ είναι άπειρο και $F\in\mathcal{A}$, $F\subseteq E$, τότε είτε το $G(F)$ ή το $G(E\setminus F)$ είναι άπειρο. Πράγματι, αν τα $G(F)$ και $G(E\setminus F)$ είναι πεπερασμένα, τότε για κάθε $B\in\mathcal{A}$ με $B\subseteq E$ έχουμε $B=(F\cap B)\cup((E\setminus F)\cap B)$ και τα δύο αυτά σύνολα είναι ξένα, άρα $\mu(B)=\mu(F\cap B)+\mu((E\setminus F)\cap B)\in G(F)+G(E\setminus F)$. Το τελευταίο σύνολο είναι πεπερασμένο, και αφού το $B\subseteq E$ ήταν τυχόν συμπεραίνουμε ότι το $G(E)\subseteq G(F)+G(E\setminus F)$ είναι πεπερασμένο σύνολο, το οποίο είναι άτοπο.

Εφαρμόζουμε τώρα αυτόν τον ισχυρισμό επαγωγικά. Από την υπόθεση έχουμε ότι το $G(X)$ είναι άπειρο, άρα μπορούμε να βρούμε $F_1\in\mathcal{A}$, $F_1\subseteq X$ με $0<\mu(F_1)<\mu(X)$. Τώρα ξέρουμε ότι κάποιο από τα $G(F_1)$ και $G(X\setminus F_1)$ είναι άπειρο. Αν το $G(F_1)$ είναι άπειρο τότε θέτουμε $C_1=F_1$ και αν το $G(F_1)$ είναι πεπερασμένο τότε θέτουμε $C_1=X\setminus F_1$. Σε κάθε περίπτωση, $0<\mu(C_1)<\mu(X)$ και το $G(C_1)$ είναι άπειρο.

Τώρα βρίσκουμε $F_2\in\mathcal{A}$, $F_2\subseteq C_1$ με $0<\mu(F_2)<\mu(C_1)$. Πάλι ξέρουμε ότι κάποιο από τα $G(F_2)$ και $G(C_1\setminus F_2)$ είναι άπειρο. Αν το $G(F_2)$ είναι άπειρο τότε θέτουμε $C_2=F_2$ και αν το $G(F_2)$ είναι πεπερασμένο τότε θέτουμε $C_2=C_1\setminus F_2$. Σε κάθε περίπτωση, $C_2\subseteq C_1$, $0<\mu(C_2)<\mu(C_1)<\mu(X)$ και το $G(C_2)$ είναι άπειρο.

Επαγωγικά ορίζουμε φθίνουσα ακολουθία (C_n) συνόλων στην $\mathcal{A}$ με $\mu(C_{n+1})<\mu(C_n)$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Αν θεωρήσουμε τα σύνολα $A_n=C_n\setminus C_{n+1}$ τότε αυτά ανήκουν στην $\mathcal{A}$, είναι ξένα και $\mu(A_n)=\mu(C_n)-\mu(C_{n+1})>0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

(γ) $\Longrightarrow$ (β): Θεωρούμε ακολουθία $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ξένων συνόλων από την $\mathcal{A}$ ώστε $\mu(A_n)>0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Αφού το μ είναι πεπερασμένο, έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)=\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\Big)<\infty,$$

συνεπώς, $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(A_n)=0$. Άρα, για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $n\in\mathbb{N}$ ώστε $0<\mu(A_n)<\varepsilon$.

(β) $\Longrightarrow$ (α): Ας υποθέσουμε ότι το $G(X)=\{\mu(A):A\in\mathcal{A}\}$ είναι πεπερασμένο. Από την υπόθεση, το σύνολο των θετικών στοιχείων του $G(X)$ είναι μη κενό, άρα έχει ελάχιστο θετικό στοιχείο $\mu(B)=\varepsilon>0$, για κάποιο $B\in\mathcal{A}$. Τότε, πάλι από την υπόθεση, υπάρχει $A\in\mathcal{A}$ ώστε $0<\mu(A)<\varepsilon$. Καταλήξαμε σε άτοπο, άρα το M είναι άπειρο.

2.18. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος πεπερασμένου μέτρου και μια οικογένεια $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$. Τότε υπάρχει αριθμήσιμη υποοικογένεια $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ ώστε:

(i) Αν $A \in \mathcal{F}$, τότε $\mu(A) > 0$.

(ii) Τα στοιχεία της $\mathcal{F}$ είναι ξένα ανά δύο.

(iii) Αν $F = \bigcup \mathcal{F}$, το $X \setminus F$ δεν περιέχει κανένα στοιχείο της $\mathcal{E}$ γνήσια θετικού μ-μέτρου.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $A \in \mathcal{E}$ με $\mu(A) > 0$ αλλιώς δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. Αρχικά ορίζουμε $\mathcal{E}_0 := \{A \in \mathcal{E} : \mu(A) > 0\}$ και επιλέγουμε $A_1 \in \mathcal{E}_0$ με $\mu(A_1) > \frac{1}{2}\sup\{\mu(A) : A \in E_0\}$. Ορίζουμε επίσης $\mathcal{E}_1 := \{A \in \mathcal{E}_0 : A \cap A_1 = 0\}$.

Συνεχίζουμε επαγωγικά. Αν τα $A_1, \dots, A_n$ έχουν επιλεγεί και έχει οριστεί η οικογένεια $\mathcal{E}_n$, επιλέγουμε $A_{n+1} \in \mathcal{E}_n$ έτσι ώστε $\mu(A_{n+1}) > \frac{1}{2}\sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{E}_n\}$ και θέτουμε $\mathcal{E}_{n+1} := \{A \in \mathcal{E}_0 : A \cap (A_1 \cup \cdots \cup A_{n+1}) = \varnothing\}$.

Ας υποθέσουμε αρχικά ότι υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\mathcal{E}_m = \varnothing$. Δηλαδή, για κάθε $A \in \mathcal{E}$ με $A \cap (A_1 \cup \cdots \cup A_m) = \varnothing$ ισχύει ότι $\mu(A) = 0$. Τότε, η $\mathcal{F} = \{A_1, \dots, A_m\}$ είναι αριθμήσιμη οικογένεια, τα $A_1, \dots, A_m$ είναι ξένα, έχουν μέτρο $\mu(A_i) > 0$ για κάθε $i = 1, \dots, m$, και το $X \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_m)$ δεν περιέχει κανένα στοιχείο της $\mathcal{E}$ γνήσια θετικού μ-μέτρου.

Έστω τώρα ότι $\mathcal{E}_n \neq \varnothing$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε την $\mathcal{F} := \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$. Από τον τρόπο ορισμού τους, τα σύνολα A_n είναι ξένα και $\mu(A_n) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, αφού $\mu(X) < +\infty$ και τα A_n είναι ξένα, ισχύει ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < +\infty$, άρα $\mu(A_n) \to 0$.

Έστω $A \in \mathcal{E}$ το οποίο περιέχεται στο $X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ και έστω ότι $\mu(A) > 0$. Αφού $\mu(A_n) \to 0$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\mu(A_n) < \frac{1}{2}\mu(A)$, και έστω n_0 ο μικρότερος φυσικός με αυτή την ιδιότητα. Αφού $A \cap (A_1 \cup \cdots \cup A_{n_0 - 1}) = \varnothing$, έχουμε $A \in \mathcal{E}_{n_0 - 1}$, άρα $\frac{1}{2}\mu(A) < \mu(A_n)$ το οποίο είναι άτοπο.

Κεφάλαιο 3

Εξωτερικά μέτρα

Ομάδα Α΄.

3.1. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^k$ με $A^\circ \neq \varnothing$. Να δείξετε ότι $\lambda^*(A) > 0$.

Υπόδειξη. Έστω x_0 εσωτερικό σημείο του A. Υπάρχει ανοικτό διάστημα $I \subset A$ ώστε $x_0 \in I$. Από τη μονοτονία του εξωτερικού μέτρου,

$$\lambda^*(A) \geqslant \lambda^*(I) = v(I) > 0.$$

3.2. Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Δίνονται οι συναρτήσεις $\phi_j : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$, $j = 1,2,3,4$ με

$$\phi_1(A) = \begin{cases} 0, & \text{αν } A = \varnothing \\ 1, & \text{αν } A \neq \varnothing \end{cases}, \quad \phi_2(A) = \begin{cases} 0, & \text{αν } A = \varnothing \\ \infty, & \text{αν } A \neq \varnothing \end{cases},$$

$$\phi_3(A) = \begin{cases} 0, & \text{αν } A \text{ αριθμήσιμο} \\ 1, & \text{αν } A \text{ υπεραριθμήσιμο} \end{cases} \quad \text{και} \quad \phi_4(A) = \begin{cases} 0, & \text{αν } A \text{ αριθμήσιμο} \\ \infty, & \text{αν } A \text{ υπεραριθμήσιμο} \end{cases}.$$

Να δείξετε ότι οι ϕ_j είναι εξωτερικά μέτρα και να βρείτε τις $\mathcal{M}_{\phi_j}$.

Υπόδειξη. Το γεγονός ότι οι ϕ_j είναι εξωτερικά μέτρα ελέγχεται εύκολα για κάθε $j = 1,2,3,4$.

Έχουμε $\mathcal{M}_{\phi_1} = \{\varnothing, X\}$. Πράγματι, αν A είναι ένα γνήσιο μη κενό υποσύνολο του X τότε υπάρχουν $x \in A$ και $y \in X \setminus A$, οπότε για το σύνολο $B = \{x,y\}$ έχουμε $B \cap A = \{x\}$ και $B \setminus A = \{y\}$, άρα

$$1 = \phi_1(B) < 2 = \phi_1(B \cap A) + \phi_1(B \setminus A).$$

Εύκολα βλέπουμε ότι $\mathcal{M}_{\phi_2} = \mathcal{P}(X)$. Για κάθε $A, B \neq \varnothing$ έχουμε είτε $B \cap A \neq \varnothing$ είτε $B \setminus A \neq \varnothing$, άρα

$$\phi_j(B) = \infty = \infty = \phi_j(B \cap A) + \phi_j(B \setminus A),$$

ενώ αν $A = \varnothing$ ή $B = \varnothing$ τότε η παραπάνω ισότητα ισχύει και πάλι.

Είσης εύκολα βλέπουμε ότι $\mathcal{M}_{\phi_4} = \mathcal{P}(X)$. Αν το B είναι υπεραριθμήσιμο τότε τουλάχιστον ένα από τα $B \cap A$ και $B \setminus A$ είναι υπεραριθμήσιμο, άρα

$$\phi_j(B) = \infty = \phi_j(B \cap A) + \phi_j(B \setminus A),$$

ενώ αν το B είναι αριθμήσιμο τότε τα $B \cap A$ και $B \setminus A$ είναι αριθμήσιμα, οπότε η παραπάνω ισότητα ισχύει και πάλι.

Τέλος, $\mathcal{M}_{\phi_3} = \{A \subseteq X \mid A$ αριθμήσιμο ή $X \setminus A$ αριθμήσιμο$\}$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. Αν το A είναι αριθμήσιμο τότε: αν $B \subseteq X$ αριθμήσιμο έχουμε $\phi_3(B) = 0 = \phi_3(B \cap A) + \phi_3(B \setminus A)$ διότι τα $B \cap A, B \setminus A$ είναι επίσης αριθμήσιμα, ενώ αν το B είναι υπεραριθμήσιμο τότε το $B \cap A$ είναι αριθμήσιμο και το $B \setminus A$ υπεραριθμήσιμο, συνεπώς $\phi_3(B) = 1 = 0 + 1 = \phi_3(B \cap A) + \phi_3(B \setminus A)$.

2. Αν το $X \setminus A$ είναι αριθμήσιμο τότε από την προηγούμενη περίπτωση έχουμε $X \setminus A \in \mathcal{M}_{\phi_3}$, άρα και $A \in \mathcal{M}_{\phi_3}$.

3. Έστω ότι τα A και $X \setminus A$ είναι υπεραριθμήσιμα. Τότε, $\phi_3(X) = 1 < 1 + 1 = \phi_3(X \cap A) + \phi_3(X \setminus A)$, άρα $A \notin \mathcal{M}_{\phi_3}$.

3.3. Για $A \subseteq \mathbb{N}$ ορίζουμε $\phi(A) = \limsup\limits_n \frac{1}{n}|\{A \cap \{1, \dots, n\}|$, όπου $|A|$ είναι ο πληθάριθμος του A. Εξετάστε αν η ϕ είναι εξωτερικό μέτρο.

Υπόδειξη. Θεωρούμε τα σύνολα $A_m = \{m\}$, $m = 1, 2, \dots$. Τότε, $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m = \mathbb{N}$. Άρα,

$$\varphi\Big(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\Big) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\mathbb{N} \cap \{1, \dots, n\}| = \limsup_{n\to\infty} \frac{n}{n} = 1.$$

Όμως, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και για κάθε $n \geqslant m$ έχουμε $|A_m \cap \{1, \dots, n\}| = 1$. Άρα,

$$\varphi(A_m) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} |A_m \cap \{1, \dots, n\}| = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Δηλαδή,

$$\varphi\Big(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\Big) = 1 > 0 = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(A_m).$$

Αφού η φ δεν είναι σ–υποπροσθετική, η φ δεν είναι εξωτερικό μέτρο στο $\mathbb{N}$.

3.4. Θεωρούμε την οικογένεια C που αποτελείται από το κενό σύνολο και όλα τα δισύνολα φυσικών αριθμών. Ορίζουμε $\tau(\emptyset) = 0$ και $\tau(\{m, n\}) = 2$ για κάθε $\{m, n\} \in C$. Η C είναι σ-κάλυψη του $\mathbb{N}$, οπότε επάγει ένα εξωτερικό μέτρο μ^* στο $\mathbb{N}$. Υπολογίστε το $\mu^*(A)$ για $A \subseteq \mathbb{N}$ και βρείτε τα μ^*-μετρήσιμα σύνολα του $\mathbb{N}$.

Υπόδειξη. (α) Δείξτε ότι:

1. Αν $E = \{n_1, \dots, n_{2k}\}$ τότε $\mu^*(E) = 2k$.

2. Αν $E = \{n_1, \dots, n_{2k-1}\}$ τότε $\mu^*(E) = 2k$.

Για παράδειγμα, αν $E = \{n_1, \dots, n_{2k-1}\}$ τότε

$$E \subset \Big(\bigcup_{j=1}^{k-1} \{n_{2j-1}, n_{2j}\}\Big) \cup \{n_{2k-1}, n_1\},$$

άρα

$$\mu^*(E) \leqslant \sum_{j=1}^{k-1} \tau(\{n_{2j-1}, n_{2j}\}) + \tau(\{n_{2k-1}, n_1\}) = 2k.$$

Αφού το E δεν καλύπτεται από λιγότερα από k δισύνολα, έχουμε $\mu^*(E) = 2k$.

Τέλος, αν το E έχει άπειρα στοιχεία τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $A_k \subset E$ με $\mathrm{card}(A_k) = 2k$. Άρα, $\mu^*(E) \geqslant \mu^*(A_k) = 2k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Δηλαδή, $\mu^*(E) = \infty$.

(β) Θα δείξουμε ότι $\mathcal{M}_{\mu^*} = \{\emptyset, \mathbb{N}\}$. Έστω A ένα μη κενό γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Αν $m \in A$ και $n \notin A$ τότε για το $E = \{m, n\}$ έχουμε

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E) = \mu^*(\{m\}) + \mu^*(\{n\}) = 2 + 2 = 4 > 2 = \mu^*(E).$$

Αυτό δείχνει ότι $A \notin \mathcal{M}_{\mu^*}$.

3.5. Αποδείξτε ότι κάθε ευθεία και κάθε κύκλος στο $\mathbb{R}^2$ έχει μέτρο Lebesgue μηδέν.

Υπόδειξη. Θα δείξουμε κάτι γενικότερο: Αν $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση τότε το γράφημα $\Gamma = \{(x, f(x)) : a \leqslant x \leqslant b\}$ έχει μέτρο $\lambda(\Gamma) = 0$. Έστω $\varepsilon > 0$. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $x, y \in [a,b]$ και $|x - y| \leqslant \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}$. Μπορούμε να χωρίσουμε το $[a,b]$ σε k διαδοχικά διαστήματα $I_1, \ldots, I_k$ μήκους μικρότερου ή ίσου από δ. Τότε, για κάθε $j = 1, \ldots, k$ έχουμε ότι το $f(I_j)$ περιέχεται σε ένα διάστημα T_j μήκους $\frac{\varepsilon}{b-a}$. Παρατηρούμε ότι

$$\Gamma = \bigcup_{j=1}^{k} \{(x, f(x)) : x \in I_j\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} I_j \times f(I_j) \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} I_j \times T_j.$$

Συνεπώς,

$$\lambda(\Gamma) \leqslant \sum_{j=1}^{k} \lambda(I_j \times T_j) = \sum_{j=1}^{k} \ell(I_j)\ell(T_j) \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{j=1}^{k} \ell(I_j) = \varepsilon,$$

διότι

$$\sum_{j=1}^{k} \ell(I_j) = \ell([a,b]) = b - a.$$

Για τα ερωτήματα της άσκησης, παρατηρήστε ότι κάθε κύκλος γράφεται ως ένωση $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ δύο γραφημάτων συνεχών συναρτήσεων όπως παραπάνω, και κάθε ευθεία γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$ ευθυγράμμων τμημάτων, δηλαδή γραφημάτων συνεχών συναρτήσεων όπως παραπάνω.

3.6. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ ένα μετρήσιμο σύνολο με $0 < \lambda(A) < \infty$.
(α) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \lambda(A \cap (-\infty, x])$ είναι συνεχής.
(β) Δείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμο σύνολο $F \subseteq A$ ώστε $\lambda(F) = \lambda(A)/2$.

Υπόδειξη. (α) Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$. Παρατηρήστε ότι

$$A \cap (-\infty, y] \subseteq (A \cap (-\infty, x]) \cup [x, y],$$

άρα

$$f(y) = \lambda(A \cap (-\infty, y]) \leqslant \lambda(A \cap (-\infty, x]) + \lambda([x, y]) = f(x) + (y - x).$$

Έπεται ότι, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|$$

(εξηγήστε γιατί), δηλαδή η f είναι 1-Lipschitz.

(β) Παρατηρήστε ότι

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A\cap(-\infty,n]) = \lambda(A)$$

και

$$\lim_{n\to\infty} f(-n) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A\cap(-\infty,-n]) = \lambda(\varnothing) = 0.$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η ακολουθία $A\cap(-\infty,n]$ αυξάνει στο A και η ακολουθία $A\cap(-\infty,-n]$ φθίνει στο κενό σύνολο (και $\lambda(A\cap(-\infty,-1]) \leqslant \lambda(A) < \infty$). Αφού η f είναι συνεχής και

$$0 = \lim_{n\to\infty} f(-n) < \frac{\lambda(A)}{2} < \lim_{n\to\infty} f(n) = \lambda(A),$$

υπάρχει $x\in\mathbb{R}$ ώστε

$$f(x) = \lambda(A\cap(-\infty,x]) = \frac{\lambda(A)}{2}.$$

Θέτοντας $F = A\cap(-\infty,x]$, παίρνουμε το ζητούμενο.

3.7. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου και ένα $A\subseteq X$. Δείξτε ότι υπάρχει $A_0\in\mathcal{A}$ με $A_0\subseteq A$ και $\mu_*(A) = \mu(A_0)$.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι $\mu_*(A) < \infty$. Από τον ορισμό του εσωτερικού μέτρου, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $E_n\in\mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $E_n\subseteq A$ και $\mu(E_n) > \mu_*(A) - \frac{1}{n}$. Ορίζουμε $A_0 = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$. Τότε, $A_0\in\mathcal{A}$, έχουμε $A_0\subseteq A$ και $\mu(A_0)\geqslant \mu(E_n) > \mu_*(A) - \frac{1}{n}$ για κάθε n, άρα $\mu(A_0)\geqslant\mu_*(A)$. Η αντίστροφη ανισότητα, $\mu(A_0)\leqslant\mu_*(A)$, είναι άμεση από τον ορισμό του $\mu_*(A)$, αφού $A_0\subseteq A$.

Έστω τώρα ότι $\mu_*(A) = \infty$. Τότε, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $E_n\in\mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $E_n\subseteq A$ και $\mu(E_n) > n$. Ορίζουμε $A_0 = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$. Τότε, $A_0\in\mathcal{A}$, έχουμε $A_0\subseteq A$ και $\mu(A_0)\geqslant\mu(E_n) > n$ για κάθε n, άρα $\mu(A_0) = \infty = \mu_*(A)$.

3.8. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ ένας χώρος μέτρου. Αν (A_n) είναι μια αύξουσα ακολουθία υποσυνόλων του X, τότε

$$\mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\Big) = \lim_{n\to\infty}\mu^*(A_n).$$

Υπόδειξη. Από τη μονοτονία του μ^*, η ακολουθία $\mu^*(A_n)$ είναι αύξουσα και $\mu^*(A_n)\leqslant\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right)$. Άρα, το $\lim\limits_{n\to\infty}\mu^*(A_n)$ υπάρχει και

$$\lim_{n\to\infty}\mu^*(A_n)\leqslant\mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\Big).$$

Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $E_n\in\mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $E_n\supseteq A_n$ και $\mu(E_n) = \mu^*(A_n)$. Θέτουμε $B_n = \bigcap_{k=n}^\infty E_k$. Για κάθε $k\geqslant n$ έχουμε $E_k\supseteq A_k\supseteq A_n$, διότι η (A_n) είναι αύξουσα, άρα $E_n\supseteq B_n\supseteq A_n$. Τώρα, $\bigcup_{n=1}^\infty A_n\subseteq\bigcup_{n=1}^\infty B_n$, άρα

$$\mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\Big)\leqslant\mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^\infty B_n\Big) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^\infty B_n\Big).$$

Παρατηρήστε ότι $B_n\subseteq B_{n+1}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, άρα

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^\infty B_n\Big) = \lim_{n\to\infty}\mu(B_n).$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty} \mu^*(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) \geqslant \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\Big) \geqslant \mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big).$$

Ομάδα Β΄.

3.9. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda^*(A) > 0$. Δείξτε ότι υπάρχουν $x, y \in A$ ώστε $x - y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Υπόδειξη. Αν δεν ισχύει το ζητούμενο, τότε $A - A = \{x - y : x, y \in A\} \subseteq \mathbb{Q}$. Αφού $\lambda^*(A) > 0$ το A είναι μη κενό. Σταθεροποιούμε $x_0 \in A$ και από την

$$A - x_0 \subseteq A - A \subseteq \mathbb{Q}$$

συμπεραίνουμε ότι το $A - x_0$, άρα και το A, είναι αριθμήσιμο σύνολο. Τότε, $\lambda^*(A) = 0$, το οποίο είναι άτοπο: από την υπόθεση έχουμε $\lambda^*(A) > 0$.

3.10. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) = 0$. Να δείξετε ότι και για το $A' = \{x^2 : x \in A\}$ ισχύει $\lambda(A') = 0$.

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι αν B είναι ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $f : B \to \mathbb{R}$ είναι Lipschitz συνεχής συνάρτηση με σταθερά $C > 0$ τότε $\lambda^*(f(B)) \leqslant C\lambda^*(B)$. Έστω $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια κάλυψη του B από ανοικτά διαστήματα. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $B \cap I_n \neq \varnothing$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $x, y \in B \cap I_n$, τότε

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y| \leqslant C\,\ell(I_n).$$

Συνεπώς, $\mathrm{diam}(f(B \cap I_n)) \leqslant C\,\ell(I_n)$. Έπεται ότι το σύνολο $f(B \cap I_n)$ περιέχεται σε διάστημα J_n μήκους $\ell(J_n) \leqslant C\,\ell(I_n)$ (εξηγήστε γιατί). Η $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι κάλυψη του $f(B)$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) \leqslant C \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n).$$

Έπεται ότι

$$\lambda^*(f(B)) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) : f(B) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n\right\} \leqslant \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} C\,\ell(I_n) : B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\} = C\,\lambda^*(B).$$

Έστω τώρα $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) = 0$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $A_n = A \cap [-n, n]$. Παρατηρήστε ότι $\lambda(A_n) = 0$ και ότι η $f(x) = x^2$ είναι $2n$-Lipschitz στο A_n. Από τον προηγούμενο ισχυρισμό συμπεραίνουμε ότι

$$\lambda^*(f(A_n)) \leqslant 2n\lambda(A_n) = 0,$$

δηλαδή $\lambda^*(f(A_n)) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι

$$\lambda^*(f(A)) = \lambda^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} f(A_n)\Big) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(f(A_n)) = 0,$$

δηλαδή, $\lambda(f(A)) = 0$.

3.11. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $A \subseteq X$. Να δείξετε ότι

$$\mu_*(A) + \mu^*(X \setminus A) = \mu(X).$$

Υπόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mu_*(A) < \infty$ και $\mu^*(X\setminus A) < \infty$. Αν όχι, τότε έχουμε και $\mu(X) = \infty$ (εξηγήστε γιατί) και ισχύει το ζητούμενο.

Έχουμε δεί ότι υπάρχει $B \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $X \setminus A \subseteq B$ και $\mu^*(X \setminus A) = \mu(B) < \infty$. Τότε, $X \setminus B \subseteq A$ και $X \setminus B \in \mathcal{A}$, άρα

$$\mu_*(A) \geqslant \mu(X \setminus B) = \mu(X) - \mu(B) = \mu(X) - \mu^*(X \setminus A).$$

Ειδικότερα, $\mu(X) < \infty$. Στην Άσκηση 3.7 είδαμε επίσης ότι υπάρχει $E \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $E \subseteq A$ και $\mu(E) = \mu_*(A) < \infty$. Τότε, $X \setminus E \supseteq X \setminus A$ και $X \setminus E \in \mathcal{A}$, άρα

$$\mu^*(X \setminus A) \leqslant \mu(X \setminus E) = \mu(X) - \mu(E) = \mu(X) - \mu_*(A).$$

Από τις δύο αυτές ανισότητες έπεται ότι

$$\mu_*(A) + \mu^*(X \setminus A) = \mu(X) < \infty.$$

3.12. Δείξτε ότι ένα $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν

$$\lambda^*((a,b)) = \lambda^*((a,b) \cap A) + \lambda^*((a,b) \setminus A), \quad \text{για κάθε } a < b \text{ στο } \mathbb{R}.$$

Υπόδειξη. Αν το A είναι Lebesgue μετρήσιμο τότε η ισότητα $\lambda^*(E) = \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \setminus A)$ ισχύει για κάθε $E \subseteq \mathbb{R}$. Ειδικότερα ισχύει αν $E = (a,b)$, όπου $a < b$ στο $\mathbb{R}$.

Αντίστροφα, υποθέτοντας ότι $\lambda^*((a,b)) = \lambda^*((a,b) \cap A) + \lambda^*((a,b) \setminus A)$ για κάθε $a < b$ στο $\mathbb{R}$ θα δείξουμε ότι το $A \cap (a,b)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο για κάθε $a < b$ στο $\mathbb{R}$, οπότε το $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cap (-n,n))$ είναι Lebesgue μετρήσιμο.

Έστω (a,b) ένα φραγμένο διάστημα. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει B_1 μετρήσιμο με $(a,b) \setminus A \subseteq B_1$ και $\lambda(B_1) = \lambda^*((a,b) \setminus A)$. Θέτοντας $B = B_1 \cap (a,b)$ έχουμε $B \subseteq (a,b)$, $(a,b) \setminus A \subseteq B$ και $\lambda(B) = \lambda^*((a,b) \setminus A)$ (εξηγήστε γιατί). Τότε $(a,b) \setminus B \subseteq (a,b) \cap A$, και χρησιμοποιώντας την υπόθεση γράφουμε

$$\lambda^*((a,b) \cap A) = \lambda((a,b)) - \lambda^*((a,b) \setminus A) = \lambda((a,b)) - \lambda(B) = \lambda((a,b) \setminus B) \leqslant \lambda_*((a,b) \cap A).$$

Έπεται ότι $\lambda^*((a,b) \cap A) = \lambda_*((a,b) \cap A)$, άρα το $(a,b) \cap A$ είναι Lebesgue μετρήσιμο.

3.13. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda^*(A) > 0$ και $\alpha \in (0,1)$. Να δείξετε ότι υπάρχει ανοικτό διάστημα I στο $\mathbb{R}$ ώστε

$$\lambda^*(A \cap I) > \alpha\lambda(I).$$

Υπόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι $0 < \lambda^*(A) < \infty$. Από τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου, για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε ακολουθία $\{I_n\}$ ανοικτών διαστημάτων ώστε $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) < (1+\varepsilon)\lambda^*(A)$$

(εδώ χρησιμοποιείται η υπόθεση ότι $0 < \lambda^*(A) < +\infty$, εξηγήστε γιατί). Γράφοντας $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cap I_n)$, από την υποπροσθετικότητα του λ^* παίρνουμε

$$\lambda^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A \cap I_n),$$

άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) < (1+\varepsilon) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A \cap I_n).$$

Συνεπώς, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$\lambda^*(A \cap I_m) > \frac{1}{1+\varepsilon} \lambda(I_m).$$

Παίρνοντας $\varepsilon = \frac{1}{\alpha} - 1 > 0$ έχουμε το ζητούμενο.

Τώρα δείχνουμε ότι το συμπέρασμα ισχύει και στην περίπτωση που $\lambda^*(A) = \infty$. Παρατηρήστε ότι υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε το $A_m := A \cap [-m, m]$ να ικανοποιεί την $0 < \lambda^*(A_m) < \infty$ (εξηγήστε τις λεπτομέρειες). Εφαρμόζοντας το προηγούμενο για το σύνολο A_m, βρίσκουμε ανοιχτό διάστημα I με την ιδιότητα

$$\lambda^*(A \cap I) \geqslant \lambda^*(A_m \cap I) > \alpha\, \lambda(I).$$

3.14. Να δείξετε ότι υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) > 0$ και $\lambda(A \cap I) < \lambda(I)$ για κάθε μη τετριμμένο διάστημα I.

Υπόδειξη. Έστω $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ μια αρίθμηση του $\mathbb{Q}$. Ορίζουμε

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(q_n - \frac{1}{n^2}, q_n + \frac{1}{n^2} \right).$$

Το B είναι ανοικτό και

$$\lambda(B) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda\Big((q_n - 1/n^2, q_n + 1/n^2)\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} < 4,$$

άρα το σύνολο $A := [0,4] \setminus B$ είναι Lebesgue μετρήσιμο και $\lambda(A) > 0$.

Έστω I μη τετριμμένο διάστημα. Υπάρχει ρητός q_n ο οποίος είναι εσωτερικό σημείο του I, και τότε το $J := I \cap (q_n - 1/n^2, q_n + 1/n^2)$ είναι μη τετριμμένο διάστημα, άρα $\lambda(J) > 0$. Παρατηρούμε ότι $A^c \supseteq B$, άρα $\lambda(I \cap A^c) \geqslant \lambda(I \cap B) \geqslant \lambda(J)$. Συνεπώς, αν $\lambda(I) < \infty$ έχουμε

$$\lambda(A \cap I) = \lambda(I) - \lambda(I \cap A^c) \leqslant \lambda(I) - \lambda(J) < \lambda(I),$$

ενώ αν $\lambda(I) = +\infty$ τότε $\lambda(A \cap I) \leqslant \lambda(A) \leqslant 4 < \lambda(I)$.

3.15. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα στο X. Γράφουμε $\mathcal{A}_\sigma$ για την οικογένεια όλων των αριθμήσιμων ενώσεων στοιχείων της $\mathcal{A}$ και $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ για την οικογένεια όλων των αριθμήσιμων τομών στοιχείων της $\mathcal{A}_\sigma$. Έστω μ_0 ένα προμέτρο στην $\mathcal{A}$ και μ^* το αντίστοιχο εξωτερικό μέτρο. Δείξτε τα εξής:

(α) Για κάθε $A \subseteq X$ και $\varepsilon > 0$, υπάρχει $B \in \mathcal{A}_\sigma$ ώστε $A \subseteq B$ και $\mu^*(B) \leqslant \mu^*(A) + \varepsilon$.

(β) Αν $\mu^*(A) < \infty$, τότε το A είναι μ^*-μετρήσιμο αν και μόνο αν υπάρχει $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ τέτοιο ώστε $A \subseteq B$ και $\mu^*(B \setminus A) = 0$.

(γ) Αν το μ_0 είναι $\sigma-$πεπερασμένο, τότε στο (β) δε χρειάζεται να κάνουμε την υπόθεση $\mu^*(A) < \infty$.

Υπόδειξη. (α) Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mu^*(A) < +\infty$. Από τον ορισμό του $\mu^*(A)$, για τυχόν $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $E_n \in \mathcal{A}$ τέτοια ώστε $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E_n) < \mu^*(A) + \varepsilon$. Ορίζουμε $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Τότε, $B \in \mathcal{A}_\sigma$, έχουμε $A \subseteq B$, και

$$\mu^*(B) = \mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E_n) < \mu^*(A) + \varepsilon.$$

(β) Έστω $A \subseteq X$ με $\mu^*(A) < +\infty$. Από το (α), για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $B_n \in \mathcal{A}_\sigma$ τέτοιο ώστε $A \subseteq B_n$ και $\mu^*(B_n) < \mu^*(A) + \frac{1}{n}$. Αφού το A είναι μ^*-μετρήσιμο, και κάθε B_n είναι επίσης μ^*-μετρήσιμο, έχουμε

$$\mu^*(B_n \setminus A) = \mu^*(B_n) - \mu^*(A) < \frac{1}{n}$$

για κάθε n. Θέτουμε $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. Τότε, $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$, έχουμε $A \subseteq B$ και $\mu^*(B \setminus A) \leqslant \mu^*(B_n \setminus A) < \frac{1}{n}$ για κάθε n, άρα $\mu^*(B \setminus A) = 0$.

Αντίστροφα, αν υπάρχει $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ τέτοιο ώστε $A \subseteq B$ και $\mu^*(B \setminus A) = 0$ τότε το $A = B \setminus (B \setminus A)$ είναι μ^*-μετρήσιμο, διότι τα B και $B \setminus A$ ανήκουν στην $\mathcal{M}_{\mu^*}$.

(γ) Αν το μ_0 είναι σ-πεπερασμένο τότε έχουμε επιπλέον ότι υπάρχει αύξουσα ακολουθία (F_n) συνόλων στην $\mathcal{A}$ ώστε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ και $\mu_0(F_n) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω A ένα μ^*-μετρήσιμο σύνολο. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο $A_n := A \cap F_n$ είναι μ^*-μετρήσιμο και $\mu^*(A_n) < \infty$. Από το (β) για κάθε $k \geqslant 1$ μπορούμε να βρούμε $B_{n,k} \in \mathcal{A}_\sigma$ ώστε $A_n \subseteq B_{n,k}$ και $\mu^*(B_{n,k} \setminus A_n) < \frac{1}{k \cdot 2^n}$. Τότε, το σύνολο $B_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{n,k}$ ανήκει στην $\mathcal{A}_\sigma$, έχουμε $A \subseteq B_k$ και

$$\mu^*(B_k \setminus A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_{n,k} \setminus A_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 2^n} = \frac{1}{k}.$$

Συνεχίζουμε όπως στο (β). Το σύνολο $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$ ανήκει στην $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$, έχουμε $B \supseteq A$ και $\mu^*(B \setminus A) = 0$. Για την αντίστροφη συνεπαγωγή δεν είχαμε χρειαστεί την υπόθεση ότι $\mu^*(A) < \infty$.

3.16. Έστω ϕ ένα εξωτερικό μέτρο στο σύνολο X και μ το επαγόμενο μέτρο στον χώρο $(X, \mathcal{M}_\phi)$. Αν $E, G \subseteq X$, το G λέγεται *ϕ–μετρήσιμο κάλυμα* του E αν:

$$E \subseteq G,\ \ G \in \mathcal{M}_\phi \ \text{ και για κάθε } A \in \mathcal{M}_\phi \text{ με } A \subseteq G \setminus E \text{ ισχύει } \mu(A) = 0.$$

Δείξτε ότι:

(α) Αν G_1 και G_2 είναι δύο ϕ–μετρήσιμα καλύματα του ίδιου $E \subseteq X$, τότε $\mu(G_1 \triangle G_2) = 0$.

(β) Αν $E \subseteq G$, $G \in \mathcal{M}_\phi$ και $\phi(E) = \mu(G) < \infty$, τότε το G είναι ένα ϕ–μετρήσιμο κάλυμα του E.

Υπόδειξη. (α) Έχουμε $G_2 \setminus G_1 \subseteq G_2 \setminus E$ διότι $E \subseteq G_1$. Αφού $G_2 \setminus G_1 \in \mathcal{M}_\phi$ και το G_2 είναι μετρήσιμο κάλυμα του E, συμπεραίνουμε ότι $\mu(G_2 \setminus G_1) = 0$.

Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι $\mu(G_1 \setminus G_2) = 0$. Συνεπώς,

$$\mu(G_1 \triangle G_2) = \mu(G_2 \setminus G_1) + \mu(G_1 \setminus G_2) = 0.$$

Τέλος, από τις $\mu(G_1 \setminus G_2) = \mu(G_1 \setminus G_2) = 0$ έπεται ότι

$$\mu(G_2) = \mu(G_2 \cap G_1) + \mu(G_2 \setminus G_1) = \mu(G_2 \cap G_1) + \mu(G_1 \setminus G_2) = \mu(G_1).$$

(β) Έστω $A \in \mathcal{M}_\phi$ με $A \subseteq G \setminus E$. Τότε, $E \subseteq G \setminus A$. Άρα,

$$\mu(G) = \phi(E) \leqslant \phi(G \setminus A) = \mu(G \setminus A) = \mu(G) - \mu(A),$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη μονοτονία του μ^*, το γεγονός ότι $G \setminus A \in \mathcal{M}_\phi$ και την υπόθεση ότι $\mu(G) < \infty$. Έπεται ότι $\mu(A) = 0$. Άρα, το G είναι ϕ–μετρήσιμο κάλυμμα του E.

3.17. Έστω (A_n) ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$ με την ιδιότητα

$$\limsup_n \lambda(A_n) = 1.$$

Δείξτε ότι για κάθε $\alpha \in (0,1)$ υπάρχει υπακολουθία (A_{k_n}) της (A_n) ώστε

$$\lambda\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n}\Big) > \alpha.$$

Υπόδειξη. Αφού $\limsup_{n\to\infty} \lambda(A_n) = 1$, για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $n > m$ ώστε $\lambda(A_n) > 1 - \varepsilon$.

Έστω $0 < \alpha < 1$. Επαγωγικά, βρίσκουμε $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < k_{n+1} < \cdots$ ώστε

$$\lambda(A_{k_n}) > 1 - \frac{1-\alpha}{2^n}.$$

Τότε, αν θέσουμε $A_{k_n}^c := [0,1] \setminus A_{k_n}$, έχουμε

$$\lambda\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{k_n}^c\Big) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_{k_n}^c) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\alpha}{2^n} = 1 - \alpha.$$

Συνεπώς,

$$\lambda\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n}\Big) = 1 - \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{k_n}^c\right) > \alpha.$$

Ομάδα Γ΄.

3.18. Έστω $\{q_n\}$ μια αρίθμηση του $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ ορίζουμε

$$A(\varepsilon) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(q_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\Big).$$

Τέλος, θέτουμε $A = \bigcap_{j=1}^{\infty} A\left(\frac{1}{j}\right)$.

(α) Δείξτε ότι $\lambda(A(\varepsilon)) \leqslant 2\varepsilon$.

(β) Αν $\varepsilon < \frac{1}{2}$ δείξτε ότι το $[0,1] \setminus A(\varepsilon)$ είναι μη κενό.

(γ) Δείξτε ότι $A \subseteq [0,1]$ και $\lambda(A) = 0$.

(δ) Δείξτε ότι $\mathbb{Q} \cap [0,1] \subseteq A$ και ότι το A είναι υπεραριθμήσιμο.

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι

$$\lambda(A(\varepsilon)) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda\Big(\big(q_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\big)\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon}{2^n} = 2\varepsilon.$$

(β) Αν το $[0,1] \setminus A(\varepsilon)$ ήταν κενό, θα είχαμε $[0,1] \subseteq A(\varepsilon)$, οπότε $1 \leqslant \lambda(A(\varepsilon))$. Όμως, αν $\varepsilon < \frac{1}{2}$, από το (α) παίρνουμε $\lambda(A(\varepsilon)) \leqslant 2\varepsilon < 1$.

(γ) Αφού $0 \leqslant q_n \leqslant 1$, για κάθε $j \in \mathbb{N}$ έχουμε $A \subseteq A\left(\frac{1}{j}\right) \subseteq \left[-\frac{1}{j}, 1+\frac{1}{j}\right]$. Άρα,

$$A \subseteq \bigcap_{j=1}^{\infty} \Big[-\frac{1}{j}, 1+\frac{1}{j}\Big] = [0,1].$$

Επίσης, από το (α),

$$\lambda(A) \leqslant \lambda(A(1/j)) \leqslant 2/j$$

για κάθε $j \in \mathbb{N}$. Άρα, $\lambda(A) = 0$.

(δ) Έχουμε $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq A\left(\frac{1}{j}\right)$ για κάθε $j \in \mathbb{N}$, άρα $\mathbb{Q} \cap [0,1] \subseteq \bigcap_{j=1}^{\infty} A\left(\frac{1}{j}\right) = A$.

Για κάθε $j \in \mathbb{N}$, το $[0,1] \setminus A\left(\frac{1}{j}\right)$ είναι κλειστό και πουθενά πυκνό (διότι δεν περιέχει ρητούς). Ας υποθέσουμε ότι το A είναι αριθμήσιμο. Αν $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, τότε μπορούμε να γράψουμε

$$[0,1] = A \cup ([0,1] \setminus A) = \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x_n\}\Big) \cup \Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}\Big([0,1] \setminus A\Big(\frac{1}{j}\Big)\Big)\Big).$$

Αυτό οδηγεί σε άτοπο: όλα τα σύνολα $\{x_n\}$, $[0,1] \setminus A\left(\frac{1}{j}\right)$ είναι κλειστά, άρα κάποιο από αυτά θα έπρεπε να περιέχει διάστημα, από το θεώρημα του Baire. Όμως, κανένα από τα $\{x_n\}$ δεν περιέχει διάστημα και κανένα από τα $[0,1] \setminus A\left(\frac{1}{j}\right)$ δεν περιέχει διάστημα διότι δεν περιέχει ρητούς.

Συνεπώς, το A είναι υπεραριθμήσιμο.

3.19. Έστω A ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$ με $\lambda(A) < \infty$ και $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του A ώστε $\lambda(A_n) \geqslant c$ για κάποιο $c > 0$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(α) Δείξτε ότι $\lambda(\limsup_n A_n) > 0$.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία $\{k_n\}$ φυσικών αριθμών με την ιδιότητα

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n} \neq \varnothing.$$

Υπόδειξη. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε $\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \supseteq A_k$, άρα

$$\lambda\Big(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\Big) \geqslant \lambda(A_k) \geqslant c.$$

Αν θέσουμε $E_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$, τότε $E_k \searrow \limsup A_n$ και $\lambda(E_1) \leqslant \lambda(A) < \infty$. Συνεπώς,

$$\lambda(\limsup A_n) = \lim_{k\to\infty} \lambda(E_k) \geqslant c > 0.$$

Αφού $\lambda(\limsup A_n) > 0$, έχουμε $\limsup A_n \neq \varnothing$. Δηλαδή, υπάρχει $x \in E$ το οποίο ανήκει σε άπειρα το πλήθος A_n. Ισοδύναμα, υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία $\{k_n\}$ φυσικών με την ιδιότητα $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n}$.

Με άλλα λόγια, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_{k_n} \neq \emptyset$.

3.20. Λέμε ότι ένα $A \subseteq \mathbb{R}$ έχει *σημείο συμπύκνωσης στο άπειρο* αν για κάθε $a > 0$, το σύνολο $\{x \in A : |x| > a\}$ είναι υπεραριθμήσιμο. Ορίζουμε

$$\phi(A) = \begin{cases} 0, & \text{αν } A \text{ αριθμήσιμο,} \\ 1, & \text{αν } A \text{ υπεραριθμήσιμο χωρίς σημείο συμπύκνωσης στο άπειρο,} \\ \infty, & \text{αν } A \text{ υπεραριθμήσιμο με σημείο συμπύκνωσης στο άπειρο.} \end{cases}$$

Δείξτε ότι η ϕ είναι εξωτερικό μέτρο στο $\mathbb{R}$ και ότι

$$\mathcal{M}_\phi = \{A \subseteq \mathbb{R} : \; A \text{ αριθμήσιμο ή } A^c \text{ αριθμήσιμο}\}.$$

Έχει κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ $\phi-$μετρήσιμο κάλυμα;

Υπόδειξη. (α) Το ϕ είναι εξωτερικό μέτρο στο $\mathbb{R}$: η μόνη ιδιότητα που χρειάζεται προσοχή είναι η $\sigma-$υποπροσθετικότητα. Πιο συγκεκριμένα, η περίπτωση $\phi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \infty$. Αυτό σημαίνει ότι το $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι υπεραριθμήσιμο και έχει σημείο συμπύκνωσης στο άπειρο. Παρατηρήστε ότι τουλάχιστον ένα από τα A_n είναι υπεραριθμήσιμο. Επίσης, αν υποθέσουμε ότι υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος υπεραριθμήσιμα A_m, τα $A_{m_1}, \ldots, A_{m_s}$, και κανένα από αυτά δεν έχει σημείο συμπύκνωσης στο άπειρο, τότε, για κάθε $j = 1, \ldots, s$ υπάρχει $\alpha_j > 0$ ώστε το σύνολο $\{x \in A_{m_j} : |x| > \alpha_j\}$ να είναι αριθμήσιμο. Τότε, αν θέσουμε $\alpha = \max\{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$ βλέπουμε ότι το σύνολο $\left\{x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n : |x| > \alpha\right\}$ είναι αριθμήσιμο. Αυτό είναι άτοπο.

Απομένουν λοιπόν δύο περιπτώσεις:

1. Κάποιο A_m έχει σημείο συμπύκνωσης στο άπειρο. Τότε, $\phi(A_m) = \infty$, άρα

$$\phi\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \infty = \phi(A_m) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n).$$

2. Υπάρχουν άπειρα το πλήθος υπεραριθμήσιμα A_m, κανένα όμως δεν έχει σημείο συμπύκνωσης στο άπειρο. Αφού $\phi(A_m) = 1$ για καθένα από αυτά, παίρνουμε

$$\phi\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n).$$

(β) Έστω A αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τότε, για κάθε $E \subseteq \mathbb{R}$ το $E \cap A$ είναι αριθμήσιμο, άρα

$$\phi(E \cap A) + \phi(E \cap A^c) = 0 + \phi(E \cap A^c) \leqslant \phi(E)$$

από τη μονοτονία του ϕ. Έπεται ότι $A \in \mathcal{A}_\phi$, και συνεπώς,

$$\mathcal{A}_\phi \supseteq \{A \subseteq \mathbb{R} \,|\, A \text{ αριθμήσιμο ή } A^c \text{ αριθμήσιμο}\}.$$

Έστω τώρα A υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με υπεραριθμήσιμο συμπλήρωμα. Μπορούμε να βρούμε υπεραριθμήσιμα $G \subseteq A$ και $F \subseteq A^c$ τα οποία δεν έχουν σημείο συμπύκνωσης στο άπειρο (εξηγήστε γιατί). Αν θέσουμε $E = G \cup F$ τότε το E δεν έχει σημείο συμπύκνωσης στο άπειρο (εξηγήστε γιατί), άρα

$$\phi(E \cap A) + \phi(E \cap A^c) = \phi(G) + \phi(F) = 1 + 1 = 2 > 1 = \phi(E).$$

Άρα, $A \notin \mathcal{A}_\phi$.

(γ) Έστω μ το επαγόμενο μέτρο στην $\mathcal{M}_\phi$ (δείτε την Άσκηση 3.16). Κάθε $E \subseteq \mathbb{R}$ έχει ϕ–μετρήσιμο κάλυμα. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. Το E είναι αριθμήσιμο. Τότε, $E \in \mathcal{A}_\phi$ οπότε μπορούμε να πάρουμε $G = E$.

2. Το E είναι υπεραριθμήσιμο. Παίρνουμε $G = \mathbb{R}$. Αν $A \in \mathcal{A}_\phi$ και $A \subseteq \mathbb{R} \setminus E = E^c$, τότε το A δεν έχει αριθμήσιμο συμπλήρωμα (παρατηρήστε ότι $A^c \supseteq E$) άρα είναι αριθμήσιμο. Έπεται ότι $\mu(A) = 0$.

3.21. Έστω Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) > 0$. Να δείξετε ότι το σύνολο $A - A = \{x - y : x, y \in A\}$ περιέχει διάστημα με κέντρο το 0.

Υπόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 < \lambda(A) < \infty$ (αν $\lambda(A) = \infty$, θεωρούμε $B \subseteq A$ με $0 < \lambda(B) < \infty$, δείχνουμε ότι το $B - B$ περιέχει διάστημα της μορφής $(-t, t)$ για κάποιο $t > 0$, και τότε, $A - A \supseteq B - B \supseteq (-t, t)$).

Έστω λοιπόν A μετρήσιμο σύνολο με $0 < \lambda(A) < \infty$. Για τυχόν $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε ανοικτό σύνολο $G \supseteq A$ ώστε $\lambda(G) < (1+\varepsilon)\lambda(A)$. Μπορούμε να γράψουμε το G σαν αριθμήσιμη ένωση $G = \bigcup_{k=1}^\infty I_k$ μη επικαλυπτόμενων διαστημάτων. Θέτουμε $A_k = A \cap I_k$. Τότε,

$$\lambda(G) = \sum_{k=1}^\infty \ell(I_k) \quad \text{και} \quad \lambda(A) = \sum_{k=1}^\infty \lambda(A_k).$$

Από την $\lambda(G) < (1 + \varepsilon)\lambda(A)$ έπεται ότι: υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\ell(I_k) \leqslant (1 + \varepsilon)\lambda(A \cap I_k).$$

Παίρνοντας $\varepsilon = 1/3$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχει διάστημα I ώστε

$$\lambda(A \cap I) \geqslant \frac{3\ell(I)}{4}.$$

Θέτουμε $t = \frac{\ell(I)}{2}$. Θα δείξουμε ότι

$$(A \cap I) - (A \cap I) \supseteq (-t, t).$$

Αν αυτό δεν ισχύει, υπάρχει $s \in (-t, t)$ ώστε τα σύνολα $A \cap I$ και $(A \cap I) + s$ να είναι ξένα. Ταυτόχρονα, περιέχονται στο $I \cup (I + s)$, το οποίο είναι διάστημα μήκους $\ell(I) + |s|$. Έπεται ότι

$$2\lambda(A \cap I) = \lambda(A \cap I) + \lambda((A \cap I) + s) \leqslant \ell(I) + |s| < \frac{3\ell(I)}{2},$$

δηλαδή $\lambda(A \cap I) < \frac{3\ell(I)}{4}$, το οποίο είναι άτοπο. Έπεται ότι $A - A \supseteq (A \cap I) - (A \cap I) \supseteq (-t, t)$.

Κεφάλαιο 4

Βασικές ιδιότητες του μέτρου Lebesgue

Ομάδα Α΄.

4.1. Δείξτε ότι κάθε υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ με $\lambda^*(A) > 0$ έχει μη μετρήσιμο υποσύνολο.

Υπόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο N του Vitali. Έχουμε δει ότι αν θεωρήσουμε μια αρίθμηση $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $\mathbb{Q}$ και ορίσουμε $N_n := N + q_n$, τότε:

(α) τα σύνολα N_n είναι ξένα ανά δύο,

(β) $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$,

(γ) το σύνολο $N_n - N_n = N - N$ δεν περιέχει κανέναν ρητό $q \neq 0$.

Έστω A υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda^*(A) > 0$. Γράφουμε $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cap N_n)$ και από την υποπροσθετικότητα του λ^* έχουμε

$$0 < \lambda^*(A) = \lambda^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cap N_n)\Big) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A \cap N_n).$$

Συνεπώς, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\lambda^*(A \cap N_m) > 0$. Το $A \cap N_m$ είναι μη μετρήσιμο. Αν ήταν μετρήσιμο τότε, από το θεώρημα του Steinhaus, θα υπήρχε $\delta > 0$ τέτοιος ώστε

$$(-\delta, \delta) \subseteq (A \cap N_m) - (A \cap N_m) \subseteq N_m - N_m = N - N,$$

το οποίο είναι άτοπο αφού υπάρχουν ρητοί $q \neq 0$ στο $(-\delta, \delta)$.

4.2. Δώστε παράδειγμα Lebesgue μετρήσιμου υποσυνόλου $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ώστε το $\pi_1(A)$ να μην είναι Lebesgue μετρήσιμο, όπου $\pi_1(x, y) = x$ για $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (η προβολή στην πρώτη συντεταγμένη).

Υπόδειξη. Αν N είναι ένα μη μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ τότε θεωρήστε το σύνολο $E = \{(x, 0) : x \in N\}$ και παρατηρήστε ότι:

(α) Το E περιέχεται στην ευθεία $L = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ και $\lambda_2(L) = 0$ (εξηγήστε γιατί) άρα το E είναι Lebesgue μετρήσιμο, με $\lambda_2(E) = 0$.

(β) Το σύνολο $\pi_1(E) = N$ δεν είναι Lebesgue μετρήσιμο.

4.3. Αν C είναι το σύνολο του Cantor, δείξτε ότι $\frac{1}{4} \in C$, παρόλο που το $\frac{1}{4}$ δεν είναι άκρο κανενός από τα διαστήματα που ορίζουν το σύνολο του Cantor.

Υπόδειξη. Για κάθε $n \geqslant 1$ θεωρούμε το n-οστό σύνολο C_n της κατασκευής του C και τα 2^n κλειστά διαστήματα I_k^n, $k = 1, \ldots, 2^n$ που σχηματίζουν το C_n. Δείχνουμε με επαγωγή ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο $1/4$ βρίσκεται στο εσωτερικό κάποιου από τα I_k^n και χωρίζει το I_k^n σε δύο μέρη που έχουν λόγο $3:1$ αν ο n είναι περιττός και $1:3$ αν ο n είναι άρτιος. Έπεται ότι $\frac{1}{4} \in C$ αλλά, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο $\frac{1}{4}$ δεν είναι άκρο κανενός από τα I_k^n.

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι $x \in I_k^n = [a, b]$ και $x - a = 3(b - x)$ (εδώ, ο n είναι περιττός). Στο επόμενο βήμα, χωρίζουμε το $[a, b]$ σε τρία ίσα μέρη και κρατάμε τα $\left[a, \frac{2a+b}{3}\right]$ και $\left[\frac{2b+a}{3}, b\right]$. Παρατηρήστε ότι $x = \frac{3b+a}{4}$, άρα $\frac{2b+a}{3} < x < b$ και

$$b - x = b - \frac{3b + a}{4} = \frac{b - a}{4} = 3\Big(\frac{3b + a}{4} - \frac{2b + a}{3}\Big) = 3\Big(x - \frac{2b + a}{3}\Big).$$

4.4. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ και $\delta > 0$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $t \in (-\delta, \delta)$ ισχύει $a + t \in A$ ή $a - t \in A$. Δείξτε ότι $\lambda^*(A) \geqslant \delta$.

Υπόδειξη. Έστω $t \in (-\delta, \delta)$. Αν $a+t \in A$ τότε $t \in -a+A$ και αν $a-t \in A$ τότε $t \in a-A := \{a-x : x \in A\}$. Σε κάθε περίπτωση, $t \in (-a+A) \cup (a-A)$. Άρα, $(-\delta, \delta) \subseteq (-a+A) \cup (a-A)$ και από την υποπροσθετικότητα του λ^* παίρνουμε

$$2\delta = \lambda^*((-\delta, \delta)) \leqslant \lambda^*((-a + A) \cup (a - A)) \leqslant \lambda^*(-a + A) + \lambda^*(a - A).$$

Όμως, $\lambda^*(-a+A) = \lambda^*(a-A) = \lambda^*(A)$ από το αναλλοίωτο του λ^* ως προς μεταφορές και την $\lambda^*(\varrho \cdot A) = |\varrho|\lambda^*(A)$, $\varrho \in \mathbb{R}$. Έπεται ότι $2\delta \leqslant \lambda^*(A) + \lambda^*(A)$, δηλαδή $\lambda^*(A) \geqslant \delta$.

Ομάδα Β΄.

4.5. Έστω E, F δύο συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^k$ με $E \subset F$ και $\lambda(E) < \lambda(F)$. Δείξτε ότι για κάθε $a \in (\lambda(E), \lambda(F))$ μπορούμε να βρούμε συμπαγές σύνολο K με $E \subset K \subset F$ και $\lambda(K) = a$.

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα το εξής: αν W είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$ με $\lambda(W) > 0$, τότε, για κάθε $0 < \beta < \lambda(W)$ μπορούμε να βρούμε συμπαγές $V \subset W$ ώστε $\lambda(V) = \beta$. Πράγματι, αφού το W είναι συμπαγές, μπορούμε να βρούμε κλειστό διάστημα $[a, b] \subset \mathbb{R}$ και κλειστό διάστημα $Q \subset \mathbb{R}^{k-1}$ ώστε $W \subseteq Q_1 := [a, b] \times Q$. Ορίζουμε $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ με

$$f(t) = \lambda(W \cap \{x = (x_1, \ldots, x_k) \in Q_1 : a \leqslant x_1 \leqslant t\}).$$

Η f είναι συνεχής: δείξτε ότι

$$|f(t) - f(s)| \leqslant \lambda_{k-1}(Q)\,|t - s|.$$

Αφού $f(a) = 0$ και $f(b) = \lambda(W)$, ο ισχυρισμός έπεται από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής.

Έστω τώρα E και F δύο συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^k$ με $E \subset F$ και $\lambda(E) < \lambda(F)$. Έστω $\alpha \in (\lambda(E), \lambda(F))$. Αφού $\alpha - \lambda(E) < \lambda(F \setminus E)$, μπορούμε να βρούμε συμπαγές σύνολο $W \subseteq F \setminus E$ με $\lambda(W) > \alpha - \lambda(E)$. Εφαρμόζοντας τον ισχυρισμό, βρίσκουμε συμπαγές $V \subset W$ ώστε $\lambda(V) = \alpha - \lambda(E)$. Αν θέσουμε $K = E \cup V$, έχουμε ότι το K είναι συμπαγές, $E \subset K \subset F$ και $\lambda(K) = \alpha$.

4.6. Έστω $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Δείξτε ότι:

(α) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ακολουθία $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ ανοικτών διαστημάτων ώστε

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) < \varepsilon.$$

(β) Για κάθε πεπερασμένη ακολουθία $\{I_n\}_{n=1}^{m}$ ανοικτών διαστημάτων με

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{m} I_n \quad \text{ισχύει} \quad \sum_{n=1}^{m} \lambda(I_n) \geqslant 1.$$

Υπόδειξη. (α) Το A είναι άπειρο αριθμήσιμο σύνολο, άρα μπορούμε να το γράψουμε στη μορφή $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $I_n = \left(a_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, a_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}\right)$. Τότε, $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

(β) Έστω ότι $I_n = (a_n, b_n)$, $1 \leqslant n \leqslant m$. Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και ορίζουμε $T_n = (a_n - \varepsilon, b_n + \varepsilon)$, $1 \leqslant n \leqslant m$. Παρατηρήστε ότι, αφού $A = \mathbb{Q} \cap [0,1] \subseteq I_1 \cup \cdots \cup I_m$,

$$[0,1] = \overline{A} \subseteq \overline{I_1 \cup \cdots \cup I_m} = \overline{I_1} \cup \cdots \cup \overline{I_m} \subseteq T_1 \cup \cdots \cup T_m.$$

Έπεται (το έχουμε δεί στη θεωρία) ότι

$$1 = \ell([0,1]) \leqslant \sum_{n=1}^{m} \ell(T_n) = \sum_{n=1}^{m} (\ell(I_n) + 2\varepsilon) = 2m\varepsilon + \sum_{n=1}^{m} \lambda(I_n).$$

Το πλήθος m των διαστημάτων είναι σταθερό. Αφήνοντας το $\varepsilon \to 0$ έχουμε το ζητούμενο.

4.7. Έστω $\{q_n\}_{n\geqslant 1}$ μια αρίθμηση των ρητών αριθμών. Δείξτε ότι υπάρχει ένα σύνολο B με $\lambda(B) = 0$ ώστε κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus B$ να έχει την εξής ιδιότητα: υπάρχει $k = k(x) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \geqslant k$ να ισχύει $|x - q_n| \geqslant 1/n^2$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο B των $x \in \mathbb{R}$ που δεν έχουν αυτή την ιδιότητα. Τότε, $x \in B$ αν και μόνο αν για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n \geqslant k$ ώστε $|x - q_n| < 1/n^2$. Δηλαδή,

$$B = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} : |x - q_n| < 1/n^2\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} (q_n - 1/n^2, q_n + 1/n^2).$$

Έπεται ότι, για κάθε $k \in \mathbb{N}$,

$$\lambda(B) \leqslant \lambda\Big(\bigcup_{n=k}^{\infty} (q_n - 1/n^2, q_n + 1/n^2)\Big) \leqslant \sum_{n=k}^{\infty} \lambda((q_n - 1/n^2, q_n + 1/n^2)) = 2 \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Αφού $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$ έχουμε $\lim\limits_{k\to\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, άρα $\lambda(B) = 0$.

4.8. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση, η οποία είναι Lipschitz συνεχής σε κάθε κλειστό διάστημα $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

(i) Δείξτε ότι η f απεικονίζει σύνολα μηδενικού μέτρου Lebesgue σε σύνολα μηδενικού μέτρου Lebesgue.

(ii) Δείξτε ότι η f απεικονίζει Lebesgue μετρήσιμα σύνολα σε Lebesgue μετρήσιμα σύνολα.

(β) Είναι σωστό ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ απεικονίζει Lebesgue μετρήσιμα σύνολα σε Lebesgue μετρήσιμα σύνολα;

Υπόδειξη. (α) (i) Από την υπόθεση, για κάθε $k\in\mathbb{N}$ υπάρχει σταθερά $C_k>0$ τέτοια ώστε η $f:[-k,k]\to\mathbb{R}$ να είναι συνάρτηση Lipschitz με σταθερά C_k, δηλαδή $|f(x)-f(y)|\leqslant C_k|x-y|$ για κάθε $x,y\in[-k,k]$. Θα δείξουμε ότι

$$\lambda^*(f(A))\leqslant C_{k+1}\lambda^*(A)$$

για κάθε $A\subseteq[-k,k]$. Έστω $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια κάλυψη του A από ανοικτά διαστήματα. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $A\cap I_n\neq\varnothing$ και ότι $I_n\subseteq[-(k+1),k+1]$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ (εξηγήστε γιατί). Αν $x,y\in A\cap I_n$, τότε

$$|f(x)-f(y)|\leqslant C_{k+1}|x-y|\leqslant C_{k+1}\ell(I_n).$$

Συνεπώς, $\mathrm{diam}(f(A\cap I_n))\leqslant C_{k+1}\ell(I_n)$. Έπεται ότι το σύνολο $f(A\cap I_n)$ περιέχεται σε διάστημα J_n μήκους $\ell(J_n)\leqslant C_{k+1}\ell(I_n)$ (εξηγήστε γιατί). Η $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι κάλυψη του $f(A)$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ell(J_n)\leqslant C_{k+1}\sum_{n=1}^{\infty}\ell(I_n).$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\lambda^*(f(A))&=\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\ell(J_n):f(A)\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}J_n\right\}\leqslant\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}C_{k+1}\ell(I_n):A\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\right\}\\&=C_{k+1}\lambda^*(A).\end{aligned}$$

Έστω τώρα $B\subseteq\mathbb{R}$ με $\lambda(B)=0$. Για κάθε $k\in\mathbb{N}$ ορίζουμε $B_k=B\cap[-k,k]$. Τότε, $\lambda^*(f(B_k))\leqslant C_{k+1}\lambda^*(B_k)=0$, δηλαδή $\lambda^*(f(B_k))=0$. Ειδικότερα, κάθε $f(B_k)$ είναι μετρήσιμο. Η $\{f(B_k)\}_{k=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ και $f(B)=\bigcup_{k=1}^{\infty}f(B_k)$. Έπεται ότι

$$\lambda(f(B))=\lim_{k\to\infty}\lambda(f(B_k))=0.$$

(ii) Έστω A Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν F_σ σύνολο $H\subseteq\mathbb{R}$ και $B\subseteq\mathbb{R}$ με $\lambda(B)=0$ ώστε $A=H\cup B$. Παρατηρούμε επίσης ότι το H μπορεί να γραφτεί στη μορφή $H=\bigcup_{n=1}^{\infty}K_n$, όπου κάθε K_n είναι συμπαγές σύνολο (εξηγήστε γιατί). Αφού η f είναι συνεχής, κάθε $f(K_n)$ είναι συμπαγές, και ειδικότερα μετρήσιμο, σύνολο. Από το (i) έχουμε ότι το $f(B)$ είναι μετρήσιμο και $\lambda(f(B))=0$. Τώρα,

$$f(A)=f(H\cup B)=f(H)\cup f(B)=\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}f(K_n)\Big)\cup f(B),$$

άρα το $f(A)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο ως αριθμήσιμη ένωση Lebesgue μετρήσιμων συνόλων.

(β) Έχουμε δεί ότι αυτό δεν είναι σωστό. Θεωρούμε την συνάρτηση $g:[0,1]\to[0,2]$ με $g(x)=f(x)+x$, όπου f η συνάρτηση Cantor–Lebesgue. Η g είναι γνησίως αύξουσα, συνεχής και επί.

Το σύνολο $g(C)$ είναι μετρήσιμο και $\lambda(g(C)) = 1$, συνεπώς υπάρχει μη μετρήσιμο υποσύνολο M του $g(C)$. Τότε, το $K = g^{-1}(M)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο διότι είναι υποσύνολο του C και $g(K) = M$, δηλαδή το $g(K)$ δεν είναι μετρήσιμο.

4.9. Έστω G μη κενό, φραγμένο, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$.

(α) Δείξτε ότι δεν υπάρχει αριθμήσιμο κάλυμμα $\{B_j\}$ του G από ανοικτές μπάλες ώστε κάθε σημείο του G να ανήκει σε άπειρες το πλήθος B_j και $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(B_j) < \infty$.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $\{B_j\}$ ανοικτών μπαλών η οποία καλύπτει το G όπως στο (α) και για κάθε $p > 1$ να ισχύει $\sum_{j=1}^{\infty} (\lambda(B_j))^p < \infty$.

Υπόδειξη. (α) Έστω ότι υπάρχει αριθμήσιμη κάλυψη $\{B_j\}$ του G από ανοικτές μπάλες ώστε κάθε σημείο του G να ανήκει σε άπειρες το πλήθος B_j και $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(B_j) < \infty$. Τότε, η πρώτη υπόθεση μας λέει ότι

$$G \subseteq \limsup_j B_j.$$

Από τη δεύτερη υπόθεση και από το λήμμα Borel-Cantelli (Άσκηση 2.3) έχουμε ότι $\lambda\left(\limsup_j B_j\right) = 0$. Άρα, $\lambda(G) = 0$. Αυτό είναι άτοπο, αφού το G έχει μη κενό εσωτερικό.

(β) Το G είναι φραγμένο, άρα περιέχεται σε έναν κύβο Q με μήκος ακμής a. Θέτουμε $Q_1^0 = Q$.

Διχοτομούμε κάθε ακμή του Q_1^0, και παίρνουμε 2^k κλειστούς κύβους $Q_i^1, i = 1, \dots 2^k$. Αν x_i^1 είναι το κέντρο του Q_i^1, θέτουμε $B_i^1 = B\left(x_i^1, \frac{3a\sqrt{k}}{2}\right)$. Τότε $Q_i^1 \subseteq B_i^1$ για κάθε $i = 1, \dots 2^k$.

Συνεχίζουμε επαγωγικά, διχοτομώντας τις ακμές κάθε κύβου του προηγούμενου βήματος. Στο n-οστό βήμα παίρνουμε 2^{kn} μπάλες, καθεμία από τις οποίες έχει ακτίνα $\frac{3a\sqrt{k}}{2^n}$, άρα το άθροισμα των p δυνάμεων των μέτρων αυτών των μπαλών φράσσεται από

$$[\lambda(B_k)]^p 2^{kn} \left(\frac{3a\sqrt{k}}{2^n}\right)^{kp} = [\lambda(B_k)]^p (3a\sqrt{k})^{kp} 2^{nk(1-p)},$$

όπου B_k είναι η Ευκλείδεια μπάλα ακτίνας 1. Παρατηρήστε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, κάθε σημείο του Q ανήκει σε κάποιον κύβο του n-οστού βήματος, άρα και σε μία μπάλα του n-οστού βήματος. Αν θεωρήσουμε την συλλογή όλων των μπαλών που ορίζονται με αυτόν τον τρόπο σε οποιοδήποτε βήμα, έχουμε μια κάλυψη $\{B_j\}_j$ του Q, άρα και του G, με την ιδιότητα ότι κάθε $x \in G$ ανήκει σε άπειρες B_j. Τέλος, το άθροισμα της σειράς των p-δυνάμεων των μέτρων αυτών των μπαλών φράσσεται από

$$[\lambda(B_k)]^p (3a\sqrt{k})^{kp} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{k(1-p)n} < \infty,$$

αφού $2^{k(1-p)} < 1$.

4.10. Έστω A το υποσύνολο του $[0,1]$ που αποτελείται από όλους τους αριθμούς που το δεκαδικό τους ανάπτυγμα δεν περιέχει το ψηφίο 4. Δείξτε ότι το A είναι Lebesgue μετρήσιμο και βρείτε το $\lambda(A)$.

Υπόδειξη. Μιμούμαστε την κατασκευή του συνόλου του Cantor. Θεωρούμε το διάστημα $I^0 = [0,1]$ και το χωρίζουμε σε δέκα ίσα διαστήματα. Αφαιρούμε το τέταρτο κλειστό διάστημα $\left[\frac{4}{10}, \frac{5}{10}\right]$. Ονομάζουμε I^1 το σύνολο που απομένει, το οποίο αποτελείται από εννέα διαστήματα μήκους $\frac{1}{10}$.

Χωρίζουμε καθένα από αυτά σε δέκα ίσα διαστήματα και αφαιρούμε το τέταρτο κλειστό διάστημα. Ονομάζουμε I^2 το σύνολο που απομένει. Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, κατασκευάζουμε για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ ένα σύνολο I^n έτσι ώστε η ακολουθία (I^n) να έχει τις εξής ιδιότητες:

1. $I^n \supset I^{n+1}$ για κάθε $n \geqslant 0$.

2. Το I^n είναι η ένωση 9^n διαστημάτων, καθένα από τα οποία έχει μήκος $\frac{1}{10^n}$.

Ορίζουμε $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} I^n$. Το C είναι μετρήσιμο και από την $\lambda(I^n) = 9^n/10^n$ έπεται ότι $\lambda(C) = 0$. Παρατηρήστε ότι το $x \in [0,1]$ δεν έχει δεκαδικό ανάπτυγμα που να περιέχει το ψηφίο 4 αν και μόνο αν $x \in C$.

4.11. Αν C είναι το σύνολο του Cantor, δείξτε ότι $C - C = [-1,1]$ και συνεπώς δεν ισχύει το αντίστροφο του Θεωρήματος Steinhaus.

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι $C + C = [0,2]$. Έστω $z \in [0,2]$. Τότε,

$$\frac{z}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon_k}{3^k}, \qquad \epsilon_k \in \{0,1,2\}.$$

Ορίζουμε $(a_k, b_k) = (0,0), (2,0)$ ή $(2,2)$ αν $\epsilon_k = 0, 1$ ή 2 αντίστοιχα, και θεωρούμε τους

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k} \quad \text{και} \quad y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{3^k}.$$

Τότε, $x, y \in C$ και

$$\frac{x+y}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k + b_k}{2} \cdot \frac{1}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon_k}{3^k} = \frac{z}{2},$$

δηλαδή $z = x + y \in C + C$. Ο άλλος εγκλεισμός, $C + C \subseteq [0,2]$, είναι άμεσος αφού $C \subseteq [0,1]$.

Παρατηρήστε τώρα ότι το C είναι συμμετρικό ως προς το $\frac{1}{2}$: Έχουμε $x \in C$ αν και μόνο αν $1 - x \in C$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} C - C &= \{x - y \mid x, y \in C\} = \{x - (1 - y) \mid x, y \in C\} = \{x + y - 1 \mid x, y \in C\} \\ &= -1 + (C + C) = -1 + [0,2] = [-1,1]. \end{aligned}$$

4.12. Έστω $\theta \in (0,1)$. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία κατασκευής του συνόλου του Cantor με τη διαφορά ότι στο n-οστό βήμα αφαιρούμε κεντρικό ανοιχτό διάστημα μήκους $\theta/3^n$ από κάθε διάστημα που έχει απομείνει στο $(n-1)$-οστό βήμα. Καταλήγουμε σε ένα σύνολο C_θ «τύπου Cantor». Δείξτε ότι:

(α) Το C_θ είναι τέλειο και δεν περιέχει ανοιχτά διαστήματα.

(β) Το C_θ είναι υπεραριθμήσιμο.

(γ) Το C_θ είναι μετρήσιμο και $\lambda(C_\theta) = 1 - \theta > 0$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε το διάστημα $I^{(0)} = [0,1]$ και το χωρίζουμε σε τρία διαστήματα: το μεσαίο έχει μήκος $\frac{\theta}{3}$ και τα άλλα δύο έχουν το ίδιο μήκος. Αφαιρούμε το ανοικτό μεσαίο διάστημα και ονομάζουμε $I^{(1)}$ το σύνολο που απομένει. Το $I^{(1)}$ είναι προφανώς κλειστό σύνολο, και $\lambda(I^{(1)}) = 1 - \frac{\theta}{3}$. Χωρίζουμε καθένα από τα δύο διαστήματα που σχηματίζουν το $I^{(1)}$ σε τρία διαστήματα: το μεσαίο έχει μήκος $\frac{\theta}{3^2}$

και τα άλλα δύο έχουν το ίδιο μήκος. Κατόπιν, αφαιρούμε το μεσαίο ανοικτό διάστημα. Ονομάζουμε $I^{(2)}$ το σύνολο που απομένει. Το $I^{(2)}$ είναι προφανώς κλειστό σύνολο, και

$$\lambda(I^{(2)}) = \lambda(I^{(1)}) - 2\frac{\theta}{3^2} = 1 - \frac{\theta}{3} - 2\frac{\theta}{3^2}.$$

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, κατασκευάζουμε για κάθε $n = 1, 2, \dots$ ένα κλειστό σύνολο $I^{(n)}$ έτσι ώστε η ακολουθία $(I^{(n)})$ να έχει τις εξής ιδιότητες:

1. $I^{(n)} \supset I^{(n+1)}$ για κάθε $n \geqslant 0$.

2. Το $I^{(n)}$ είναι η ένωση 2^n κλειστών διαστημάτων που έχουν το ίδιο μήκος.

3. $\lambda(I^{(n)}) = 1 - \frac{\theta}{3} - 2\frac{\theta}{3^2} - \cdots - 2^{n-1}\frac{\theta}{3^n}$.

Τέλος, ορίζουμε

$$C_\theta = \bigcap_{n=0}^{\infty} I^{(n)}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lambda(C_\theta) = \lim_{n\to\infty} \lambda(I^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} \Big[1 - \theta\Big(1 - (2/3)^{n-1}\Big)\Big] = 1 - \theta.$$

Αν $I_k^{(n)}$ είναι κάποιο από τα κλειστά διαστήματα που σχηματίζουν το $I^{(n)}$, τότε το μήκος του $I_k^{(n)}$ είναι ίσο με $\frac{1}{2^n}\Big[1 - \theta\Big(1 - (2/3)^{n-1}\Big)\Big] \to 0$. Χρησιμοποιώντας αυτή την πληροφορία και δουλεύοντας όπως στην περίπτωση του κλασικού συνόλου του Cantor, μπορούμε να δείξουμε ότι το C_θ είναι τέλειο και δεν περιέχει διαστήματα.

4.13. Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$ και έστω $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ γραμμική απεικόνιση. Δείξτε ότι το $T(E)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο.

Υπόδειξη. Δείξτε διαδοχικά τα εξής:

1. Αν το $F \subseteq \mathbb{R}^k$ είναι συμπαγές τότε το $T(F)$ είναι συμπαγές.

2. Αν το $E \subseteq \mathbb{R}^k$ είναι F_σ–σύνολο τότε το E μπορεί να γραφτεί σαν αριθμήσιμη ένωση συμπαγών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^k$. Από το προηγούμενο βήμα, το $T(E)$ είναι F_σ–σύνολο.

3. Η T είναι Lipschitz συνεχής συνάρτηση: υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|T(x) - T(y)\|_2 \leqslant M\,\|x - y\|_2$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^k$.

4. Αν R είναι ένας κύβος (διάστημα με ισομήκεις ακμές) στον $\mathbb{R}^k$, τότε το $T(R)$ περιέχεται σε μια μπάλα ακτίνας το πολύ ίσης με $\frac{M\cdot d}{2} = \frac{M\sqrt{k}\alpha}{2}$ όπου d η διάμετρος και α η ακμή του R. Δηλαδή, υπάρχει $c = c(M, k) > 0$ ώστε το $T(R)$ να περιέχεται σε κύβο ακμής $c\alpha$. Έπεται ότι $\lambda(T(R)) \leqslant c^k\lambda(R)$.

5. Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο βήμα και την παρατήρηση ότι για τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου του A αρκεί να θεωρήσουμε καλύψεις του A με κύβους, δείξτε ότι αν $\lambda(A) = 0$ τότε $\lambda(T(A)) = 0$.

Γράφοντας το τυχόν μετρήσιμο σύνολο σαν ένωση ενός F_σ–συνόλου και ενός συνόλου μέτρου 0 παίρνουμε άμεσα το ζητούμενο.

Ομάδα Γ΄.

4.14. Για κάθε $A \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$ και $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$\rho(A,x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\lambda(A\cap(x-t,x+t))}{2t},$$

αν αυτό το όριο υπάρχει. Το όριο $\rho(A,x)$ είναι η *μετρική πυκνότητα* του A στο σημείο x.

(α) Δείξτε ότι $\rho(\mathbb{Q},x)=0$ και $\rho(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(β) Έστω $0<\alpha<1$. Κατασκευάστε σύνολο $A\subseteq\mathbb{R}$ με την ιδιότητα $\rho(A,0)=\alpha$.

Υπόδειξη. (α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και για κάθε $t>0$ έχουμε

$$\lambda(\mathbb{Q}\cap(x-t,x+t))=0 \ \text{ και } \ \lambda((\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap(x-t,x+t))=2t.$$

[Παρατηρήστε ότι τα δύο σύνολα είναι ξένα, έχουν ένωση το $(x-t,x+t)$, και το πρώτο είναι αριθμήσιμο ως υποσύνολο του $\mathbb{Q}$.] Έπεται ότι

$$\rho(\mathbb{Q},x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\lambda(\mathbb{Q}\cap(x-t,x+t))}{2t} = 0$$

και

$$\rho(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\lambda((\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap(x-t,x+t))}{2t} = \lim_{t\to 0^+}\frac{2t}{2t}=1.$$

(β) Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ορίζουμε

$$C_n = \left(-\frac{1}{n},-\frac{1}{n+1}\right]\cup\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right).$$

Στη συνέχεια επιλέγουμε μετρήσιμο $A_n\subset C_n$ ώστε $\lambda(A_n)=\alpha\lambda(C_n)$ (το C_n είναι απλό σύνολο και η επιλογή του A_n δεν παρουσιάζει δυσκολίες – θυμηθείτε όμως και την Άσκηση 3.6). Ορίζουμε

$$A=\bigcup_{n=1}^\infty A_n.$$

Παρατηρήστε ότι, αν $\frac{1}{n+1}\leqslant t<\frac{1}{n}$, τότε

$$\frac{\lambda(A\cap(-t,t))}{2t} \leqslant \frac{\lambda(A\cap(-1/n,1/n))}{2/(n+1)} = \frac{2\alpha/n}{2/(n+1)} = \alpha\frac{n+1}{n}\leqslant \alpha(1+2t),$$

και

$$\begin{aligned}\frac{\lambda(A\cap(-t,t))}{2t} &\geqslant \frac{\lambda(A\cap(-1/(n+1),1/(n+1)))}{2/n} = \frac{2\alpha/(n+1)}{2/n}\\ &= \alpha\frac{n}{n+1}\geqslant\alpha(1-2t).\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\lambda(A\cap(-t,t))}{2t}=\alpha,$$

δηλαδή $\rho(A,0)=\alpha$.

4.15. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $\{A_n\}$ ξένων ανά δύο υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ ώστε

$$\lambda^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) < \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n).$$

Υπόδειξη. Πρώτος τρόπος. Ορίζουμε την εξής σχέση ισοδυναμίας στο $[0,1]$:

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}.$$

Αν $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ είναι η οικογένεια των κλάσεων ισοδυναμίας της $\sim$, ορίζουμε, με χρήση του αξιώματος της επιλογής, ένα σύνολο $E \subset [0,1]$ το οποίο περιέχει ακριβώς ένα σημείο από κάθε F_α. Θεωρούμε μια αρίθμηση $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ των ρητών του $[-1,1]$ και ορίζουμε $E_n = q_n + E$. Από τον τρόπο ορισμού του E ελέγχουμε ότι τα E_n είναι ξένα ανά δύο και ότι

$$[0,1] \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq [-1,2].$$

Παρατηρήστε ότι

$$\lambda^*(E_n) = \lambda^*(E) > 0$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αλλιώς, θα είχαμε

$$1 = \lambda([0,1]) \leqslant \lambda^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = 0.$$

Άρα,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(E_n) = +\infty > 3 = \lambda([-1,2]) \geqslant \lambda^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big).$$

Δεύτερος τρόπος. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει μη μετρήσιμο σύνολο $A \subset \mathbb{R}$. Συνεπώς, υπάρχει $E \subset \mathbb{R}$ ώστε

$$\lambda^*(E) < \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap A^c).$$

Θεωρήστε τα σύνολα $E_1 = E \cap A$, $E_2 = E \cap A^c$, $E_3 = E_4 = \cdots = \emptyset$.

4.16. Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $0 < \lambda(E) < \infty$.

(α) Δείξτε ότι

$$\lim_{t\to 0} \lambda(E \cap (E+t)) = \lambda(E).$$

(β) Δείξτε ότι, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, υπάρχουν $x, s \in \mathbb{R}$ ώστε

$$x, x+s, x+2s, \dots, x+(k-1)s \in E.$$

Υπόδειξη. (α) Παρατηρούμε αρχικά ότι $\lambda(E \cup E+t) \leqslant \lambda(E) + \lambda(E+t) = 2\lambda(E) < \infty$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και

$$\lambda(E \cap (E+t)) = \lambda(E) + \lambda(E+t) - \lambda(E \cup (E+t)) = 2\lambda(E) - \lambda(E \cup (E+t)),$$

συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{t\to 0} \lambda(E \cup (E+t)) = \lambda(E).$$

Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$. Υπάρχει κάλυψη του E με φραγμένα ανοικτά διαστήματα (I_n) τέτοια ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) < \lambda(E) + \varepsilon.$$

Παρατηρήστε ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$E \cup (E+t) \subseteq \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (I_n + t)\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \cup (I_n + t).$$

Μπορούμε επίσης να βρούμε $N \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda(I_n) < \varepsilon.$$

Θέτουμε $\theta := \min\{\lambda(I_1), \dots, \lambda(I_N)\}$ και παρατηρούμε ότι αν $|t| < \theta$ τότε το $I_n \cup (I_n + t)$ περιέχεται σε διάστημα J_n μήκους $\lambda(I_n) + |t|$ διότι τα I_n και $I_n + t$ τέμνονται. Επιλέγουμε $0 < \delta < \min\{\theta, \varepsilon/N\}$ και για κάθε $t \in (-\delta, \delta)$ γράφουμε

$$\begin{aligned} \lambda(E) &\leqslant \lambda(E \cup (E+t))\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \cup (I_n + t)\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n \cup (I_n + t)) \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{N} \lambda(J_n) + \sum_{n=N+1}^{\infty} (\lambda(I_n) + \lambda(I_n + t)) = \sum_{n=1}^{N} \lambda(J_n) + 2\sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda(I_n) \\ &\leqslant \delta \cdot N + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda(I_n) < \lambda(E) + 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $\lim_{t\to 0} \lambda(E \cup (E+t)) = \lambda(E)$, και έπεται το ζητούμενο.

(β) Αφού $\lambda(E) > 0$, χρησιμοποιώντας την Άσκηση 3.13 βλέπουμε ότι υπάρχει διάστημα $[a, b]$ ώστε

$$\lambda(E \cap [a, b]) > \frac{k-1}{k}(b-a).$$

Θέτουμε $A = E \cap [a, b]$. Χωρίζουμε το $[a, b)$ σε k διαδοχικά ημιανοικτά διαστήματα μήκους $s := \frac{b-a}{k}$:

$$I_1 = [a, a+s), \quad I_2 = [a+s, a+2s), \quad \dots \quad , \quad I_k = [a + (k-1)s, b),$$

και για κάθε $j = 1, \dots, k$ ορίζουμε $A_j = A \cap I_j$. Κατόπιν, για κάθε $j = 1, \dots, k$ θέτουμε $B_j = A_j - (j-1)s$. Παρατηρήστε ότι $B_j \subseteq I_1 = [a, a+s)$ για κάθε $j = 1, \dots, k$ και $B_1 = A_1$. Θα δείξουμε ότι

$$(*) \qquad \bigcap_{j=1}^{k} B_j \neq \varnothing.$$

Τότε, αν πάρουμε κάποιο $x \in \bigcap_{j=1}^{k} B_j$ θα έχουμε ότι $x \in B_j = A_j - (j-1)s$ δηλαδή $x + (j-1)s \in A_j$ για κάθε $j = 1, \dots, k$. Αφού $A_j \subseteq A \subseteq E$ για κάθε j, έπεται ότι

$$x, x+s, x+2s, \dots, x+(k-1)s \in E.$$

Για την απόδειξη της (∗) γράφουμε

$$\begin{aligned}
\lambda\Big(I_1 \setminus \bigcap_{j=1}^{k} B_j\Big) &= \lambda\Big(\bigcup_{j=1}^{k}(I_1 \setminus B_j)\Big) \leqslant \sum_{j=1}^{k} \lambda(I_1 \setminus B_j) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \lambda((I_1 + (j-1)s) \setminus (B_j + (j-1)s)) = \sum_{j=1}^{k} \lambda(I_j \setminus A_j) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \lambda(I_j \setminus (A \cap I_j)) = \sum_{j=1}^{k} \lambda(I_j \cap A^c) = \lambda([a,b] \setminus A) \\
&< \frac{1}{k}(b-a) = \lambda(I_1).
\end{aligned}$$

Άρα, το $I_1 \setminus \bigcap_{j=1}^{k} B_j$ είναι γνήσιο υποσύνολο του I_1, και έπεται η (∗).

4.17. Έστω μ ένα μη αρνητικό μέτρο στα Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με $\mu(\mathbb{R}) = 1$. Δείξτε ότι υπάρχει κλειστό υποσύνολο F του $\mathbb{R}$ με $\mu(F) = 1$ και την εξής ιδιότητα: για κάθε κλειστό σύνολο E που περιέχεται γνήσια στο F ισχύει $\mu(F) < 1$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο

$$G = \{x \in \mathbb{R} : \text{ υπάρχει } \delta_x > 0 \text{ ώστε } \mu((x-\delta_x, x+\delta_x)) = 0\}.$$

Παρατηρήστε ότι το G είναι ανοικτό: αν $x \in G$ τότε παίρνουμε $\delta_x > 0$ ώστε $\mu((x-\delta_x, x+\delta_x)) = 0$ και βλέπουμε ότι $(x-\delta_x, x+\delta_x) \subseteq G$, άρα $x \in G^\circ$. [Πράγματι, αν $y \in (x-\delta_x, x+\delta_x)$ τότε μπορούμε να βρούμε $\delta_y > 0$ ώστε $(y-\delta_y, y+\delta_y) \subseteq (x-\delta_x, x+\delta_x)$ και από τη μονοτονία του μέτρου έπεται ότι $\mu((y-\delta_y, y+\delta_y)) = 0$, άρα $y \in G$.]

Παρατηρούμε επίσης ότι το G γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση ανοικτών διαστημάτων I_n με $\mu(I_n) = 0$, απ' όπου έπεται ότι $\mu(G) = 0$. [Πράγματι, αν $x \in G$ τότε παίρνουμε $\delta_x > 0$ ώστε $\mu((x-\delta_x, x+\delta_x)) = 0$ και βρίσκουμε ανοικτό διάστημα I_x με άκρα στο $\mathbb{Q}$ τέτοιο ώστε $x \in I_x \subseteq (x-\delta_x, x+\delta_x)$. Τότε, όπως πριν έχουμε $x \in I_x$ και $I_x \subseteq G$. Άρα, $G = \bigcup_{x\in G} I_x$ και αυτή η ένωση είναι αριθμήσιμη διότι το $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο.]

Ορίζουμε τώρα $F = \mathbb{R} \setminus G$. Το F είναι κλειστό σύνολο και

$$\mu(F) = \mu(\mathbb{R}) - \mu(G) = 1 - 0 = 1.$$

Έστω E κλειστό σύνολο το οποίο περιέχεται γνήσια στο F. Επιλέγουμε $x \in F \setminus E$. Έχουμε $x \notin G$, άρα για κάθε $\delta > 0$ ισχύει ότι $\mu((x-\delta, x+\delta)) > 0$. Αφού $x \notin E$ και το E είναι κλειστό, μπορούμε να βρούμε $\delta_0 > 0$ ώστε $(x-\delta_0, x+\delta_0) \cap E = \varnothing$. Τότε,

$$1 = \mu(\mathbb{R}) \geqslant \mu(E) + \mu((x-\delta_0, x+\delta_0)) > \mu(E).$$

4.18. Έστω E, F δύο Lebesgue μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}^k$ με $\lambda(E) > 0$ και $\lambda(F) > 0$. Δείξτε ότι το $E+F$ περιέχει διάστημα.

Υπόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα E και F έχουν πεπερασμένο και θετικό μέτρο. Μπορούμε να βρούμε αριθμήσιμη ένωση $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ διαστημάτων, που οι κορυφές τους έχουν ρητές συντεταγμένες, ώστε $E \subseteq G$ και

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \leqslant \frac{4}{3}\lambda(E) \leqslant \frac{4}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(E \cap I_k).$$

Έπεται ότι υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\ell(I_k) \leqslant \frac{4}{3}\lambda(E \cap I_k).$$

Εφαρμόζοντας το ίδιο επιχείρημα και στο F, καταλήγουμε στο εξής: υπάρχουν διαστήματα I_0 και J_0 με ρητά άκρα, ώστε

$$(*) \qquad \lambda(E \cap I_0) \geqslant \frac{3}{4}\lambda(I_0) \quad \text{και} \quad \lambda(F \cap J_0) \geqslant \frac{3}{4}\lambda(J_0).$$

Αφού τα μήκη των I_0 και J_0 είναι ρητοί αριθμοί, μπορούμε να βρούμε $m, n \in \mathbb{N}$ ώστε τα I_0 και J_0 να χωρίζονται σε m και n διαδοχικά διαστήματα αντίστοιχα, που όλα έχουν το ίδιο μήκος. Χρησιμοποιώντας και την $(*)$ βλέπουμε τώρα ότι υπάρχουν διαστήματα I_1 και J_1 που έχουν το ίδιο μήκος, ώστε

$$\lambda(E \cap I_1) \geqslant \frac{3}{4}\lambda(I_1) \quad \text{και} \quad \lambda(F \cap J_1) \geqslant \frac{3}{4}\lambda(J_1).$$

Με άλλα λόγια, υπάρχει διάστημα I με κέντρο το 0 και υπάρχουν $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\lambda((E - x) \cap I) \geqslant \frac{3}{4}\lambda(I) \quad \text{και} \quad \lambda((F - y) \cap I) \geqslant \frac{3}{4}\lambda(I).$$

Έπεται (θυμηθείτε και την Άσκηση 3.21) ότι

$$\lambda((E - x) \cap (F - y) \cap I) \geqslant \frac{1}{2}\lambda(I) > 0.$$

Θέτουμε $C = (E - x) \cap (F - y)$. Από το Λήμμα του Steinhaus, το $C - C$ περιέχει διάστημα με κέντρο το 0. Αφού

$$E - F - (x + y) = (E - x) - (F - y) \supseteq C - C,$$

συμπεραίνουμε ότι το $E - F$ περιέχει διάστημα. Αντικαθιστώντας το F με το $-F$ παίρνουμε το ζητούμενο.

4.19. Αποδείξτε ότι: αν $\lambda(E) > 0$ και για κάθε $x, y \in E$ έπεται ότι $\frac{1}{2}(x + y) \in E$, τότε το E έχει μη κενό εσωτερικό.

Υπόδειξη. Θεωρούμε το $\frac{E}{2} = \left\{\frac{x}{2} : x \in E\right\}$. Αφού το E έχει θετικό μέτρο, το $\frac{E}{2}$ είναι μετρήσιμο και έχει θετικό μέτρο:

$$\lambda\Big(\frac{E}{2}\Big) = \frac{\lambda(E)}{2} > 0.$$

Από την Άσκηση 4.18, το σύνολο $\frac{E}{2} + \frac{E}{2}$ περιέχει κάποιο διάστημα.

Όμως, από την υπόθεση έπεται άμεσα ότι $\frac{E}{2} + \frac{E}{2} \subseteq E$. Άρα, το E περιέχει διάστημα. Ειδικότερα, έχει μη κενό εσωτερικό.

4.20. Έστω E το σύνολο των $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η ακολουθία $\{\sin(2^n x)\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει. Να δείξετε ότι $\lambda(E) = 0$.

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι αν $\sin(2^n x) \to a$ τότε $a = 0$. Πράγματι, αν $\sin(2^n x) \to a \neq 0$ τότε, για μεγάλα n, έχουμε $\sin(2^n x) \neq 0$, άρα

$$\cos(2^n x) = \frac{\sin(2^{n+1}x)}{2\sin(2^n x)} \to \frac{1}{2}.$$

Όμως, τότε

$$\sin^2(2^n x) = \frac{1-\cos(2^{n+1}x)}{2} \to \frac{1}{4},$$

άρα

$$1 = \cos^2(2^n x) + \sin^2(2^n x) \to \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

το οποίο είναι άτοπο. Άρα, το σύνολο A των $x \in [0, 2\pi)$ για τα οποία η ακολουθία $\{\sin(2^n x)\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει είναι το

$$A = \{x \in [0, 2\pi) : \sin(2^n x) \to 0\}.$$

Το A είναι μετρήσιμο: θέτουμε $f_k(x) = \sin(2^k x)$, και $A_{k,m} = \left\{x \in [0, 2\pi) : |f_k(x)| < \frac{1}{m}\right\}$. Για κάθε $k, m \in \mathbb{N}$ η f_k είναι συνεχής, άρα το $A_{k,m}$ είναι ανοικτό στο $[0, 2\pi)$, και μπορούμε να δούμε ότι

$$A = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_{k,m}.$$

Άρα, το A είναι μετρήσιμο.

Υποθέτουμε ότι $\lambda(A) > 0$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Παρατηρούμε ότι αν $x, y \in A$ τότε

$$\sin\left(2^n \frac{x+y}{2}\right) = \sin(2^{n-1}x)\cos(2^{n-1}y) + \cos(2^{n-1}x)\sin(2^{n-1}y) \to 0,$$

συνεπώς $\frac{x+y}{2} \in A$. Από την Άσκηση 4.19, το A, άρα και το $\frac{1}{2\pi}A \subseteq [0, 1]$, έχουν μη κενό εσωτερικό.

Έπεται ότι το $\frac{1}{2\pi}A$ περιέχει έναν τριαδικό ρητό, της μορφής $\frac{k}{3^m}$, όπου $k \in \mathbb{N}$ με $0 < k < 3^m$, και ο k δεν είναι πολλαπλάσιο του 3. Τότε, $\sin\left(\frac{2^{n+1}}{3^m}k\pi\right) \to 0$, άρα και η $\sin\left(\frac{2^n}{3}k\pi\right) \to 0$ (εξηγήστε γιατί). Ειδικότερα, $\sin\left(\frac{2^{2n+1}}{3}k\pi\right) \to 0$. Παρατηρούμε ότι $3 \mid 4^n - 1$, άρα $6 \mid 2^{2n+1} - 2$. Επομένως, ο $\frac{2^{2n+1}-2}{3}$ είναι άρτιος, άρα $\sin\left(\frac{2^{2n+1}}{3}k\pi\right) = \sin\left(\frac{2k}{3}\pi\right)$. Επομένως, η $\sin\left(\frac{2k}{3}\pi\right)$ (η οποία είναι σταθερή) συγκλίνει στο 0. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού ο $\frac{2k}{3}\pi$ δεν είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του π.

4.21. Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(0) = f(1)$. Θεωρούμε το σύνολο

$$A = \{t \in [0, 1] : \text{ υπάρχει } x \in [0, 1] \text{ ώστε } f(x + t) = f(x)\}.$$

(α) Δείξτε ότι το A είναι κλειστό, άρα και μετρήσιμο.

(β) Αν $B = \{t \in [0, 1] : 1 - t \in A\}$, δείξτε ότι $A \cup B = [0, 1]$.

(γ) Δείξτε ότι $\lambda(A) \geqslant 1/2$.

Υπόδειξη. (α) Έστω ακολουθία (t_n) στοιχείων του A η οποία συγκλίνει σε κάποιο $t \in \mathbb{R}$. Προφανώς, αφού κάθε $t_n \in [0, 1]$, θα έχουμε και ότι $t \in [0, 1]$. Για κάθε n βρίσκουμε $x_n \in [0, 1]$ ώστε $x_n + t_n \in [0, 1]$ και $f(x_n + t_n) = f(x_n)$. Η ακολουθία των x_n περιέχεται ολόκληρη στο συμπαγές $[0, 1]$, άρα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (x_{k_n}) η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x_0 \in [0, 1]$. Τότε όμως $x_0 + t \in [0, 1]$ (αφού $x_{k_n} + t_{k_n} \to x_0 + t$

και για κάθε n, $0 \leqslant x_{k_n} + t_{k_n} \leqslant 1$), ενώ από την συνέχεια της f,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(x_0) \quad \text{και} \quad \lim_{n\to\infty} f(x_{k_n} + t_{k_n}) = f(x_0 + t).$$

Αφού για κάθε n, $f(x_{k_n} + t_{k_n}) = f(x_{k_n})$, συμπεραίνουμε ότι $f(x_0 + t) = f(x_0)$, που σημαίνει ότι $t \in A$.

(β) Αφού $f(0) = f(1)$, μπορούμε να επεκτείνουμε συνεχώς την f σε μία 1-περιοδική συνάρτηση $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (όπου $\tilde{f}(z) = f(z - \lfloor z \rfloor)$). Έστω $t \in [0,1]$. Ορίζουμε $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \tilde{f}(x+t) - \tilde{f}(x)$. Η g μηδενίζεται για κάποιο $x \in \mathbb{R}$ (αφού, αν θεωρήσουμε $y \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $f(y) = \min f = \min \tilde{f}$, θα ισχύει $g(y-t) \leqslant 0 \leqslant g(y)$). Επειδή η g είναι και 1-περιοδική, μπορούμε να βρούμε $x_0 \in [0,1]$ στο οποίο η g να μηδενίζεται. Παρατηρούμε τώρα ότι αν $x_0 + t \leqslant 1$ τότε $t \in A$. Αλλιώς, αν $x_0 + t > 1$, τότε $0 < x_0 + t - 1 \leqslant 1$ και $g(x_0 - 1) = 0$, άρα $f(x_0 + t - 1) = f(x_0) = f((x_0 + t - 1) + 1 - t)$. Αυτό σημαίνει ότι $1 - t \in A$, ή ισοδύναμα ότι $t \in B$.

(γ) Από το (β) έχουμε ότι $[0,1] \setminus A \subseteq B$. Επίσης,

$$\mu(B) = \mu((-A+1) \cap [0,1]) \leqslant \mu(-A+1) = \mu(A).$$

Επομένως, έχουμε ότι

$$1 = \mu([0,1]) = \mu(A) + \mu([0,1] \setminus A) \leqslant \mu(A) + \mu(B) \leqslant 2\mu(A),$$

το οποίο μας δίνει το ζητούμενο.

4.22. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) > 0$. Δείξτε ότι

$$\lambda\left(\mathbb{R} \setminus (A + \mathbb{Q})\right) = 0.$$

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι αν $x \in A - (\mathbb{R} \setminus (A + \mathbb{Q}))$ τότε $x \notin \mathbb{Q}$. Πράγματι, αν $x \in \mathbb{Q}$ τότε $-x \in \mathbb{Q}$ και ταυτόχρονα $x = a - y$, όπου $a \in A$ και $y \notin A + \mathbb{Q}$, το οποίο μας δίνει $y = a - x \in A + \mathbb{Q}$, άτοπο.

Μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε την Άσκηση 4.18. Αν είχαμε $\lambda(\mathbb{R} \setminus (A+\mathbb{Q})) > 0$ τότε το σύνολο $A - (\mathbb{R} \setminus (A + \mathbb{Q}))$ θα περιείχε κάποιο διάστημα I. Αφού το διάστημα I περιέχει ρητούς, οδηγούμαστε σε άτοπο.

Απευθείας απόδειξη. Θα δείξουμε ότι: για κάθε $n \geqslant 1$ υπάρχει πεπερασμένο $J_n \subseteq \mathbb{Q}$ ώστε

$$(*) \qquad \lambda\Big([0,1] \setminus \bigcup_{t\in J_n} (A+t)\Big) < \frac{2}{n}.$$

Αν θέσουμε $J = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ τότε προκύπτει άμεσα ότι

$$\lambda\Big([0,1] \setminus \bigcup_{t\in J} (A+t)\Big) = 0.$$

Τέλος, αν ορίσουμε $D = \bigcup_{r\in\mathbb{Z}} (J + r)$ και γράψουμε το J στη μορφή $\{t_s : s \in \mathbb{N}\}$ (παρατηρήστε ότι το D είναι αριθμήσιμο) μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι

$$\lambda\Big(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{s=1}^{\infty} (A + t_s)\Big) \leqslant \sum_{r\in\mathbb{Z}} \lambda\Big([r, r+1] \setminus \bigcup_{t\in J+r} (A+t)\Big) = 0$$

και αφού $\bigcup_{r\in\mathbb{Z}}(J+r)\subseteq\mathbb{Q}$ έπεται το ζητούμενο.

Για την απόδειξη της $(*)$ παρατηρούμε ότι αν επιλέξουμε $k\in\mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο και $I=[y-\frac{1}{k},y+\frac{1}{k}]$ για κατάλληλο $y\in\mathbb{Q}$, έχουμε

$$\lambda(A\cap I)\geqslant\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\frac{2}{k},$$

άρα

$$\lambda(I\setminus A)\leqslant\frac{2}{nk}.$$

Τώρα, $[0,1]=\bigcup_{j=1}^{k-1}[\frac{j}{k}-\frac{1}{k},\frac{j}{k}+\frac{1}{k}]$. Άρα,

$$[0,1]\setminus\bigcup_{j=1}^{k-1}\Big(A+\frac{j}{k}-y\Big)\subseteq\bigcup_{j=1}^{k-1}\Big((I\setminus A)+\frac{j}{k}\Big).$$

Θέτοντας $J_n=\{\frac{j}{k}-y:j=1,\ldots,k-1\}$ παίρνουμε

$$\lambda\Big([0,1]\setminus\bigcup_{t\in J_n}(A+t)\Big)\leqslant\sum_{j=1}^{k-1}\lambda\Big((I\setminus A)+\frac{j}{k}\Big)=(k-1)\lambda(I\setminus A)<\frac{2(k-1)}{k}\frac{1}{n}<\frac{2}{n}.$$

4.23. Κατασκευάστε ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $E\subseteq[0,1]$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε διάστημα $J\subseteq[0,1]$ ισχύει

$$\lambda(J\cap E)>0\quad\text{και}\quad\lambda(J\setminus E)>0.$$

Υπόδειξη. Από την Άσκηση 4.12, αν I είναι ένα διάστημα μήκους α, και αν ακολουθήσουμε τη διαδικασία κατασκευής του συνόλου του Cantor αφαιρώντας στο n-οστό βήμα ανοικτά υποδιαστήματα μήκους $\alpha\delta/3^n$ (όπου $0<\delta<1$), τότε το σύνολο που προκύπτει δεν περιέχει διαστήματα και έχει μέτρο $\alpha(1-\delta)$.

Παίρνουμε $0<\delta_1<1$ και κατασκευάζουμε σύνολο D^1 στο $[0,1]$ με τον παραπάνω τρόπο. Το D^1 δεν περιέχει διαστήματα και $\lambda(D^1)=1-\delta_1$.

Το $B_1=[0,1]\setminus D^1$ είναι μια αριθμήσιμη ένωση ανοικτών διαστημάτων: $B_1=\bigcup_j R_j^1$. Σε κάθε κλειστό διάστημα $\overline{R_j^1}$, $j\in\mathbb{N}$, κάνουμε την ίδια κατασκευή με κάποιο $0<\delta_2<1$ (το ίδιο για κάθε j). Προκύπτει σύνολο D_j^2 που δεν περιέχει διαστήματα και έχει μέτρο $\lambda(D_j^2)=(1-\delta_2)\lambda(R_j^1)$. Ορίζουμε

$$D^2=D^1\cup\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}D_j^2\Big).$$

Τότε,

$$\lambda(D^2)=(1-\delta_1)+(1-\delta_2)\delta_1=1-\delta_1\delta_2.$$

Το $B_2=[0,1]\setminus D_2$ είναι πάλι μια αριθμήσιμη ένωση ανοικτών διαστημάτων: $B_2=\bigcup_j R_j^2$. Σε κάθε κλειστό διάστημα $\overline{R_j^2}$, $j\in\mathbb{N}$, κάνουμε την ίδια κατασκευή με κάποιο $0<\delta_3<1$ (το ίδιο για κάθε j).

Επαγωγικά, ορίζουμε μια ακολουθία $\{D^n\}$ υποσυνόλων του $[0,1]$ με τις εξής ιδιότητες:

1. $D^{n+1}\subset B^n=[0,1]\setminus D^n$.

2. $\lambda(D^n)=1-\delta_1\delta_2\cdots\delta_n$.

3. Το $D^n \setminus D^{n-1}$ είναι ένωση αριθμήσιμων το πλήθος μη επικαλυπτόμενων κλειστών συνόλων D^n_j, καθένα από τα οποία δεν περιέχει διαστήματα.

Μπορούμε μάλιστα να επιλέξουμε συγκεκριμμένα $\delta_j = \frac{2^j+1}{2^j+2}$ ώστε

$$\delta_1\delta_2\cdots\delta_n = \frac{2^n+1}{2^{n+1}} \to \frac{1}{2}.$$

Ορίζουμε $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} D^n$. Τότε, $\lambda(E) = \lim_{n\to\infty} \lambda(D^n) = \lim_{n\to\infty}(1-\delta_1\cdots\delta_n) = \frac{1}{2}$. Το E είναι μετρήσιμο, αφού κάθε D^n είναι σύνολο Borel.

Έστω $J=[a,b]$ υποδιάστημα του $[0,1]$. Ο ισχυρισμός είναι ότι υπάρχει υποδιάστημα R^n_j κάποιου B_n ώστε $R^n_j \subseteq J$.

Απόδειξη. Με εις άτοπο απαγωγή. Έστω ότι δεν υπάρχει $R^1_j \subset B_1$ με $R^1_j \subseteq J$. Παρατηρήστε ότι υπάρχει j ώστε $R^1_j \cap J \neq \emptyset$ (αλλιώς θα είχαμε $J \subseteq D^1$, άτοπο). Αφού το $R^1_j = (a_j, b_j)$ είναι ανοικτό, το $R^1_j \cap J$ είναι διάστημα. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

(α) $a_j < a < b_j < b$: υπάρχει $R^1_t = (a_t, b_t)$ με $b_j < a_t \leqslant b$ (αλλιώς, $[b_j, b] \subseteq D^1$ το οποίο είναι άτοπο). Τότε όμως, υπάρχει $R^1_s = (a_s, b_s) \subseteq [b_j, a_t)$ λόγω της κατασκευής του D^1. Άρα, υπάρχει $R^1_s \subseteq J$. Αυτό είναι άτοπο.

(β) $a < a_j < b < b_j$: καταλήγουμε σε άτοπο με τον ίδιο τρόπο.

(γ) $J = [a,b] \subset R^1_j = (a_j, b_j)$: στο $\overline{R^1_j}$ κατασκευάστηκε το D^2_j. Επαναλαμβάνοντας το συλλογισμό, βλέπουμε ότι είτε υπάρχει j ώστε $R^2_j \subseteq J$ ή υπάρχει j ώστε $J \subseteq R^2_j$.

Συνεχίζοντας έτσι, βλέπουμε ότι είτε υπάρχουν n και j ώστε $R^n_j \subseteq J$ ή για κάθε n υπάρχει j ώστε $J \subseteq R^n_j$. Η δεύτερη περίπτωση αποκλείεται γιατί τότε θα είχαμε

$$\lambda(J) \leqslant \inf_n \lambda(R^n_j) = 0$$

(παρατηρήστε ότι $\lambda(R^n_j) \leqslant \frac{\delta_1\cdots\delta_n}{3^n}$). □

Υπάρχει λοιπόν κάποιο R^n_j, ανοικτό υποδιάστημα κάποιου D^n, ώστε $R^n_j \subseteq J$. Όμως τότε, στο $\overline{R^n_j}$ κατασκευάστηκε το D^{n+1}_j, το οποίο έχει μέτρο $\lambda(R^{n+1}_j) = \lambda(R^n_j)(1-\delta_{n+1})$, μέσα σε αυτό αριθμήσιμα το πλήθος D^{n+2}_j με συνολικό μέτρο $\lambda(R^n_j)\delta_{n+1}(1-\delta_n)$ κλπ. Δηλαδή, το συνολικό μέτρο των D^m_j, $m > n$ που κατασκευάστηκαν μέσα στο R^n_j είναι ίσο με

$$\lambda(R^n_j)(1-\delta_{n+1}\delta_{n+2}\cdots) = \lambda(R^n_j)\left(1 - \frac{1}{2\delta_1\cdots\delta_n}\right).$$

Έπεται ότι

$$\lambda(E\cap R^n_j) = \lambda(R^n_j)\left(1-\frac{1}{2\delta_1\cdots\delta_n}\right) > 0 \quad \text{και} \quad \lambda(R^n_j\setminus E) = \lambda(R^n_j)\frac{1}{2\delta_1\cdots\delta_n} > 0.$$

Αφού $R^n_j \subseteq J$, συμπεραίνουμε ότι

$$\lambda(E\cap J) > 0 \quad \text{και} \quad \lambda(J\setminus E) > 0.$$

Κεφάλαιο 5

Μετρήσιμες συναρτήσεις

Ομάδα Α΄.

5.1. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $f : X \to [-\infty, \infty]$. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν $\{f \leqslant q\} \in \mathcal{A}$ για κάθε $q \in \mathbb{Q}$.

Υπόδειξη. Έστω $b \in \mathbb{R}$. Λόγω της πυκνότητας του $\mathbb{Q}$ υπάρχει γνησίως φθίνουσα ακολουθία (q_n) ρητών ώστε $q_n \to b$. Τότε,

$$\{x \in X : f(x) \leqslant b\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) \leqslant q_n\}.$$

Αφού $\{x \in A : f(x) \leqslant q_n\} \in \mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έπεται ότι $\{f \leqslant b\} \in \mathcal{A}$. Το $b \in \mathbb{R}$ ήταν τυχόν, άρα η f είναι μετρήσιμη.

5.2. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε τη συνάρτηση $g : X \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } f(x) \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{αν } f(x) \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Δείξτε ότι η g είναι μετρήσιμη.

Υπόδειξη. Η f είναι μετρήσιμη, άρα το σύνολο $f^{-1}(\mathbb{Q}) = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} f^{-1}(\{q\}) \in \mathcal{A}$. Ορίζουμε $B = X \setminus f^{-1}(\mathbb{Q})$. Τότε, $B \in \mathcal{A}$ και παρατηρούμε ότι $g = \chi_B$. Πράγματι, έχουμε $g(x) = 1$ αν και μόνο αν $f(x) \notin \mathbb{Q}$ δηλαδή αν και μόνο αν $x \in B$ και έχουμε $g(x) = 0$ αν και μόνο αν $f(x) \in \mathbb{Q}$ δηλαδή αν και μόνο αν $x \notin B$.

Αφού $B \in \mathcal{A}$, η $g = \chi_B$ είναι μετρήσιμη.

5.3. Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις με την f να είναι Lebesgue μετρήσιμη και το σύνολο $\{f \neq g\}$ να είναι λ−μηδενικό. Δείξτε ότι και η g είναι Lebesgue μετρήσιμη.

Υπόδειξη. Ορίζουμε $Z = \{f \neq g\}$. Από την υπόθεση, $\lambda(Z) = 0$. Συνεπώς, αν $Z_1 \subseteq Z$ έχουμε ότι το Z_1 είναι Lebesgue μετρήσιμο και $\lambda(Z_1) = 0$. Τώρα, για κάθε $b \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R} : g(x) \leqslant b\} &= \{x \in Z : g(x) \leqslant b\} \cup \{x \in \mathbb{R} \setminus Z : g(x) \leqslant b\} \\ &= (Z \cap \{g \leqslant b\}) \cup ((\mathbb{R} \setminus Z) \cap \{f \leqslant b\}), \end{aligned}$$

αφού στο $\mathbb{R} \setminus Z$ έχουμε $g = f$. Το σύνολο $Z_1 = Z \cap \{g \leqslant b\}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο ως υποσύνολο του Z, ενώ το $(\mathbb{R} \setminus Z) \cap \{f \leqslant b\}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο ως τομή δύο Lebesgue μετρήσιμων συνόλων (το $\{f \leqslant b\}$ είναι μετρήσιμο διότι η f είναι μετρήσιμη). Αφού το $b \in \mathbb{R}$ ήταν τυχόν, η g είναι μετρήσιμη.

5.4. Έστω μια συνάρτηση $f : (a,b) \to [-\infty,\infty]$ ώστε για κάθε $0 < \varepsilon < b-a$ ο περιορισμός $f|_{(a,b-\varepsilon)}$ να είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

Υπόδειξη. Έστω $k \in \mathbb{N}$ ώστε $1/k < b-a$. Ορίζουμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n = f \cdot \chi_{(a,b-\frac{1}{n+k})}$. Παρατηρήστε ότι κάθε f_n είναι μετρήσιμη από την υπόθεση (εξηγήστε το με τον ορισμό) και $f_n \to f$ κατά σημείο (εξηγήστε γιατί). Άρα, η f είναι μετρήσιμη.

5.5. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ ένας χώρος μέτρου, $\{s_n\}$ μια ακολουθία απλών μετρήσιμων συναρτήσεων και μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ ώστε $s_n \to f$ ομοιόμορφα στο X. Δείξτε ότι η f είναι φραγμένη.

Υπόδειξη. Κάθε απλή μετρήσιμη συνάρτηση είναι φραγμένη, αφού παίρνει πεπερασμένες το πλήθος πραγματικές τιμές. Αφού $s_n \to f$ ομοιόμορφα στο X, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $|f(x) - s_m(x)| \leqslant 1$ για κάθε $x \in X$. Υπάρχει $A_m > 0$ τέτοιος ώστε $|s_m(x)| \leqslant A_m$ για κάθε $x \in X$, και τότε

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - s_m(x)| + |s_m(x)| \leqslant 1 + A_m$$

για κάθε $x \in X$, δηλαδή η f είναι φραγμένη.

Ομάδα Β΄.

5.6. Δώστε παράδειγμα συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που δεν είναι Lebesgue μετρήσιμη, ενώ οι $|f|$ και f^2 είναι Lebesgue μετρήσιμες.

Υπόδειξη. Θεωρήστε ένα μη μετρήσιμο υποσύνολο E του $\mathbb{R}$ και τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \chi_E(x) - \chi_{E^c}(x).$$

Τότε, $\{f > 0\} = E$ άρα η f δεν είναι μετρήσιμη, όμως $|f| = f^2 \equiv 1$ στο $\mathbb{R}$.

5.7. Έστω $f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ αύξουσα συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει αύξουσα ακολουθία $\{s_n\}$ αυξουσών απλών συναρτήσεων με $s_n \nearrow f$.

Υπόδειξη. Γνωρίζουμε ότι η f είναι μετρήσιμη, διότι είναι αύξουσα. Για να ορίσουμε την ακολουθία $\{s_n\}$ ακολουθούμε την απόδειξη του βασικού θεωρήματος προσέγγισης μη αρνητικής μετρήσιμης συνάρτησης από απλές συναρτήσεις. Για κάθε $n \geqslant 1$ θέτουμε

$$P_n = \left\{0 < \frac{1}{2^n} < \frac{2}{2^n} < \cdots < \frac{n2^n}{2^n} = n\right\}$$

και θεωρούμε τη συνάρτηση

$$s_n = \sum_{j=0}^{n2^n-1} \frac{j}{2^n}\chi_{B_{n,j}} + n\chi_{C_n},$$

όπου

$$B_{n,j} = \left[\frac{j}{2^n} \leqslant f < \frac{j+1}{2^n}\right], \ j = 0,1,\ldots,n2^n-1 \text{ και } C_n = [f \geqslant n].$$

Γνωρίζουμε ότι κάθε s_n είναι απλή μετρήσιμη συνάρτηση, ότι $0 \leqslant s_n \leqslant s_{n+1} \leqslant f$ και ότι $s_n \nearrow f$. Μένει να δείξουμε ότι κάθε s_n είναι αύξουσα συνάρτηση. Παρατηρήστε ότι τα σύνολα $B_{n,j}$ και C_n είναι ξένα ανά δύο και ότι $\mathbb{R} = \left(\bigcup_{j=0}^{n2^n-1} B_{n,j}\right) \cup C_n$.

Θεωρούμε $x < y$ στο $\mathbb{R}$ και διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) Αν $x \in C_n$ τότε $f(y) \geqslant f(x) \geqslant n$, δηλαδή $y \in C_n$ και τότε $s_n(x) = s_n(y) = n$.

(β) Αλλιώς, υπάρχει $j \in \{0, 1, \dots, n2^n - 1\}$ ώστε $x \in B_{n,j}$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για το y:

- Αν $y \in C_n$ τότε $s_n(x) = \frac{j}{2^n} < n = s_n(y)$.
- Αλλιώς, υπάρχει $k \in \{0, 1, \dots, n2^n - 1\}$ ώστε $y \in B_{n,k}$. Αν υποθέσουμε ότι $k < j$ τότε

$$f(y) < \frac{k+1}{2^n} \leqslant \frac{j}{n} \leqslant f(x),$$

οπότε $f(y) < f(x)$ το οποίο είναι άτοπο, διότι η f είναι αύξουσα. Άρα, $j \leqslant k$ και έχουμε

$$s_n(x) = \frac{j}{2^n} \leqslant \frac{k}{2^n} = s_n(y).$$

Σε κάθε περίπτωση, αν $x < y$ έχουμε ότι $s_n(x) \leqslant s_n(y)$. Συνεπώς, η s_n είναι αύξουσα.

5.8. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $\{E_n\}$ ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$.

(α) Αν $\mu(E_n) < \frac{1}{2^n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι $\mu(\{x : \chi_{E_n}(x) \nrightarrow 0\}) = 0$. (Υπόδειξη: θυμηθείτε το πρώτο λήμμα Borel-Cantelli.)

(β) Ισχύει το προηγούμενο συμπέρασμα με την ασθενέστερη υπόθεση $\mu(E_n) \to 0$;

Υπόδειξη. (α) Παρτηρούμε ότι για κάθε $x \in X$ η ακολουθία $(\chi_{E_n}(x))$ δεν συγκλίνει στο 0 αν και μόνο αν το x ανήκει σε άπειρα από τα E_n (εξηγήστε γιατί). Δηλαδή,

$$\{x \in X : \chi_{E_n}(x) \nrightarrow 0\} = E := \limsup_n E_n.$$

Αφού

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty,$$

από το λήμμα Borel-Cantelli συμπεραίνουμε ότι $\mu(E) = 0$, άρα $\mu(\{x \in X : \chi_{E_n}(x) \nrightarrow 0\}) = 0$.

(β) Όχι. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η αρμονική σειρά αποκλίνει, μπορούμε να κατασκευάσουμε ακολουθία κλειστών διαστημάτων $E_n \subsetneq [0, 1]$ με $\lambda(E_n) \leqslant \frac{1}{n}$, τέτοια η $\chi_{E_n}(x)$ να αποκλίνει παντού. Αρχικά, θέτουμε $E_1 = \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $I_2 = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right]$, $E_3 = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3}, 1\right]$, και θέτουμε $n_1 = 3$.

Συνεχίζουμε επαγωγικά: η σειρά $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει, και $\frac{1}{4} < 1$, άρα υπάρχει ο ελάχιστος $n_2 > 4$ τέτοιος ώστε $\sum_{n=4}^{n_2} \frac{1}{n} > 1$. Καλύπτουμε τότε το $[0, 1]$ με διαδοχικά κλειστά διαστήματα $E_4, E_5, \dots, E_{n_2}$ για τα οποία έχουμε ότι $\lambda(E_k) \leqslant \frac{1}{k}$.

Με αυτόν τον τρόπο, κατασκευάζουμε ακολουθία κλειστών διαστημάτων E_n και γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών n_k τέτοια ώστε $\lambda(E_n) \leqslant \frac{1}{n}$, οποιαδήποτε δύο διαδοχικά από τα E_n έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο, και $\bigcup_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} E_i = [0, 1]$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αυτό δείχνει ότι κάθε σημείο $x \in [0, 1]$ ανήκει σε άπειρα από τα E_n, αλλά όχι σε όλα τελικά τα E_n, επομένως η $\chi_{E_n}(x)$ δεν συγκλίνει.

5.9. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση.

(α) Δείξτε ότι η f απεικονίζει F_σ σύνολα σε F_σ σύνολα.

(β) Δείξτε ότι η f απεικονίζει Lebesgue μετρήσιμα σύνολα σε Lebesgue μετρήσιμα σύνολα αν και μόνο αν για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) = 0$ ισχύει και $\lambda(f(A)) = 0$.

Υπόδειξη. (α) Πρώτα δείχνουμε ότι η f απεικονίζει κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ σε F_σ υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Πράγματι, αν $K \subseteq \mathbb{R}$ κλειστό, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το $K_n = [-n, n] \cap K$ είναι συμπαγές, άρα το $f(K_n)$ είναι συμπαγές, συνεπώς κλειστό σύνολο. Αφού $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, έπεται ότι το $f(K) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(K_n)$ είναι F_σ

σύνολο. Αν τώρα $E = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$ είναι F_σ σύνολο, όπου κάθε F_n είναι κλειστό, τότε το $f(E) = \cup_{n=1}^{\infty} f(F_n)$ είναι F_σ σύνολο ως αριθμήσιμη ένωση F_σ συνόλων.

(β) Υποθέτουμε ότι αν $\lambda(A) = 0$ τότε $\lambda(f(A)) = 0$. Θα δείξουμε ότι η f απεικονίζει μετρήσιμα σύνολα σε μετρήσιμα σύνολα. Πράγματι· αν A μετρήσιμο, τότε γνωρίζουμε ότι υπάρχουν N και E μηδενικό σύνολο και F_σ-σύνολο αντίστοιχα, ώστε $A = E \cup N$. Τότε, $f(A) = f(E) \cup f(N)$. Αλλά, από το (α) το $f(E)$ είναι F_σ, ενώ από την υπόθεση το $f(N)$ είναι μηδενικό. Συνεπώς, το $f(A)$ είναι μετρήσιμο.

Αντίστροφα, έστω ότι η f απεικονίζει μετρήσιμα σύνολα σε μετρήσιμα σύνολα. Θα δείξουμε ότι απεικονίζει μηδενικά σύνολα σε μηδενικά σύνολα. Έστω $A \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(A) = 0$. Τότε, το $f(A)$ είναι μετρήσιμο. Αν υποθέσουμε ότι $\lambda(f(A)) > 0$ τότε υπάρχει $V \subset f(A)$ μη μετρήσιμο. Θεωρούμε το $E = f^{-1}(V) \cap A$, το οποίο είναι μετρήσιμο ως υποσύνολο συνόλου με μηδενικό μέτρο. Όμως, το $f(E) = V$ δεν είναι μετρήσιμο και έχουμε αντίφαση.

5.10. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $(E_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ οικογένεια συνόλων στην $\mathcal{A}$ με τις εξής ιδιότητες:

(i) Αν $\alpha < \beta$ τότε $E_\alpha \subseteq E_\beta$,

(ii) $X = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} E_\alpha$,

(iii) $\bigcap_{\alpha \in \mathbb{R}} E_\alpha = \varnothing$.

Δείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ να ισχύουν τα εξής: αν $x \in E_\alpha$ τότε $f(x) \leqslant \alpha$ ενώ αν $x \notin E_\alpha$ τότε $f(x) \geqslant \alpha$.

Υπόδειξη. Για κάθε $x \in X$ ορίζουμε

$$f(x) = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : x \in E_\alpha\}.$$

Αφού $X = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} E_\alpha$, το σύνολο $\{\alpha \in \mathbb{R} : x \in E_\alpha\}$ είναι μη κενό, άρα $f(x) < +\infty$. Επίσης, αφού $\bigcap_{\alpha \in \mathbb{R}} E_\alpha = \varnothing$, υπάρχει $\beta \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $x \notin E_\beta$ και τότε για κάθε $\gamma \leqslant \beta$ έχουμε $E_\gamma \subseteq E_\beta$, άρα $\{\alpha \in \mathbb{R} : x \in E_\alpha\} \subseteq (\beta, +\infty)$, το οποίο σημαίνει ότι $f(x) \geqslant \beta > -\infty$. Δηλαδή, $f(x) \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in X$.

Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Από τον ορισμό της f είναι φανερό ότι αν $x \in E_\alpha$ τότε $f(x) \leqslant \alpha$. Επίσης, είδαμε προηγουμένως ότι αν $x \notin E_\alpha$ τότε $f(x) \geqslant \alpha$.

Μένει να δείξουμε ότι η f είναι μετρήσιμη. Έστω $t \in \mathbb{R}$. Αν $f(x) < t$ τότε από τον χαρακτηρισμό του infimum υπάρχει $\alpha < t$ τέτοιος ώστε $x \in E_\alpha$ και αν επιλέξουμε $q \in \mathbb{Q}$ με $\alpha < q < t$ έχουμε $x \in E_\alpha \subseteq E_q$. Αντίστροφα, αν $x \in E_q$ για κάποιον $q < t$ τότε $f(x) \leqslant q < t$. Δηλαδή,

$$f(x) < t \iff \text{υπάρχει } q \in \mathbb{Q}, q < t \text{ ώστε } x \in E_q.$$

Έπεται ότι

$$f^{-1}((-\infty, t)) = \bigcup_{\{q \in \mathbb{Q} : q < t\}} E_q \in \mathcal{A}.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η f είναι μετρήσιμη.

5.11. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου και $f_n : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε: για κάθε $x \in X$ ισχύει ότι

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)| < \infty.$$

Δείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $A \in \mathcal{A}$ και $M > 0$ ώστε

$$\mu(X \setminus A) < \varepsilon \quad \text{και για κάθε } x \in A : \ \sup_n |f_n(x)| \leqslant M.$$

Υπόδειξη. Η συνάρτηση $f(x) = \sup_n |f_n(x)|$ είναι μετρήσιμη, διότι οι $|f_n|$ είναι μετρήσιμες. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$E_k = \{x \in X : |f(x)| > k\}.$$

Αφού $\sup_n |f_n(x)| < \infty$ για κάθε $x \in X$, βλέπουμε ότι η (E_k) είναι φθίνουσα ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του X με $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = \emptyset$. Αφού $\mu(X) < \infty$ έχουμε $\mu(E_k) \to \mu(\emptyset) = 0$. Άρα, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\mu(E_{k_0}) < \varepsilon$. Θέτοντας $A = X \setminus E_{k_0}$ και $M = k_0$, έχουμε

$$\mu(X \setminus A) = \mu(E_{k_0}) < \varepsilon$$

και, για κάθε $x \in A$,

$$\sup_n |f_n(x)| = f(x) \leqslant k_0 = M.$$

5.12. Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση Cantor-Lebesgue βρείτε μια συνεχή συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και μια Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε η $h \circ g$ να μην είναι Lebesgue μετρήσιμη.

Υπόδειξη. Έστω $\phi_0 : [0,1] \to [0,1]$ η συνάρτηση Cantor–Lebesgue και ϕ η επέκτασή της σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$ με $\phi(x) = 1$ αν $x > 1$ και $\phi(x) = 0$ αν $x < 0$. Ορίζουμε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x + \phi(x)$. Έχουμε δει ότι $\lambda(f(C)) = 1$, άρα υπάρχει $V \subseteq f(C)$ μη μετρήσιμο. Το σύνολο $A = f^{-1}(V)$ είναι μετρήσιμο ως υποσύνολο του C. Θεωρούμε την $g = f^{-1}$, η οποία είναι συνεχής και την $h = \chi_A$ η οποία είναι μετρήσιμη. Τότε, η $h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δεν είναι μετρήσιμη αφού

$$\{x : (h \circ g)(x) > 0\} = \{x : g(x) \in A\} = \{x : f^{-1}(x) \in A\} = V.$$

5.13. Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$ με $\lambda(E) < \infty$ και $f : E \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\omega_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$\omega_f(t) = \lambda(\{x \in E : f(x) > t\}).$$

(α) Δείξτε ότι η ω_f είναι φθίνουσα και συνεχής από δεξιά. Σε ποιά σημεία είναι ασυνεχής;
(β) Αν οι $f_n, f : E \to \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμες και $f_n \nearrow f$, δείξτε ότι $\omega_{f_n} \nearrow \omega_f$.

Υπόδειξη. (α) Εύκολα ελέγχουμε ότι η ω_f είναι φθίνουσα. Για να δείξουμε ότι είναι συνεχής από δεξιά, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $t_n \downarrow t$ ισχύει ότι $\omega_f(t_n) \to \omega_f(t)$. Ορίζουμε $E_n = \{x \in E : f(x) > t_n\}$. Τότε, $E_n \subseteq E_{n+1}$ και $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \{x \in E : f(x) > t\}$. Επομένως, από την συνέχεια του μέτρου παίρνουμε:

$$\omega_f(t) = \lambda\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \lambda(E_n) = \lim_{n\to\infty} \omega_f(t_n),$$

που αποδεικνύει την συνέχεια της ω_f από δεξιά.

Η ω_f είναι συνεχής αν και μόνον αν είναι συνεχής από αριστερά. Ισοδύναμα, αν για κάθε (t_n) με $t_n \uparrow t$ ισχύει ότι $\omega_f(t_n) \to \omega_f(t)$. Παρατηρούμε ότι $\{f \geqslant t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f > t_n\}$ και χρησιμοποιώντας την υποθέση $\lambda(E) < \infty$ συμπεραίνουμε όπως πριν ότι

$$\lim_{n\to\infty} \omega_f(t_n) = \lim_{n\to\infty} \lambda(x \in E : f(x) > t_n) = \lambda(x \in E : f(x) \geqslant t).$$

Επομένως, η ω_f είναι συνεχής από αριστερά αν και μόνον αν

$$\lambda(\{x \in E : f(x) > t\}) = \lambda(\{x \in E : f(x) \geqslant t\}) \iff \lambda(\{x \in E : f(x) = t\}) = 0.$$

Με άλλα λόγια η ω_f είναι συνεχής στο t αν και μόνον αν $\lambda(f^{-1}(\{t\})) = 0$.

(β) Εύκολα ελέγχουμε ότι για κάθε t έχουμε $\omega_{f_n}(t) \leqslant \omega_{f_{n+1}}(t)$. Έστω $t \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε $B_n = \{x \in A : f_n(x) > t\}$. Τότε, $B_n \subseteq B_{n+1}$ και $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \{x \in E : f(x) > t\}$. Άρα, μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \omega_{f_n}(t) &= \lim_{n\to\infty} \lambda(\{x \in E : f_n(x) > t\}) = \lim_{n\to\infty} \lambda(B_n)\\ &= \lambda\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\Big) = \lambda(\{x \in E : f(x) > t\}) = \omega_f(t).\end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο.

Ομάδα Γ΄.

5.14. Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις και $\alpha \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι αν

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda\left(\{x : f_n(x) > \alpha\}\right) < \infty,$$

τότε υπάρχει $Z \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(Z) = 0$ ώστε $\limsup_n f_n(x) \leqslant \alpha$ για κάθε $x \in Z^c$.

Υπόδειξη. Θέτουμε $A_n = \{x : f_n(x) > \alpha\}$. Τότε, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) < \infty$, άρα από το πρώτο λήμμα Borel–Cantelli έπεται ότι $\lambda(\limsup A_n) = 0$. Θέτουμε $Z = \limsup A_n$ επομένως, αν $x \notin Z$ τότε υπάρχει $N_x \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geqslant N_x$ τότε $x \notin A_n$ δηλαδή $f_n(x) \leqslant \alpha$, άρα $\limsup_{n\to\infty} f_n(x) \leqslant \alpha$.

5.15. Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις και ακολουθία (ε_n) θετικών αριθμών με $\varepsilon_n \to 0$. Δείξτε ότι αν

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda\left(\{x : f_n(x) > \varepsilon_n\}\right) < \infty,$$

τότε υπάρχει $Z \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(Z) = 0$ ώστε $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \in Z^c$.

Υπόδειξη. Όπως στην προηγούμενη άσκηση, υπάρχει Z με $\lambda(Z) = 0$ ώστε αν $x \notin Z$, τότε υπάρχει $N_x \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geqslant N_x$ τότε $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \varepsilon_n$. Αφού $\varepsilon_n \to 0^+$, έπεται άμεσα το ζητούμενο.

5.16. Έστω $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ μια *χωριστά συνεχής* συνάρτηση, δηλαδή συνεχής ως προς κάθε μεταβλητή χωριστά. Δείξτε ότι η f είναι Borel μετρήσιμη.

Υπόδειξη. Ορίζουμε $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ως εξής. Αν $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ τότε υπάρχει μοναδικός $m = m_x \in \mathbb{Z}$ ώστε $x \in \left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right)$. Θέτουμε

$$f_n(x, y) = f\left(\frac{m_x}{n}, y\right).$$

Δείχνουμε ότι η f_n είναι μετρήσιμη: παρατηρήστε ότι, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} E_n(\alpha) &:= \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f_n(x,y) > \alpha\Big\} \\ &= \bigcup_{m=-\infty}^{\infty} \Big[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\Big) \times \{y \in \mathbb{R} : f(m/n, y) > \alpha\}. \end{aligned}$$

Για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, αφού η $f_{m/n}$ είναι συνεχής συνάρτηση, το σύνολο $\{y \in \mathbb{R} : f(m/n, y) > \alpha\}$ είναι ανοικτό, άρα το σύνολο

$$\left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right) \times \{y \in \mathbb{R} : f(m/n, y) > \alpha\}$$

είναι σύνολο Borel. Έπεται ότι το $E_n(\alpha)$ είναι σύνολο Borel για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, και αυτό δείχνει ότι η f_n είναι Borel μετρήσιμη.

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι $f_n(x,y) \to f(x,y)$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Πράγματι, αφού $\frac{m_x}{n} \to x$ καθώς το $n \to \infty$ (εξηγήστε γιατί) και αφού η f^y είναι συνεχής, έχουμε

$$f_n(x,y) = f(m_x/n, y) = f^y(m_x/n) \to f^y(x) = f(x,y).$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι η f είναι Borel μετρήσιμη συνάρτηση ως κατά σημείο όριο μιας ακολουθίας Borel μετρήσιμων συναρτήσεων.

5.17. Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ μια ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων συναρτήσεων. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών (α_n) και σύνολο $Z \subseteq [0,1]$ με $\lambda(Z) = 0$ ώστε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x)}{\alpha_n} = 0, \quad \text{για κάθε } x \in Z^c.$$

Υπόδειξη. Αποδεικνύουμε πρώτα τον ακόλουθο ισχυρισμό:

Ισχυρισμός. Αν $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\beta > 0$ ώστε $\lambda(x : |g(x)| > \beta) < \varepsilon$.

Έστω $E_n = \{x : |g(x)| \leqslant n\}$. Τότε, $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = [0,1]$ και η $\{E_n\}$ είναι αύξουσα. Άρα, $\lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = \lambda([0,1]) = 1$. Επομένως, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\lambda(A_k) > 1 - \varepsilon$. Τότε, $\lambda(x : |g(x)| > k) < \varepsilon$. □

Εφαρμόζοντας τον ισχυρισμό για την $g = f_n$ και $\varepsilon = 2^{-n}$ βρίσκουμε $\beta_n > 0$ ώστε

$$\lambda(\{x : |f_n(x)| > \beta_n\}) < 1/2^n.$$

Θέτουμε $E_n = \{x : |f_n(x)| > \beta_n\}$. Τότε, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) < +\infty$. Αν θέσουμε $Z = \limsup E_n$, τότε από το πρώτο λήμμα Borel–Cantelli παίρνουμε $\lambda(Z) = 0$. Αν $x \notin Z$ τότε υπάρχει $N_x \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geqslant N_x$ ισχύει $|f_n(x)| \leqslant \beta_n$. Αν θεωρήσουμε την $\alpha_n = n\beta_n$ τότε έχουμε ότι για κάθε $x \notin Z$ και για κάθε $n \geqslant N_x$ ισχύει

$$\left|\frac{f_n(x)}{\alpha_n}\right| = \frac{1}{n\beta_n}|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{n},$$

άρα $\frac{f_n(x)}{\alpha_n} \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

Κεφάλαιο 6

Ολοκλήρωμα

Ομάδα Α΄.

6.1. (Ανισότητα Chebyshev-Markov) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f : X \to [0, \infty]$ μια μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε για κάθε $t > 0$ είναι

$$\mu\left(\{x \in X : f(x) > t\}\right) \leqslant \frac{1}{t} \int f \, d\mu.$$

Υπόδειξη. Έστω $t > 0$ και έστω $A_t := \{x \in X : f(x) > t\}$. Παρατηρούμε ότι

$$t \cdot \mu(A_t) = \int_{A_t} t \, d\mu \leqslant \int_{A_t} f \, d\mu \leqslant \int f \, d\mu.$$

6.2. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f : X \to [0, \infty]$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $F : [0, \infty) \to [0, \infty]$ με

$$F(t) = \mu(\{x \in X : f(x) > t\}).$$

Δείξτε ότι η F είναι φθίνουσα, συνεχής από δεξιά και $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 0$.

Υπόδειξη. Από την ανισότητα Markov έχουμε $t \cdot \mu(\{f > t\} \leqslant \int f \, d\mu$, άρα $F(t) = \mu(\{x \in X : f(x) > t\}) < \infty$. Επίσης,

$$F(t) \leqslant \frac{1}{t} \int f \, d\mu \to 0$$

όταν $t \to +\infty$, το οποίο αποδεικνύει ότι $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 0$.

Εύκολα ελέγχουμε ότι η F είναι φθίνουσα. Για να δείξουμε ότι είναι συνεχής από δεξιά, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $t_n \downarrow t$ ισχύει $F(t_n) \to F(t)$. Ορίζουμε $A_n = \{x \in X : f(x) > t_n\}$. Τότε, $A_n \subseteq A_{n+1}$ και $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \in X : f(x) > t\}$. Επομένως, από την συνέχεια του μέτρου παίρνουμε:

$$F(t) = \lambda\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = \lim_{n\to\infty} F(t_n),$$

που αποδεικνύει την συνέχεια της F από δεξιά.

6.3. Δείξτε ότι $\int_{[1,\infty)} \frac{1}{x} \, d\lambda = +\infty$.

Υπόδειξη. Για κάθε $n \geqslant 2$ έχουμε

$$\int_{[1,\infty)} \frac{1}{x}\, d\lambda \geqslant \int_{[1,n)} \frac{1}{x}\, d\lambda = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{[k,k+1)} \frac{1}{x}\, d\lambda \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_{[k,k+1)} \frac{1}{k+1}\, d\lambda = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}.$$

Η αρμονική σειρά αποκλίνει, συνεπώς

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = +\infty.$$

Έπεται ότι $\int_{[1,\infty)} \frac{1}{x}\, d\lambda = +\infty$.

6.4. Βρείτε μια ακολουθία $\{f_n\}$ μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων που ικανοποιεί τα εξής: $f_n \to 0$ αλλά $\lim_n \int f_n\, d\lambda = 1$. Μπορείτε να επιλέξετε την $\{f_n\}$ έτσι ώστε να συγκλίνει ομοιόμορφα στη μηδενική συνάρτηση;

Υπόδειξη. Θεωρήστε τις $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[0,n]}(x).$$

Παρατηρήστε ότι $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$, άρα $f_n \to 0$ ομοιόμορφα. Όμως,

$$\int f_n\, d\lambda = \frac{1}{n}\, \lambda([0,n]) = 1$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

6.5. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Υποθέτουμε ότι f και f_n, $n \in \mathbb{N}$ είναι μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις, $f_n \searrow f$, και υπάρχει k τέτοιος ώστε $\int f_k < \infty$. Δείξτε ότι

$$\int f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu.$$

Υπόδειξη. Η f_k είναι ολοκληρώσιμη, συνεπώς μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f_k(x) < \infty$ για κάθε $x \in X$ (αυτό ισχύει σχεδόν παντού, και θα μπορούσαμε να δουλέψουμε στο συμπλήρωμα ενός συνόλου μηδενικού μέτρου). Θεωρούμε την ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $\{f_k - f_n\}_{n=k}^{\infty}$. Αφού η $\{f_n\}$ είναι φθίνουσα, συμπεραίνουμε ότι η $\{f_k - f_n\}_{n=k}^{\infty}$ είναι αύξουσα. Αφού $f_n \searrow f$, έχουμε $f_k - f_n \nearrow f_k - f$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int (f_k - f_n)\, d\mu \to \int (f_k - f)\, d\mu.$$

Παρατηρήστε ότι $0 \leqslant f_k - f \leqslant f_k$, άρα

$$\int (f_k - f_n)\, d\mu \leqslant \int (f_k - f)\, d\mu \leqslant \int f_k < \infty$$

για κάθε n. Δηλαδή, η $f_k - f$ και όλες οι $f_k - f_n$ είναι ολοκληρώσιμες. Από την γραμμικότητα του ολοκληρώματος,

$$\int f_n\, d\mu = \int f_k\, d\mu - \int (f_k - f_n)\, d\mu \to \int f_k\, d\mu - \int (f_k - f)\, d\mu = \int f\, d\mu.$$

6.6. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f : X \to [-\infty, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f > 0$ σχεδόν παντού. Αν $\int_E f = 0$ για κάποιο μετρήσιμο σύνολο E, δείξτε ότι $\mu(E) = 0$.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι $f > 0$ παντού στο E, δηλαδή $f(x) > 0$ για κάθε $x \in E$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $E_n = \{x \in E : f(x) > 1/n\}$. Παρατηρήστε ότι

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

διότι $f(x) > 0$ αν και μόνο αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $f(x) > 1/n$. Από την ανισότητα του Markov,

$$\frac{1}{n}\mu(E_n) \leqslant \int_{E_n} f\,d\mu \leqslant \int_E f\,d\mu = 0,$$

άρα $\mu(E_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι

$$\mu(E) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = 0.$$

Αυτό το επιχείρημα καλύπτει και την περίπτωση όπου $f > 0$ σχεδόν παντού: αν $Z = \{x \in E : f(x) = 0\}$ τότε $\mu(Z) = 0$ και $\int_{E\setminus Z} f\,d\mu = 0$. Μπορούμε λοιπόν να δουλέψουμε με το $E \setminus Z$: αν δείξουμε ότι $\mu(E \setminus Z) = 0$, θα έχουμε και $\mu(E) = 0$.

6.7. Έστω $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ μη αρνητική Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\,d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} f\,d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{\{f\geqslant 1/n\}} f\,d\lambda.$$

Υπόδειξη. Ορίζουμε $g_n(x) = f(x)\chi_{[-n,n]}(x)$. Παρατηρήστε ότι η $\{g_n\}$ είναι αύξουσα και, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε τελικά $x \in [-n, n]$ άρα $g_n(x) = f(x) \to f(x)$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_{-n}^{n} f\,d\lambda = \int f\chi_{[-n,n]}\,d\lambda = \int g_n\,d\lambda \to \int f\,d\lambda.$$

Για το δεύτερο ερώτημα, ορίζουμε $h_n(x) = f(x)\chi_{\{f\geqslant 1/n\}}(x)$. Παρατηρήστε ότι η $\{h_n\}$ είναι αύξουσα διότι $\{f \geqslant 1/n\} \subseteq \{f \geqslant 1/(n+1)\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ έχουμε τελικά $f(x) \geqslant 1/n$ άρα $h_n(x) = f(x) \to f(x)$, ενώ αν $f(x) = 0$ έχουμε $h_n(x) = 0$ για κάθε n, οπότε πάλι $h_n(x) \to 0 = f(x)$ (συμπληρώστε τις λεπτομέρειες). Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_{\{f\geqslant 1/n\}} f\,d\lambda = \int f\chi_{\{f\geqslant 1/n\}}\,d\lambda = \int h_n\,d\lambda \to \int f\,d\lambda.$$

6.8. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\{f\leqslant n\}} f\,d\mu.$$

Υπόδειξη. Ορίζουμε $g_n(x) = f(x)\chi_{\{f\leqslant n\}}(x)$. Παρατηρήστε ότι η $\{g_n\}$ είναι αύξουσα διότι $\{f \leqslant n\} \subseteq \{f \leqslant n+1\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, για κάθε $x \in X$ με $f(x) < \infty$ έχουμε τελικά $f(x) \leqslant n$ άρα

$g_n(x) = f(x) \to f(x)$. Δηλαδή, αν $E = \{f < \infty\}$, έχουμε $g_n\chi_E \nearrow f\chi_E$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_{\{f\leqslant n\}} f\,d\mu = \int f\chi_{\{f\leqslant n\}}\,d\mu = \int g_n\,d\mu = \int g_n\chi_E\,d\mu \to \int f\chi_E\,d\mu.$$

Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, γνωρίζουμε ότι $\mu(E^c) = 0$ και $\int f\chi_{E^c}\,d\mu = 0$. Έπεται ότι

$$\int f\,d\mu = \int f\chi_E\,d\mu + \int f\chi_{E^c}\,d\mu = \int f\chi_E\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_{\{f\leqslant n\}} f\,d\mu.$$

6.9. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Είναι σωστό ότι $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$;

Υπόδειξη. Όχι. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$$

είναι σχεδόν παντού ίση με την μηδενική συνάρτηση. Άρα, η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int f\,d\lambda = 0$. Όμως, το $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ δεν υπάρχει: έχουμε

$$f(n) \to 1 \text{ και } f(-n) \to 1.$$

6.10. Θεωρώντας τις συναρτήσεις $f_n = \chi_{[n,n+1)}$ δείξτε ότι στο Λήμμα του Fatou η ανισότητα μπορεί να είναι γνήσια.

Υπόδειξη. Αν $f_n = \chi_{[n,n+1)}$, τότε $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$: παρατηρήστε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $n_0 > x$ και τότε, για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε $x \notin [n, n+1)$, άρα $f_n(x) = \chi_{[n,n+1)}(x) = 0$. Έπεται ότι

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n\,d\lambda = \int \lim_{n\to\infty} f_n\,d\lambda = 0,$$

ενώ $\int f_n\,d\lambda = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα

$$\liminf_{n\to\infty}\int f_n\,d\lambda = 1.$$

6.11. Έστω $\{f_n\}$ μια ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων σε ένα χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Είναι σωστό ότι

$$\limsup_n \int f_n\,d\mu \leqslant \int \limsup_n f_n\,d\mu\ ;$$

Αν προσθέσουμε την υπόθεση ότι η $\{f_n\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη;

Υπόδειξη. Όχι. Αν $f_n = \frac{1}{n}\chi_{[0,n]}$, τότε $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επίσης, η $\{f_n\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη ($0 \leqslant f_n \leqslant 1$). Παρατηρήστε ότι

$$\int \limsup_{n\to\infty} f_n\,d\lambda = \int \lim_{n\to\infty} f_n\,d\lambda = 0,$$

αλλά $\int f_n\,d\lambda = \frac{1}{n}\lambda([0,n]) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα

$$\limsup_{n\to\infty}\int f_n\,d\lambda = 1.$$

Ομάδα Β΄.

6.12. Έστω f και f_n, $n \in \mathbb{N}$ μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις σε ένα χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ με $f_n \leqslant f$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $f_n \to f$. Δείξτε ότι

$$\int f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu.$$

Υπόδειξη. Αφού $f_n \leqslant f$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε $\int f_n\, d\mu \leqslant \int f\, d\mu$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς,

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu \leqslant \int f\, d\mu.$$

Από το λήμμα του Fatou παίρνουμε

$$\int f\, d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu.$$

Έπεται ότι

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu = \int f\, d\mu.$$

Άρα,

$$\int f_n\, d\mu \to \int f\, d\mu.$$

6.13. Έστω $\{f_n\}$ ακολουθία Lebesgue ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο $[a, b]$. Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα, δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και ότι $\int_a^b |f_n - f|\, d\lambda \to 0$.

Υπόδειξη. Η f είναι μετρήσιμη διότι $f_n \to f$ κατά σημείο. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geqslant n_0$ και για κάθε $x \in [a, b]$ ισχύει $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Η σταθερή συνάρτηση ε είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, οπότε, από την $|f| < |f_{n_0}| + \varepsilon$ έπεται ότι η $|f|$ (άρα και η f) είναι ολοκληρώσιμη. Τέλος, για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε

$$\left| \int_a^b f_n\, d\lambda - \int_a^b f\, d\lambda \right| \leqslant \int_a^b |f_n - f|\, d\lambda \leqslant \varepsilon(b - a).$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι

$$\int_a^b f_n\, d\lambda \to \int_a^b f\, d\lambda.$$

6.14. Έστω ότι οι f, f_n είναι ολοκληρώσιμες σε ένα χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $f_n \nearrow f$. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\int f_n\, d\mu \to \int f\, d\mu$;

Υπόδειξη. Θεωρούμε τις ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $g_n := f - f_n$. Παρατηρήστε ότι $g_n \geqslant 0$, $g_n \geqslant g_{n+1}$ και $g_n \searrow 0$. Εφόσον, οι f, f_n είναι ολοκληρώσιμες και $\int g_1\, d\mu < +\infty$ μπορούμε να γράψουμε (από το δυικό του θεωρήματος μονότονης σύγκλισης – δείτε και την Άσκηση 6.12):

$$\begin{aligned} \int f\, d\mu - \lim_n \int f_n\, d\mu &= \lim_n \left(\int f\, d\mu - \int f_n\, d\mu \right) = \lim_n \int (f - f_n)\, d\mu \\ &= \lim_n \int g_n\, d\mu = \int (\lim_n g_n)\, d\mu = 0, \end{aligned}$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο.

6.15. Έστω f, f_n ολοκληρώσιμες συναρτήσεις σε ένα χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Υποθέτουμε ότι $\int |f_n - f|\, d\mu \to 0$. Δείξτε ότι $\int f_n\, d\mu \to \int f\, d\mu$ και $\int |f_n|\, d\mu \to \int |f|\, d\mu$.

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$\left| \int |f_n|\, d\mu - \int |f|\, d\mu \right| \leqslant \int \big| |f_n| - |f| \big|\, d\mu \leqslant \int |f_n - f|\, d\mu \to 0.$$

Άρα,

$$\int |f_n|\, d\mu \to \int |f|\, d\mu.$$

Με ανάλογο τρόπο,

$$\left| \int f_n\, d\mu - \int f\, d\mu \right| = \left| \int (f_n - f)\, d\mu \right| \leqslant \int |f_n - f|\, d\mu \to 0.$$

Άρα,

$$\int f_n\, d\mu \to \int f\, d\mu.$$

6.16. Έστω f, f_n ολοκληρώσιμες συναρτήσεις σε ένα χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Υποθέτουμε ότι $\int |f_n - f|\, d\mu \to 0$. Δείξτε ότι $\int_E f_n\, d\mu \to \int_E f\, d\mu$ για κάθε μετρήσιμο σύνολο E, και $\int f_n^+\, d\mu \to \int f^+\, d\mu$.

Υπόδειξη. Έστω E μετρήσιμο σύνολο. Γράφουμε

$$\left| \int_E f_n\, d\mu - \int_E f\, d\mu \right| = \left| \int_E (f_n - f)\, d\mu \right| \leqslant \int_E |f_n - f|\, d\mu \leqslant \int |f_n - f|\, d\mu \to 0.$$

Άρα,

$$\int_E f_n\, d\mu \to \int_E f\, d\mu.$$

Για το δεύτερο ερώτημα χρησιμοποιούμε την Άσκηση 6.15. Αφού $\int |f_n - f|\, d\mu \to 0$, έχουμε δείξει ότι $\int f_n\, d\mu \to \int f\, d\mu$ και $\int |f_n|\, d\mu \to \int |f|\, d\mu$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \int f_n^+\, d\mu &= \int \frac{f_n + |f_n|}{2\, d\mu} = \frac{1}{2} \int f_n\, d\mu + \frac{1}{2} \int |f_n|\, d\mu \to \frac{1}{2} \int f\, d\mu + \frac{1}{2} \int |f|\, d\mu \\ &= \int \frac{f + |f|}{2}\, d\mu = \int f^+\, d\mu. \end{aligned}$$

6.17. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση σε ένα χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Δείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μετρήσιμο σύνολο E με $\mu(E) < \infty$ τέτοιο ώστε

$$\int_E f\, d\mu > \int f\, d\mu - \varepsilon.$$

Επιπλέον, δείξτε ότι το E μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε η f να είναι φραγμένη στο E.

Υπόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(x) < +\infty$ για κάθε $x \in X$. Ορίζουμε $g_n(x) = f(x)\chi_{\{1/n \leqslant f \leqslant n\}}(x)$. Παρατηρήστε ότι η $\{g_n\}$ είναι αύξουσα διότι $\{1/n \leqslant f \leqslant n\} \subseteq \{1/(n+1) \leqslant f \leqslant n+1\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $0 < f(x) < \infty$ έχουμε τελικά $f(x) \geqslant 1/n$ και $f(x) \leqslant n$, άρα $g_n(x) = f(x) \to f(x)$, ενώ αν

$f(x) = 0$ έχουμε $g_n(x) = 0$ για κάθε n, οπότε πάλι $g_n(x) \to 0 = f(x)$ (συμπληρώστε τις λεπτομέρειες). Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_{\{1/n \leqslant f \leqslant n\}} f\,d\mu = \int f\chi_{\{1/n \leqslant f \leqslant n\}}\,d\mu = \int g_n\,d\mu \to \int f\,d\mu.$$

Συνεπώς, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε, αν θέσουμε $E = \{1/n \leqslant f \leqslant n\}$ τότε

$$\int_E f\,d\mu > \int f\,d\mu - \varepsilon.$$

Παρατηρήστε ότι η f είναι φραγμένη (από n) στο E. Τέλος, από την ανισότητα του Markov,

$$\mu(E) \leqslant \mu(\{f \geqslant 1/n\}) \leqslant n \int f\,d\mu < +\infty.$$

6.18. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση σε ένα χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $\mu(E) < \delta$, τότε $\int_E f\,d\mu < \varepsilon$.

Υπόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την συνάρτηση $f_n(x) = \min\{f(x), n\}$. Παρατηρήστε ότι $f_n \leqslant n$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu = \int f\,d\mu$$

(εξηγήστε γιατί η $\{f_n\}$ είναι αύξουσα και $f_n \to f$). Έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\int (f - f_n)\,d\mu = \int f\,d\mu - \int f_n\,d\mu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Επιλέγουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{2n}$. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ με $\mu(E) < \delta$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_E f\,d\mu &= \int_E f_n\,d\mu + \int_E (f - f_n)\,d\mu \leqslant \int_E f_n\,d\mu + \int (f - f_n)\,d\mu \\ &\leqslant n\mu(E) + \frac{\varepsilon}{2} < n\frac{\varepsilon}{2n} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

6.19. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μη αρνητική Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_{-\infty}^x f\,d\lambda$ είναι συνεχής.

Υπόδειξη. Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$. Εύκολα βλέπουμε ότι $F(x) \leqslant F(y)$, δηλαδή η F είναι αύξουσα. Οπότε, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε μονότονη ακολουθία (x_n) με $x_n \to x$ ισχύει $F(x_n) \to F(x)$ (εξηγήστε γιατί). Υποθέτουμε ότι $x_n \downarrow x$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $g_n = f\chi_{(-\infty, x_n]}$ και $g = f\chi_{(-\infty, x]}$, οπότε $F(x_n) = \int f_n\,d\lambda$ και $F(x) = \int g\,d\lambda$. Επιπλέον, $g_n \to g$ κατά σημείο και $|g_n| \leqslant f$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έχουμε:

$$F(x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} f\,d\lambda = \int g_n\,d\lambda \to \int g\,d\lambda = F(x).$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η F είναι συνεχής από δεξιά. Τελείως ανάλογα δείχνουμε ότι η F είναι συνεχής από αριστερά.

6.20. Έστω ένας χώρος μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και f, f_n, $n \in \mathbb{N}$ μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις με $f_n \to f$ και

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu < \infty.$$

Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\mu = \int_A f \, d\mu$$

για κάθε μετρήσιμο σύνολο $A \in \mathcal{A}$. Δώστε παράδειγμα που να δείχνει ότι αυτό δεν ισχύει αν $\int f \, d\mu = \infty$.

Υπόδειξη. Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Από το λήμμα του Fatou παίρνουμε

$$\int_A f \, d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\mu$$

και

$$\int_{A^c} f \, d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{A^c} f_n \, d\mu$$

δηλαδή

$$\int f \, d\mu - \int_A f \, d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \left(\int f_n \, d\mu - \int_A f_n \, d\mu \right).$$

Αφού

$$-\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \left(-\int f_n \, d\mu \right),$$

προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$-\int_A f \, d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \left(-\int_A f_n \, d\mu \right) = -\limsup_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\mu.$$

Δηλαδή,

$$\limsup_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\mu \leqslant \int_A f \, d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\mu.$$

Συνεπώς,

$$\int_A f_n \, d\mu \to \int_A f \, d\mu.$$

6.21. Έστω f μετρήσιμη συνάρτηση σε ένα χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \mu(\{|f| > 2^k\}) < \infty.$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $s = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \chi_{\{2^k < |f| \leqslant 2^{k+1}\}}$. Παρατηρήστε ότι $s \leqslant |f|$ και, από το θεώρημα Beppo Levi,

$$\int_X s \, d\mu = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_X 2^k \chi_{\{2^k < |f| \leqslant 2^{k+1}\}} \, d\mu = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \mu(\{2^k < |f| \leqslant 2^{k+1}\}).$$

Γράφοντας $X = \{f = 0\} \cup \left(\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \{2^k < |f| \leqslant 2^{k+1}\} \right)$ βλέπουμε ότι

$$\int_X |f| \, d\mu = \int_{\{f=0\}} |f| \, d\mu + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{\{2^k < |f| \leqslant 2^{k+1}\}} |f| \, d\mu = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{\{2^k < |f| \leqslant 2^{k+1}\}} |f| \, d\mu.$$

Επίσης, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ έχουμε

$$\begin{aligned}2^k\mu(\{|f| > 2^k\}) - \frac{1}{2}\cdot 2^{k+1}\mu(\{|f| > 2^{k+1}\}) &= 2^k\mu(\{2^k < |f| \leqslant 2^{k+1}\})\\ &\leqslant \int_{\{2^k<|f|\leqslant 2^{k+1}\}} |f|\,d\mu \leqslant 2^{k+1}\mu(\{2^k < |f| \leqslant 2^{k+1}\})\\ &\leqslant 2^{k+1}\mu(\{|f| > 2^k\}).\end{aligned}$$

Προσθέτοντας ως προς k παίρνουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k\mu(\{|f| > 2^k\}) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k\mu(\{|f| > 2^k\}) - \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k+1}\mu(\{|f| > 2^{k+1}\})\\ &\leqslant \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{\{2^k<|f|\leqslant 2^{k+1}\}} |f|\,d\mu \leqslant 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k\mu(\{|f| > 2^k\}).\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k\mu(\{|f| > 2^k\}) \leqslant \int_X |f|\,d\mu \leqslant 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k\mu(\{|f| > 2^k\}).$$

Από αυτή τη διπλή ανισότητα είναι φανερό ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k\mu(\{|f| > 2^k\}) < \infty.$$

Άλλος τρόπος: Μπορούμε να γράψουμε το ολοκλήρωμα της f με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\int |f|\,d\mu = \int_0^{\infty}\mu(\{|f| > t\})\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{2^{k-1}}^{2^k}\mu(\{|f| > t\})\,dt.$$

Παρατηρήστε ότι η $t \mapsto \mu(\{|f| > t\})$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του $t > 0$, οπότε

$$2^{k-1}\mu(\{|f| > 2^k\}) \leqslant \int_{2^{k-1}}^{2^k}\mu(\{|f| > t\})\,dt \leqslant 2^k\mu(\{|f| > 2^{k-1}\}),$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, άρα

$$\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k\mu(\{|f| > 2^k\}) \leqslant \int_0^{\infty}\mu(\{|f| > t\})\,dt \leqslant 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k-1}\mu(\{|f| > 2^{k-1}\}) = 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k\mu(\{|f| > 2^k\}).$$

Επομένως, το ολοκλήρωμα $\int |f|\,d\mu$ είναι πεπερασμένο αν και μόνον αν $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k\mu(\{|f| > 2^k\}) < +\infty$.

6.22. Δείξτε ότι

$$\int_0^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx = 1.$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n(x) = (1 - x/n)^n\chi_{[0,n]}(x)$, για την οποία ισχύει $|f_n(x)| \leqslant e^{-x}\chi_{[0,\infty)}(x)$. Παρατηρούμε ότι η $x \mapsto e^{-x}\chi_{[0,\infty)}(x)$ είναι ολοκληρώσιμη και $f_n(x) \to e^{-x}\chi_{[0,\infty)}(x)$ κατά σημείο. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έπεται το συμπέρασμα.

6.23. Υπολογίστε (αιτιολογώντας πλήρως την απάντηση σας) το

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n (1-(x/n))^n e^{x/2}dx.$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία $f_n(x) = (1-x/n)^n e^{x/2}\chi_{[0,n]}$, η οποία αποτελείται από μετρήσιμες συναρτήσεις με $|f_n(x)| \leqslant e^{-x/2}\chi_{[0,\infty)}$. Η συνάρτηση $g(x) = e^{-x/2}\chi_{[0,\infty)}$ είναι ολοκηρώσιμη, οπότε από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έπεται ότι $\lim_n \int f_n\,d\lambda = \int \lim_n f_n\,d\lambda$. Αλλά, $\lim_n f_n(x) = 0$ για κάθε $x<0$ ενώ αν $x \geqslant 0$ εχουμε

$$\lim_n f_n(x) = \lim_n\left[\left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{x/2}\right] = e^{-x}e^{x/2} = e^{-x/2}.$$

Συνεπώς, έχουμε

$$\lim_n \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{-x/2}\,dx = \int_0^\infty e^{-x/2}\,dx = 2.$$

6.24. Έστω $\{f_n\}$, f ολοκληρώσιμες συναρτήσεις σε ένα χώρο μέτρου $(X,\mathcal{A},\mu)$ και έστω ότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού. Δείξτε ότι

$$\int |f_n - f|\,d\mu \to 0 \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \int |f_n|\,d\mu \to \int |f|\,d\mu.$$

Υπόδειξη. ($\Longrightarrow$) Έχουμε

$$\left|\int |f_n|\,d\mu - \int |f|\,d\mu\right| \leqslant \int \big||f_n|-|f|\big|\,d\mu \leqslant \int |f_n - f|\,d\mu \to 0.$$

Άρα,

$$\int |f_n|\,d\mu \to \int |f|\,d\mu.$$

($\Longleftarrow$) Έχουμε $\big||f_n-f|-|f_n|\big| \leqslant |f|$. Η $|f|$ είναι ολοκλperiodώσιμη και $|f_n-f|-|f_n| \to -|f|$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης,

$$\int (|f_n-f|-|f_n|)\,d\mu \to \int (-|f|)\,d\mu.$$

Έχουμε υποθέσει ότι

$$\int |f_n|\,d\mu \to \int |f|\,d\mu.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη, παίρνουμε

$$\int |f_n - f|\,d\mu \to 0.$$

6.25. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ ένας χώρος μέτρου και f μια μετρήσιμη συνάρτηση.

(i) Αν $f \geqslant 0$ σχεδόν παντού και αν $f_n = \min\{f,n\}$, τότε $\int f_n\,d\mu \to \int f\,d\mu$.

(ii) Αν η f είναι ολοκληρώσιμη και $f_n = \max\{\min\{n,f\},-n\}$, τότε $\int f_n\,d\mu \to \int f\,d\mu$.

Υπόδειξη. (α) Παρατηρούμε ότι $0 \leqslant f_n \leqslant f_{n+1}$ και $f_n \to f$ κατά σημείο, σχεδόν παντού στο X. Το συμπέρασμα έπεται από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης.

(β) Παρατηρούμε ότι $|f_n| \leqslant |f|$ και ότι $f_n \to f$ κατά σημείο, σχεδόν παντού στο X. Το συμπέρασμα έπεται από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

6.26. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα

$$\int_{[a,x]} f\,d\lambda = 0,$$

για κάθε $x \in [a,b]$. Να δείξετε ότι $f = 0$ λ-σχεδόν παντού στο $[a,b]$.

Υπόδειξη. Αφού η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη, έχουμε

$$\int_Z f\,d\lambda = 0 \quad \text{αν } Z \subset [a,b] \text{ με } \lambda(Z) = 0.$$

Από την υπόθεση έπεται ότι αν $a \leq c < d \leq b$ τότε

$$\int_{[c,d]} f\,d\lambda = \int_{[a,d]} f\,d\lambda - \int_{[a,c]} f\,d\lambda = 0.$$

Έστω $G \subset [a,b]$ ανοικτό. Τότε, το G γράφεται στη μορφή $G = \cup_{n=1}^{\infty}[c_n,d_n]$ με τα $[c_n,d_n]$ μη επικαλυπτόμενα. Συνεπώς (εξηγήστε γιατί, θεωρώντας τις f^+ και f^-),

$$\int_G f\,d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[c_n,d_n]} f\,d\lambda = 0.$$

Αν H είναι ένα G_δ υποσύνολο του $[a,b]$, τότε υπάρχει φθίνουσα ακολουθία $\{G_n\}$ ανοικτών υποσυνόλων του $[a,b]$ ώστε $H = \cap_{n=1}^{\infty} G_n$. Έχουμε $f\chi_H = \lim\limits_{n\to\infty}(f\chi_{G_n})$ και $|f\chi_{G_n}| \leq |f|$. Αφού η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη, το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης μας δίνει

$$0 = \int_{G_n} f\,d\lambda = \int_{[a,b]} f\chi_{G_n}\,d\lambda \to \int_{[a,b]} f\chi_H\,d\lambda = \int_H f\,d\lambda.$$

Τέλος, αν E είναι τυχόν μετρήσιμο υποσύνολο του $[a,b]$, μπορούμε να γράψουμε το E στη μορφή $E = H \setminus Z$ όπου H είναι G_δ υποσύνολο του $[a,b]$ και Z ξένο προς το E, με $\lambda(Z) = 0$. Τότε,

$$\int_E f\,d\lambda = \int_H f\,d\lambda - \int_Z f\,d\lambda = 0 - 0 = 0.$$

Αφού $\int_E f\,d\lambda = 0$ για κάθε μετρήσιμο $E \subseteq [a,b]$, συμπεραίνουμε ότι $f = 0$ λ-σχεδόν παντού στο $[a,b]$ (αρκεί να θεωρήσουμε τα $E_1 = \{f > 0\}$ και $E_2 = \{f < 0\}$).

6.27. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}dx = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2}dx = 0.$$

Υπόδειξη. Τα ολοκληρώματα υπολογίζονται με στοιχειώδη τρόπο: θέτοντας $y = 1 + n^2x^2$, παίρνουμε

$$\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\,dx = \frac{1}{2n}\int_1^{1+n^2} \frac{dy}{y} = \frac{\ln(1+n^2)}{2n} \to 0.$$

Τέλος,

$$\int_0^1 \frac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2}\,dx = \sqrt{n}\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\,dx = \frac{\ln(1+n^2)}{2\sqrt{n}} \to 0.$$

Ομάδα Γ΄.

6.28. Υπολογίστε (με πλήρη αιτιολόγηση) το

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi/2}\left(1-\sqrt{\sin x}\right)^n \cos x dx.$$

Υπόδειξη. Οι συναρτήσεις $f_n : [0,\pi/2] \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \left(1-\sqrt{\sin x}\right)^n \cos x$ είναι μη αρνητικές και μετρήσιμες, άρα εφαρμόζεται το θεώρημα Beppo Levi:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi/2}\left(1-\sqrt{\sin x}\right)^n \cos x dx = \int_0^{\pi/2}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\sqrt{\sin x}\right)^n \cos x\Big)\,d\lambda.$$

Επίσης, έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\sqrt{\sin x}\right)^n \cos x = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$$

για κάθε $x \in (0,\pi/2]$. Άρα,

$$\int_0^{\pi/2}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\sqrt{\sin x}\right)^n \cos x\Big)d\lambda = \int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,d\lambda.$$

Για κάθε $0<\delta<\pi/2$ έχουμε

$$\int_{\sin\delta}^{\pi/2}\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,d\lambda = \int_{\sin\delta}^{\pi/2}\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx = \int_\delta^1 \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy = 2(1-\sqrt{\delta}).$$

Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έπεται ότι

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,d\lambda = \lim_{\delta\to 0^+} 2(1-\sqrt{\delta}) = 2.$$

Άρα,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi/2}\left(1-\sqrt{\sin x}\right)^n \cos x dx = 2.$$

Θα μπορούσε κανείς να υπολογίσει και απευθείας το $\int_0^{\pi/2}\left(1-\sqrt{\sin x}\right)^n \cos x dx$ για κάθε n και στη συνέχεια να υπολογίσει το άθροισμα της σειράς.

6.29. Έστω $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ και g ολοκληρώσιμες συναρτήσεις σε ένα χώρο μέτρου $(X,\mathcal{A},\mu)$. Υποθέτουμε ότι $|f_n| \leqslant g_n$, $f_n \to f$, $g_n \to g$ (όλα αυτά σχεδόν παντού) και ότι $\int g_n\,d\mu \to \int g\,d\mu$. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και ότι $\int f_n\,d\mu \to \int f\,d\mu$.

Υπόδειξη. Οι υποθέσεις εξασφαλίζουν ότι οι f, g και οι f_n, g_n παίρνουν πεπερασμένες τιμές σχεδόν παντού. Από την $|f_n| \leqslant g_n$ έχουμε $-g_n \leqslant f_n \leqslant g_n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, δηλαδή

$$f_n + g_n \geqslant 0 \quad \text{και} \quad g_n - f_n \geqslant 0.$$

Αφού $f_n + g_n \to f + g$ και $g_n - f_n \to g - f$, το λήμμα του Fatou μας δίνει:

$$\int f\,d\mu + \int g\,d\mu = \int (f+g)\,d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int (f_n + g_n)\,d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu + \int g\,d\mu$$

(χρησιμοποιήσαμε την $\int g_n\,d\mu \to \int g\,d\mu$). Άρα,

$$\int f\,d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu.$$

Πάλι από το λήμμα του Fatou,

$$\int g\,d\mu - \int f\,d\mu = \int (g-f)\,d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int (g_n - f_n)\,d\mu = \int g\,d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu,$$

δηλαδή,

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu \leqslant \int f\,d\mu.$$

Έπεται ότι

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu = \int f\,d\mu.$$

Άρα,

$$\int f_n\,d\mu \to \int f\,d\mu.$$

6.30. Έστω f Lebesgue μετρήσιμη και σχεδόν παντού πεπερασμένη στο $[0,1]$.

(i) Αν $\int_E f\,d\lambda = 0$ για κάθε μετρήσιμο $E \subseteq [0,1]$ με $\lambda(E) = 1/2$, δείξτε ότι $f = 0$ $\lambda-$σχεδόν παντού στο $[0,1]$.

(ii) Αν $f > 0$ σχεδόν παντού, δείξτε ότι $\inf\{\int_E f\,d\lambda : \ \lambda(E) = 1/2\} > 0$.

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int_{[0,1]} f\,d\lambda = 0$ (διότι το $[0,1]$ είναι η ένωση δύο συνόλων μέτρου $1/2$. Έστω $A, B \subset [0,1]$ με $\lambda(A) = \lambda(B) = \frac{1}{4}$. Τότε, $\lambda([0,1] \setminus (A \cup B)) \geqslant 1/2$. Συνεπώς, υπάρχει $C \subseteq [0,1]$ με $\lambda(C) = 1/4$ και $C \cap A = C \cap B = \varnothing$ (εξηγήστε γιατί). Γράφουμε

$$\int_A f\,d\lambda = \int_{A\cup C} f\,d\lambda - \int_C f\,d\lambda = -\int_C f\,d\lambda = \int_{B\cup C} f\,d\lambda - \int_C f\,d\lambda = \int_B f\,d\lambda,$$

χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\int_{A\cup C} f\,d\lambda = 0 = \int_{B\cup C} f\,d\lambda$ το οποίο ισχύει από την υπόθεση αφού $\lambda(A \cup C) = \lambda(B \cup C) = 1/2$. Τώρα, μπορούμε να δείξουμε ότι αν $\lambda(A) = 1/4$ τότε $\int_A f = 0$. Πράγματι, υπάρχει $B \subset [0,1]$ με $\lambda(B) = 1/4$ και $A \cap B = \varnothing$, συνεπώς,

$$0 = \int_{A\cup B} f\,d\lambda = \int_A f\,d\lambda + \int_B f\,d\lambda = 2\int_A f\,d\lambda.$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι: για κάθε $k \geqslant 1$, αν $A \subset [0,1]$ και $\lambda(A) = \frac{1}{2^k}$ τότε

$$\int_A f\,d\lambda = 0.$$

Έπεται τώρα ότι, για κάθε «δυαδικό ρητό» $x = \frac{m}{2^k}$, όπου $k \in \mathbb{N}$ και $0 \leqslant m \leqslant 2^k$, ισχύει

$$\int_{[0,m/2^k]} f\,d\lambda = 0.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $F(x) = \int_0^x f\,d\lambda$. Όπως στην Άσκηση 6.19, μπορούμε να δείξουμε ότι η F είναι συνεχής. Αφού $F(x) = 0$ για κάθε δυαδικό ρητό $x \in [0,1]$, συμπεραίνουμε ότι $F(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$. Ειδικότερα, $\int_I f\,d\lambda = 0$ για κάθε διάστημα $I \subseteq [0,1]$. Έπεται τώρα ότι $\int_E f\,d\lambda = 0$ για κάθε ανοικτό $E \subseteq [0,1]$ (εξηγήστε γιατί). Αφού $\int_{[0,1]} f\,d\lambda = 0$, έπεται ότι $\int_F f\,d\lambda = 0$ για κάθε κλειστό $F \subseteq [0,1]$.

Υποθέτουμε τώρα ότι $\lambda(\{f \neq 0\}) > 0$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, μπορούμε τότε να υποθέσουμε ότι $\lambda(\{f > 0\}) > 0$. Έπεται ότι υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\lambda(D) > 0$, όπου $D = \{f \geqslant 1/k\}$ (εξηγήστε γιατί). Μπορούμε να βρούμε κλειστό $F \subseteq D$ με $\lambda(F) > 0$ (εξηγήστε γιατί). Τότε, καταλήγουμε σε άτοπο, διότι

$$\int_F f\,d\lambda \geqslant \frac{1}{k}\lambda(F) > 0.$$

(β) Αφού $f > 0$ σχεδόν παντού υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $\lambda(\{x : f(x) > \varepsilon\}) > 2/3$. [Πράγματι· αν θεωρήσουμε την ακολουθία συνόλων $E_k = \{x : f(x) > 1/k\}$ τότε $E_k \nearrow [0,1]$, άρα $\lambda(E_k) \to 1$.] Αν θέσουμε λοιπόν $F = \{x : |f(x)| > \varepsilon\} > 2/3$ τότε μπορούμε να γράψουμε: αν E μετρήσιμο με $\lambda(E) \geqslant 1/2$ τότε

$$\int_E f\,d\lambda \geqslant \int_{E\cap F} f\,d\lambda \geqslant \varepsilon\lambda(E\cap F),$$

διότι η f είναι θετική σχεδόν παντού. Επιπλέον, είναι $\lambda(E \cap F) \geqslant \lambda(E) + \lambda(F) - 1 > 1/6$. Επομένως, $\int_E f\,d\lambda \geqslant \varepsilon/6$ για κάθε τέτοιο σύνολο E, που αποδεικνύει το ζητούμενο.

6.31. Έστω E ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$ με $\lambda(E) < \infty$ και $f : E \to \mathbb{R}$ μια γνησίως θετική μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι: για κάθε $\alpha > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, αν $A \subseteq E$ ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(A) > \alpha$, τότε

$$\int_A f\,d\lambda \geqslant \delta.$$

Υπόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $E_n = \left\{x \in E : f(x) < \frac{1}{n}\right\}$. Η (E_n) είναι φθίνουσα ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του E, και $\bigcap_n E_n = \varnothing$ διότι η f είναι γνησίως θετική. Αφού $\lambda(E) < \infty$, συμπεραίνουμε ότι $\lim_n \lambda(E_n) = 0$.

Έστω $\alpha > 0$. Επιλέγουμε $n(\alpha)$ ώστε $\lambda(E_{n(\alpha)}) < \frac{\alpha}{2}$. Τότε, για κάθε μετρήσιμο $A \subseteq E$ με $\lambda(A) > \alpha$, έχουμε

$$\lambda(A \setminus E_{n(\alpha)}) \geqslant \lambda(A) - \lambda(E_{n(\alpha)}) \geqslant \frac{\alpha}{2}.$$

Συνεπώς,

$$\int_A f\,d\lambda \geqslant \int_{A\setminus E_{n(\alpha)}} f\,d\lambda \geqslant \frac{1}{n(\alpha)}\lambda(A \setminus E_{n(\alpha)}) \geqslant \frac{\alpha}{2n(\alpha)}.$$

Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο, με $\delta = \delta(\alpha) = \frac{\alpha}{2n(\alpha)}$.

6.32. Έστω μια συνάρτηση $f \in \mathcal{L}^1[0,1]$, συνεχής στο 0. Να δείξετε ότι για κάθε n και η συνάρτηση $f_n(x) = f(x^n)$ ανήκει στον $\mathcal{L}^1[0,1]$.

Υπόδειξη. Αφού η f είναι συνεχής στο 0, μπορούμε να βρούμε $\delta \in (0,1)$ και $M > 0$ ώστε $|f(t)| \leqslant M$ για κάθε $t \in [0, \delta]$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f_n(x)|\, d\lambda(x) &= \frac{1}{n} \int_0^1 |f(t)|\, t^{\frac{1}{n}-1}\, d\lambda(t) \\ &= \frac{1}{n} \int_0^\delta |f(t)|\, t^{\frac{1}{n}-1}\, d\lambda(t) + \frac{1}{n} \int_\delta^1 |f(t)|\, t^{\frac{1}{n}-1}\, d\lambda(t) \\ &\leqslant \frac{M}{n} \int_0^\delta t^{\frac{1}{n}-1}\, d\lambda(t) + \frac{1}{n\delta^{1-\frac{1}{n}}} \int_\delta^1 |f(t)|\, d\lambda(t) \\ &\leqslant M\delta^{\frac{1}{n}} + \frac{\delta^{\frac{1}{n}}}{\delta n} \int_0^1 |f(t)|\, d\lambda(t) < \infty. \end{aligned}$$

Άρα, $f_n \in \mathcal{L}^1[0,1]$.

6.33. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $f_n : X \to \mathbb{R}$ ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με

$$\sum_{n=1}^\infty \int |f_n|\, d\mu < +\infty.$$

Δείξτε ότι:

(i) Η σειρά $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ συγκλίνει σχεδόν για κάθε $x \in X$.

(ii) Η συνάρτηση $\sum_{n=1}^\infty f_n$ είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int \left(\sum_{n=1}^\infty f_n\, d\mu \right) = \sum_{n=1}^\infty \int f_n\, d\mu.$$

Υπόδειξη. (α) Από το θεώρημα Beppo Levi έχουμε ότι

$$\int \sum_{n=1}^\infty |f_n|\, d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int |f_n|\, d\mu < +\infty,$$

δηλαδή η συνάρτηση $F = \sum_{n=1}^\infty |f_n|$ είναι ολοκληρώσιμη, άρα πεπερασμένη σχεδόν παντού. Δηλαδή, η σειρά $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ συγκλίνει (απόλυτα) σχεδόν για κάθε $x \in X$.

(β) Έστω $f(x) := \sum_{n=1}^\infty f_n(x)$, η οποία ορίζεται σχεδόν για κάθε $x \in X$. Τότε, σχεδόν για κάθε $x \in X$ ισχύει

$$|f(x)| = \left| \sum_{n=1}^\infty f_n(x) \right| \leqslant \sum_{n=1}^\infty |f_n(x)| = F(x).$$

Η F είναι ολοκληρώσιμη, από υπόθεση, άρα η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη. Θεωρούμε την ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ και παρατηρούμε ότι σχεδόν για κάθε $x \in X$ ισχύει

$$|s_n(x)| \leqslant \sum_{k=1}^n |f_k(x)| \leqslant F(x).$$

Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έχουμε:

$$\int \left(\sum_{n=1}^\infty f_n \right) d\mu = \int (\lim_n s_n)\, d\mu = \lim_n \int s_n\, d\mu = \lim_n \sum_{k=1}^n \int f_k\, d\mu = \sum_{k=1}^\infty \int f_k\, d\mu.$$

6.34. Σταθεροποιούμε $0 < a < b$ και ορίζουμε $f_n(x) = ae^{-nax} - be^{-nbx}$. Δείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |f_n| = \infty,$$

η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,\infty)$, και

$$\int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) \neq \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n.$$

Υπόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι

$$\int_0^{\infty} ae^{-nax} dx = -\frac{a}{na} e^{-nax} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{n}$$

και όμοια $\int_0^{\infty} be^{-nbx} dx = \frac{1}{n}$. Συνεπώς,

$$\int_0^{\infty} f_n(x) dx = \int_0^{\infty} (ae^{-nax} - be^{-nbx}) dx = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0,$$

και έπεται ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n \, d\lambda = 0.$$

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι αν θέσουμε $\delta_n := \frac{\ln(b/a)}{n(b-a)}$ τότε $f_n(x) < 0$ στο $[0, \delta_n)$ και $f_n(x) > 0$ στο (δ_n, ∞). Επομένως,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} |f_n| \, d\lambda &= \int_0^{\delta_n} [be^{-nbx} - ae^{-nax}] \, dx + \int_{\delta_n}^{\infty} [ae^{-nax} - be^{-nbx}] dx \\
&= \left(\frac{e^{-nax}}{n} - \frac{e^{-bnx}}{n} \right) \Big|_0^{\delta_n} + \left(\frac{e^{-nbx}}{n} - \frac{e^{-anx}}{n} \right) \Big|_{\delta_n}^{\infty} \\
&= \frac{2}{n} (e^{-na\delta_n} - e^{-nb\delta_n}) = \frac{2}{n} \left(e^{-\frac{a \ln(b/a)}{b-a}} - e^{-\frac{b \ln(b/a)}{b-a}} \right) = \frac{C_{a,b}}{n},
\end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |f_n| \, d\lambda = +\infty$.

Παρατηρήστε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} ae^{-nax} = \sum_{n=1}^{\infty} a(e^{-ax})^n = a \frac{e^{-ax}}{1 - e^{-ax}},$$

συνεπώς

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = a \frac{e^{-ax}}{1 - e^{-ax}} - b \frac{e^{-bx}}{1 - e^{-bx}}.$$

Με την αντικατάσταση $y = e^{-ax}$ βλέπουμε ότι

$$\int a \frac{e^{-ax}}{1 - e^{-ax}} dx = \ln(1 - e^{-ax}),$$

άρα

$$\int_0^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty f_n\right) d\lambda = (\ln(1-e^{-ax}) - \ln(1-e^{-ax}))\Big|_0^\infty = -\lim_{x\to 0^+} \ln\left(\frac{1-e^{-ax}}{1-e^{-bx}}\right) = \ln(b/a).$$

Συνοψίζοντας,

$$\int_0^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty f_n\right) = \ln(b/a) \neq 0 = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty f_n.$$

6.35. Έστω $k, n \in \mathbb{N}$ με $k \leqslant n$ και $E_1, \ldots, E_n$ μετρήσιμα υποσύνολα του $[0,1]$ με την εξής ιδιότητα: κάθε $x \in [0,1]$ ανήκει σε τουλάχιστον k από τα $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Δείξτε ότι υπάρχει $i \leqslant n$ ώστε $\lambda(E_i) \geqslant k/n$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε την $f = \sum_{i=1}^n \chi_{E_i}$. Αφού κάθε $x \in [0,1]$ ανήκει σε τουλάχιστον k από τα $E_1, \ldots, E_n$, έχουμε

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \chi_{E_i}(x) \geqslant k$$

για κάθε $x \in [0,1]$. Συνεπώς,

$$\sum_{i=1}^n \lambda(E_i) = \sum_{i=1}^n \int_{[0,1]} \chi_{E_i}(x)\, d\lambda = \int_{[0,1]} f\, d\lambda \geqslant k.$$

Έπεται ότι

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda(E_i) \geqslant \frac{k}{n}.$$

Δηλαδή, υπάρχει $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ με την ιδιότητα $\lambda(E_{i_0}) \geqslant \frac{k}{n}$.

6.36. Έστω $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ μια αρίθμηση των ρητών του $[0,1]$ και έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών με $\sum_n |a_n| < \infty$. Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{\sqrt{|x-q_n|}}$$

συγκλίνει απολύτως σχεδόν παντού στο $[0,1]$.

Υπόδειξη. Η $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{\alpha_n}{\sqrt{|x-q_n|}}$ είναι μετρήσιμη, και

$$\int_{[0,1]} |f_n|\, d\lambda = |\alpha_n| \left(\int_0^{q_n} \frac{1}{\sqrt{q_n - x}}\, dx + \int_{q_n}^1 \frac{1}{\sqrt{x-q_n}}\, dx\right) = 2|\alpha_n| \left(\sqrt{q_n} + \sqrt{1-q_n}\right) \leq 4|\alpha_n|.$$

Αφού

$$\sum_{n=1}^\infty \int_{[0,1]} |f_n| \leq 4 \sum_{n=1}^\infty |\alpha_n| < +\infty,$$

η

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\alpha_n}{\sqrt{|x-q_n|}}$$

συγκλίνει απολύτως σχεδόν παντού στο $[0,1]$.

6.37. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^{-1/2}$ αν $0 < x < 1$ και $f(x) = 0$ αλλιώς. Θεωρούμε μια αρίθμηση $\{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ των ρητών και θέτουμε

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x - r_n)}{2^n}.$$

(i) Δείξτε ότι $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$. Ειδικότερα, δείξτε ότι $|g| < \infty$ σχεδόν παντού.

(ii) Δείξτε ότι η g είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο και δεν είναι φραγμένη σε κανένα διάστημα.

(iii) Δείξτε ότι η g^2 δεν είναι ολοκληρώσιμη σε κανένα διάστημα, παρόλο που $g^2 < \infty$ σχεδόν παντού.

Υπόδειξη. (i) Από το θεώρημα Beppo Levi έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(x-q_n)|}{2^n}\, d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int_{\mathbb{R}} |f(x-q_n)|\, d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int_{q_n}^{q_n+1} \frac{1}{\sqrt{x-q_n}}\, d\lambda$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\, d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\, 2\sqrt{t}\Big|_0^1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^n} = 2 < \infty.$$

Αφού $f \geqslant 0$ έχουμε

$$|g(x)| = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(x-q_n)|}{2^n},$$

άρα

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)|\, d\lambda < \infty,$$

δηλαδή η g είναι ολοκληρώσιμη. Ειδικότερα, $|g(x)| < \infty$ σχεδόν παντού.

(ii) Έστω (a,b) ένα διάστημα και έστω $M > 0$. Θεωρούμε ένα ρητό $q_m \in (a,b)$ και βρίσκουμε $\epsilon > 0$ ώστε $(q_m, q_m + \epsilon) \subset (a,b)$. Παρατηρήστε ότι

$$g(x) \geqslant \frac{f(x-q_m)}{2^m} = \frac{1}{2^m \sqrt{x-q_m}} > M$$

για κάθε $x \in (q_m, q_m + \delta)$, όπου $\delta = \min\left\{\frac{1}{2^m M}, \epsilon\right\}$. Αφού το $(q_m, q_m+\delta)$ είναι υποδιάστημα του (a,b), έπεται ότι

$$\lambda(\{x \in (a,b) : g(x) > M\}) > 0$$

και το ίδιο θα ισχύει για κάθε συνάρτηση h που είναι ίση με την g σχεδόν παντού. Αυτό αποδεικνύει ότι κάθε τέτοια h δεν είναι φραγμένη στο (a,b).

Έπεται επίσης ότι η g δεν είναι συνεχής σε κανένα $x \in \mathbb{R}$. Αν $g(x) = +\infty$ δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε, ενώ αν $g(x) < \infty$ παρατηρούμε ότι αν η g ήταν συνεχής στο x τότε θα υπήρχε κάποιο διάστημα $(x-\eta, x+\eta)$ στο οποίο η g θα ήταν φραγμένη, κάτι που είδαμε ότι δεν μπορεί να συμβεί.

(iii) Θεωρούμε τυχόν διάστημα $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Υπάρχει ρητός q_m τέτοιος ώστε $q_m < b < q_m + 1$. Αφού

$$g(x) \geqslant \frac{f(x-q_m)}{2^m} \geqslant 0,$$

έχουμε

$$\int_{(a,b)} g^2(x)\, d\lambda \geqslant \int_{(a,b)} \frac{f^2(x-q_m)}{2^{2m}}\, d\lambda = \frac{1}{2^{2m}} \int_{q_m}^{b} \frac{1}{x-q_m}\, d\lambda = \int_0^{b-q_m} \frac{1}{t}\, d\lambda = \infty.$$

Άρα, η g^2 δεν είναι ολοκληρώσιμη στο (a,b), παρόλο που, αφού $|g(x)| < \infty$ σχεδόν παντού, έχουμε $g^2(x) < \infty$ σχεδόν παντού.

6.38. Έστω $f : [0,1] \to [0,\infty)$ μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \sqrt[n]{f(x)}\, d\lambda = \lambda(\{x : f(x) > 0\}).$$

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι $\sqrt[n]{f(x)} \leqslant f(x) + 1$ για κάθε $x \in [0,1]$. Πράγματι, αν $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ έχουμε $\sqrt[n]{f(x)} \leqslant 1 \leqslant f(x) + 1$, ενώ αν $f(x) \geqslant 1$ έχουμε $\sqrt[n]{f(x)} \leqslant f(x) \leqslant f(x) + 1$. Αν ορίσουμε

$$g_n(x) = \sqrt[n]{f(x)}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

έχουμε λοιπόν $0 \leqslant g_n \leqslant f + 1$, και η συνάρτηση $f + 1$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

Παρατηρούμε τώρα ότι: αν $f(x) = 0$ τότε $g_n(x) = \sqrt[n]{f(x)} = 0 \to 0$, ενώ αν $0 < f(x) < \infty$ τότε $g_n(x) = \sqrt[n]{f(x)} \to 1$. Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, έχουμε $0 \leqslant f(x) < \infty$ σχεδόν παντού. Άρα,

$$\sqrt[n]{f(x)} = g_n(x) \to \chi_{\{x: f(x)>0\}}$$

σχεδόν παντού. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης,

$$\int_0^1 \sqrt[n]{f(x)}\, d\lambda = \int_0^1 g_n(x)\, d\lambda \to \int_0^1 \chi_{\{x: f(x)>0\}}(x)\, d\lambda = \lambda(\{x : f(x) > 0\}).$$

6.39. Έστω $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Για $x > 0$ ορίζουμε

$$g(x) = \int_0^\infty f(t)e^{-xt}\, d\lambda.$$

Δείξτε ότι η g είναι συνεχής και $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Υπόδειξη. Έστω $t > 0$. Θέτουμε $g_t(x) = e^{-xt}$. Η παράγωγος της g_t είναι ίση με $g_t'(x) = -te^{-xt}$. Σταθεροποιούμε $x_0 > 0$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|x - x_0| < \frac{x_0}{2}$, από το θεώρημα μέσης τιμής έχουμε

$$|e^{-tx} - e^{-tx_0}| = |g_t'(z)||x - x_0| = te^{-tz}|x - x_0|$$

για κάποιο z μεταξύ των x, x_0. Αφού $z \geqslant x_0 - \frac{x_0}{2} = \frac{x_0}{2}$, έχουμε $e^{-tz} \leqslant e^{-tx_0/2}$. Άρα,

$$|e^{-tx} - e^{-tx_0}| \leqslant te^{-tx_0/2}|x - x_0|.$$

Θεωρούμε την $h_{x_0}(t) = te^{-tx_0/2}$. Αφού $\lim_{t\to 0^+} h_{x_0}(t) = 0$ και $\lim_{t\to+\infty} h_{x_0}(t) = 0$, υπάρχει $M_{x_0} > 0$ τέτοιος ώστε $|h_{x_0}(t)| \leqslant M_{x_0}$ για κάθε $t > 0$. Άρα, αν $|x - x_0| < \frac{x_0}{2}$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} |g(x) - g(x_0)| &= \left|\int_0^\infty f(t)(e^{-xt} - e^{-x_0 t})\, d\lambda\right| \leqslant \int_0^\infty |f(t)|te^{-tx_0/2}|x - x_0|\, d\lambda \\ &\leqslant M_{x_0}|x - x_0| \int_0^\infty |f| d\lambda. \end{aligned}$$

Παίρνοντας το όριο καθώς το $x \to x_0$ βλέπουμε ότι $g(x) \to g(x_0)$, άρα η g είναι συνεχής.

Για να δείξουμε ότι $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$, θεωρούμε τυχόν $0 < \varepsilon < 1$. Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\int_0^\delta |f|\,d\lambda < \varepsilon.$$

Επομένως, αν $x > \frac{-\log\varepsilon}{\delta}$ και $t > \delta$, τότε $-xt < \log\varepsilon$. Άρα, αν $x > \frac{-\log\varepsilon}{\delta}$,

$$\begin{aligned}|g(x)| &\leqslant \int_0^\infty |f(t)|e^{-xt}\,d\lambda = \int_0^\delta |f(t)|e^{-xt}\,d\lambda + \int_\delta^\infty |f(t)|e^{-xt}\,d\lambda\\ &\leqslant \int_0^\delta |f(t)|\,d\lambda + \int_\delta^\infty |f(t)|e^{\log\varepsilon}\,d\lambda < \varepsilon + \varepsilon\int_0^\infty |f|\,d\lambda.\end{aligned}$$

Αφού το $\varepsilon \in (0,1)$ ήταν τυχόν και $\int_0^\infty |f|\,d\lambda < \infty$, συμπεραίνουμε ότι $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

6.40. Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση με

$$(*) \qquad \int_0^1 |f_n|^3\,d\lambda \leqslant 1,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(i) Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $E \subseteq [0,1]$ Lebesgue μετρήσιμο με $\lambda(E) < \delta$, τότε $\int_E |f_n|\,d\lambda < \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Δείξτε ότι το συμπέρασμα του (i) δεν ισχύει αν η $(*)$ αντικατασταθεί από την $\int_0^1 |f_n|\,d\lambda \leqslant 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη. (i) Παρατηρούμε ότι για κάθε $\alpha, \delta > 0$, αν θέσουμε $B_\alpha = \{x \in [0,1] : |f_n(x)| > a\}$ τότε για κάθε $E \subseteq [0,1]$ με $\lambda(E) < \delta$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int_E |f_n|\,d\lambda &= \int_{E\cap B_\alpha} |f_n|\,d\lambda + \int_{E\setminus B_\alpha} |f_n|\,d\lambda \leqslant \frac{1}{\alpha^2}\int_{E\cap B_\alpha} |f_n|^3\,d\lambda + \alpha\lambda(E\setminus B_\alpha)\\ &\leqslant \frac{1}{\alpha^2} + \alpha\delta.\end{aligned}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγοντας $\alpha = \sqrt{2/\varepsilon}$, από τα παραπάνω έχουμε ότι αν $\lambda(E) < \delta$ τότε

$$\int_E |f_n|\,d\lambda \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}}\delta.$$

Αν λοιπόν επιλέξουμε $\delta = \frac{\varepsilon^{3/2}}{2\sqrt{2}}$ συμπεραίνουμε ότι για κάθε $E \subseteq [0,1]$ με $\lambda(E) < \delta = \frac{\varepsilon^{3/2}}{2\sqrt{2}}$ ισχύει

$$\int_E |f_n|\,d\lambda < \varepsilon.$$

(ii) Θεωρήστε τις συναρτήσεις $f_n = n\cdot\chi_{[0,1/n]}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\int_0^1 |f_n|\,d\lambda = 1$ αλλά αν πάρουμε $\varepsilon = 1/2$ τότε για κάθε $\delta > 0$ μπορούμε να επιλέξουμε $n > 1/\delta$ και να θεωρήσουμε το $E_n = [0,1/n]$ για το οποίο $\lambda(E_n) = \frac{1}{n} < \delta$ αλλά $\int_{E_n} |f_n|\,d\lambda = \int_0^1 |f_n|\,d\lambda = 1 > \frac{1}{2}$.

6.41. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου και f μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν $E_n = \{x : |f(x)| \geqslant n\}$, να δείξετε ότι $n\cdot\mu(E_n) \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

Υπόδειξη. Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη έχουμε $|f(x)| < \infty$ σχεδόν παντού. Ορίζουμε $g_n : X \to [0, \infty]$ με $g_n(x) = |f(x)|\chi_{\{|f|\geqslant n\}}(x)$. Παρατηρήστε ότι $|g_n| = g_n \leqslant |f|$ και $g_n(x) \to 0$ για κάθε $x \in X$ για το οποίο $|f(x)| < \infty$, δηλαδή $g_n \to 0$ σχεδόν παντού. Αφού η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη, εφαρμόζεται το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης και έχουμε

$$\int g_n \, d\mu \to 0.$$

Όμως, $E_n = \{x : |f(x)| \geqslant n\} = \{x : g_n(x) \geqslant n\}$, άρα

$$n \cdot \mu(E_n) = n\mu(\{x : g_n(x)| \geqslant n\}) \leqslant \int g_n \, d\mu.$$

Συνεπώς, $n \cdot \mu(E_n) \to 0$.

6.42. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

(i) Αν $\int_U f \, d\lambda = 0$ για κάθε ανοικτό σύνολο U με $\lambda(U) = 1$, δείξτε ότι $f = 0$ σχεδόν παντού.

(ii) Αν $\int_G f \, d\lambda = \int_{\overline{G}} f \, d\lambda$, για κάθε ανοικτό σύνολο G, δείξτε ότι $f = 0$ σχεδόν παντού.

Υπόδειξη. (i) *Χρησιμοποιεί το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue.* Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ έχουμε $\int_a^{a+1} f \, d\lambda = 0$, απ¨ όπου έπεται ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$ και $t \neq 0$ ισχύει $\int_a^{a+t} f \, d\lambda = \int_{a+1}^{a+1+t} f \, d\lambda$. Άρα, για κάθε $a \in \mathbb{R}$ και $t \neq 0$ ισχύει

$$\frac{1}{t} \int_a^{a+t} f \, d\lambda = \frac{1}{t} \int_{a+1}^{a+1+t} f \, d\lambda$$

και αφήνοντας το $t \to 0$ από το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue συμπεραίνουμε ότι $f(a) = f(a+1)$ σχεδόν παντού.

Θέτουμε $Z_1 = \{a : f(a) \neq f(a+1)\}$ και για κάθε $k \geqslant 2$ ορίζουμε

$$Z_k = \{a : f(a) = f(a+1) = \cdots = f(a+k-1) \neq f(a+k)\}.$$

Τότε, έχουμε $\lambda(Z_k) = 0$ για κάθε $k \geqslant 1$ (από το προηγούμενο βήμα έχουμε $\lambda(Z_1) = 0$ και για $k \geqslant 2$ παρατηρήστε ότι $Z_k \subseteq (k-1) + Z_1$). Ορίζουμε $Z = \bigcup_{k=1}^{\infty} Z_k$. Τότε, $\lambda(Z) = 0$ και για κάθε $a \in \mathbb{R} \setminus Z$ έχουμε

$$f(a) = f(a+1) = \cdots = f(a+k) = \cdots .$$

Πάλι από το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue, υπάρχει $T \subset \mathbb{R} \setminus Z$ με $\lambda(T) = 0$ ώστε, για κάθε $a \in \mathbb{R} \setminus (Z \cup T)$,

$$\lim_{n\to\infty} n \int_a^{a+1/n} f \, d\lambda = f(a).$$

Έστω $a \in \mathbb{R} \setminus (Z \cup T)$. Τότε, το σύνολο $U_{a,n} = \bigcup_{k=0}^{n-1} (a+k, a+k+1/n)$ είναι ανοικτό και $\lambda(U_{a,n}) = 1$. Από την υπόθεση και την $\int_a^{a+t} f \, d\lambda = \int_{a+1}^{a+1+t} f \, d\lambda$ που ισχύει για κάθε a και $t \neq 0$,

$$0 = \int_{U_{a,n}} f \, d\lambda = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+k}^{a+k+1/n} f \, d\lambda = \sum_{k=0}^{n-1} \int_a^{a+1/n} f \, d\lambda = n \int_a^{a+1/n} f \, d\lambda \longrightarrow f(a),$$

δηλαδή $f(a) = 0$ για κάθε $a \in \mathbb{R} \setminus (Z \cup T)$. Αφού $\lambda(Z \cup T) = 0$, έπεται το ζητούμενο.

(ii) *Χρησιμοποιεί το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue.* Έστω $I \subset \mathbb{R}$ φραγμένο κλειστό διάστημα. Για κάθε $n \geqslant 1$ μπορούμε να κατασκευάσουμε σύνολο $C_{I,n}$ τύπου Cantor με $\lambda(C_{I,n}) > \lambda(I) - 1/n$. Το σύνολο $U_{I,n} = I \setminus C_{I,n}$ είναι ανοικτό και ισχύουν οι $\lambda(U_{I,n}) < 1/n$ και $\overline{U}I, n = I$. Άρα,

$$\int_I f\,d\lambda = \int_{U_{I,n}} f\,d\lambda \longrightarrow 0$$

από την απόλυτη συνέχεια του ολοκληρώματος. Έχουμε δείξει ότι $\int_J f\,d\lambda = 0$ για κάθε φραγμένο διάστημα. Από το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue,

$$0 = \frac{1}{t}\int_{[x,x+t]} f\,d\lambda \longrightarrow f(x)$$

καθώς το $t \to 0^+$ σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δηλαδή, $f(x) = 0$ σχεδόν παντού.

6.43. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και μια συνάρτηση $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει σταθερά $C \in \mathbb{R}$ ώστε $\int_E f\,d\mu \leqslant C$ για κάθε μετρήσιμο σύνολο E πεπερασμένου μέτρου. Δείξτε ότι

$$\int_X f\,d\mu \leqslant C.$$

Ισχύει το συμπέρασμα χωρίς την υπόθεση της ολοκληρωσιμότητας της f;

Υπόδειξη. Η f είναι ολοκληρώσιμη, άρα $\int_X f^+\,d\mu = A < \infty$ και $\int_X f^-\,d\mu = B < \infty$. Για κάθε $n \geqslant 1$ το σύνολο $E_n = \{x : f^+(x) \geqslant 1/n\}$ έχει πεπερασμένο μέτρο: από την ανισότητα Markov έχουμε $\frac{1}{n}\mu(E_n) \leqslant \int_X f^+\,d\mu = A$, άρα $\mu(E_n) \leqslant nA$. Συνεπώς,

$$C \geqslant \int_{E_n} f\,d\mu = \int_{E_n} f^+\,d\mu - \int_{E_n} f^-\,d\mu \geqslant \int_{E_n} f^+\,d\mu - \int_X f^-\,d\mu = \int_{E_n} f^+\,d\mu - B.$$

Από το θεωρημα μονότονης σύγκλισης,

$$\int_{E_n} f^+\,d\mu \longrightarrow \int_X f^+\,d\mu = A,$$

άρα

$$C \geqslant \lim \int_{E_n} f^+\,d\mu - B = A - B = \int_X f\,d\mu.$$

Η υπόθεση της ολοκληρωσιμότητας της f είναι απαραίτητη. Θεωρήστε το σύνολο $X = \mathbb{R}$ και την σ-άλγεβρα των υποσυνόλων E του $\mathbb{R}$ που είναι αριθμήσιμα ή έχουν αριθμήσιμο συμπλήρωμα. Στον $(X, \mathcal{A})$ θεωρήστε το μέτρο μ με $\mu(E) = 0$ αν το E είναι αριθμήσιμο και $\mu(E) = \infty$ αν το $X \setminus E$ είναι αριθμήσιμο. Παρατηρήστε ότι για τη σταθερή συνάρτηση $f \equiv 1$ έχουμε $\int_X f\,d\mu = \infty$ ενώ για κάθε $E \in \mathcal{A}$ που έχει πεπερασμένο μέτρο ισχύει ότι $\mu(E) = 0$ και συνεπώς $\int_E f\,d\mu = 0 \leqslant C := 1$.

6.44. Έστω μια ακολουθία $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$ Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες:

(α΄) $\lambda(A_k) \geqslant 1/2$, για κάθε k και

(β΄) $\lambda(A_k \cap A_s) \leqslant 1/4$ για κάθε $k \neq s$.

Δείξτε ότι

$$\lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \geqslant 1.$$

Υπόδειξη. Αν $\lambda(A_{k_0}) \geqslant 1$ για κάποιον k_0 τότε

$$\lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \geqslant \lambda(A_{k_0}) \geqslant 1.$$

Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι $\lambda(A_k) < 1$ για κάθε $k \geqslant 1$. Θεωρούμε τυχόντα $n \in \mathbb{N}$ και τη συνάρτηση $g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k}(x)$. Θέτουμε $B_n = A_1 \cup \cdots \cup A_n$ και εφαρμόζουμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz στη μορφή

$$\left(\int_{B_n} g_n \, d\lambda\right)^2 \leqslant \left(\int_{B_n} g_n^2 \, d\lambda\right)\left(\int_{B_n} 1^2 \, d\lambda\right) = \lambda(B_n)\left(\int_{B_n} g_n^2 \, d\lambda\right).$$

Έχουμε

$$\int_{B_n} g_n \, d\lambda = \sum_{k=1}^{n} \int_{B_n} \chi_{A_k} \, d\lambda = \sum_{k=1}^{n} \lambda(B_n \cap A_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda(A_k) \geqslant \frac{n}{2}$$

και

$$\begin{aligned}\int_{B_n} g_n^2 \, d\lambda &= \int_{B_n} \left(\sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k}\right)^2 d\lambda = \sum_{k=1}^{n} \int_{B_n} \chi_{A_k} \, d\lambda + \sum_{k \neq s} \int_{B_n} \chi_{A_k}\chi_{A_s} \, d\lambda \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda(A_k) + \sum_{k \neq s} \lambda(A_k \cap A_s) \leqslant n + n(n-1)\frac{1}{4} = \frac{n^2+3n}{4}.\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\lambda(B_n) \geqslant \frac{n^2}{4} \cdot \frac{4}{n^2+3n} = \frac{n}{n+3}.$$

Αφού $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \supseteq B_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, συμπεραίνουμε ότι

$$\lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \geqslant \lim \lambda(B_n) \geqslant \lim \frac{n}{n+3} = 1.$$

Κεφάλαιο 7

Σύγκλιση ακολουθιών μετρήσιμων συναρτήσεων

Σε όλες τις παρακάτω ασκήσεις, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι ένας χώρος μέτρου, όλα τα υποσύνολα του X που εμφανίζονται ανήκουν στην $\mathcal{A}$ και οι $f_n, f : X \to \mathbb{C}$ είναι μετρήσιμες.

Ομάδα Α΄.

7.1. Έστω $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι αν $f_n \to f$ κατά σημείο μ-σχεδόν παντού, τότε είναι και $\varphi(f_n) \to \varphi(f)$ κατά σημείο μ-σχεδόν παντού.

Υπόδειξη. Υπάρχει $Z \subseteq X$ με $\mu(Z) = 0$ τέτοιο ώστε $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \notin Z$. Αφού η φ είναι συνεχής, από την αρχή της μεταφοράς παίρνουμε $\varphi(f(x_n)) \to \varphi(f(x))$ για κάθε $x \notin Z$. Άρα, $\varphi(f_n) \to \varphi(f)$ κατά σημείο μ-σχεδόν παντού.

7.2. Να δείξετε ότι αν η ακολουθία $\{\chi_{A_n}\}$ συγκλίνει σε μια συνάρτηση f κατά μέτρο ή σχεδόν ομοιόμορφα, τότε υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ ώστε $f = \chi_A$ μ-σχεδόν παντού.

Υπόδειξη. (α) Έστω ότι $\chi_{A_n} \to f$ κατά μέτρο. Υπάρχει υπακολουθία $\chi_{A_{k_n}} \to f$ σχεδόν παντού. Θέτουμε $B = \{x \in X : \chi_{A_{k_n}}(x) \to f(x)\}$. Τότε, $\mu(X \setminus B) = 0$ και για κάθε $x \in B$ έχουμε $f(x) \in \{0, 1\}$. Αν ορίσουμε $A = B \cap \{x \in X : f(x) = 1\}$ τότε $f(x) = \chi_A(x)$ για κάθε $x \in B$. Αφού $\mu(X \setminus B) = 0$, έπεται ότι $f = \chi_A$ σχεδόν παντού.

(β) Έστω ότι $\chi_{A_n} \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $B_\varepsilon \in \mathcal{A}$ ώστε $\mu(X \setminus B_\varepsilon) < \varepsilon$ και $\chi_{A_n} \to f$ ομοιόμορφα στο B_ε. Ορίζουμε $A = \bigcup_{k=1}^\infty B_{1/k}$. Τότε, $\mu(X \setminus B) = 0$. Επίσης, για κάθε $x \in B$ υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in B_{1/k}$, άρα $\chi_{A_n}(x) \to f(x)$, απ¨ όπου έπεται ότι $f(x) \in \{0, 1\}$. Αν ορίσουμε $A = B \cap \{x \in X : f(x) = 1\}$ τότε $f(x) = \chi_A(x)$ για κάθε $x \in B$. Αφού $\mu(X \setminus B) = 0$, έπεται ότι $f = \chi_A$ σχεδόν παντού.

7.3. Υποθέτουμε ότι $\mu(X) < \infty$ και ότι για μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n : X \to \mathbb{C}$ ισχύει $\sup_n |f_n(x)| < \infty$ $\mu-$σχεδόν για κάθε $x \in X$. Να δείξετε ότι για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $B \in \mathcal{A}$ με $\mu(X \setminus B) < \delta$ ώστε

$$\sup_{n \in \mathbb{N}, x \in B} |f_n(x)| < \infty.$$

Υπόδειξη. Ορίζουμε $A_k = \left\{ x \in X : \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)| \leqslant k \right\}$. Τότε, $A_k \subseteq A_{k+1}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, και η υπόθεση εξασφαλίζει ότι $A_k \nearrow X \setminus Z$, όπου $\mu(Z) = 0$. Άρα, $\lim_{k \to \infty} \mu(A_k) = \mu(X)$.

Έστω $\delta > 0$. Αφού $\mu(X) < \infty$, μπορούμε να γράψουμε $\mu(X \setminus A_k) = \mu(X) - \mu(A_k) \to 0$. Άρα, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\mu(X \setminus A_{k_0}) < \delta$. Θέτουμε $B = A_{k_0}$. Τότε, $\mu(X \setminus B) < \delta$ και $|f_n(x)| \leqslant k_0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in B$, δηλαδή $\sup_{n\in\mathbb{N}, x\in B} |f_n(x)| \leqslant k_0 < \infty$.

7.4. Αν $f_n \geqslant 0$ και $f_n \to f$ κατά μέτρο, δείξτε ότι

$$\int_X f d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Υπόδειξη. Θέτουμε $J := \liminf\limits_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu$. Υπάρχει υπακολουθία $\{f_{k_n}\}$ της $\{f_n\}$ ώστε

$$J = \lim_{n\to\infty} \int_X f_{k_n}\, d\mu.$$

Έχουμε $f_{k_n} \to f$ κατά μέτρο, άρα υπάρχει υπακολουθία $\{f_{k_{\lambda_n}}\}$ της $\{f_{k_n}\}$ ώστε $f_{k_{\lambda_n}} \to f$ σχεδόν παντού. Από το λήμμα του Fatou,

$$\int_X f\, d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_X f_{k_{\lambda_n}}\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_{k_{\lambda_n}}\, d\mu = J.$$

Ομάδα Β΄.

7.5. Υποθέτουμε ότι ο X είναι μετρικός χώρος, εφοδιασμένος με ένα μέτρο Borel μ και θεωρούμε μια συνεχή συνάρτηση $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Αποδείξτε ότι αν $f_n \to f$ κατά μέτρο (αντίστ. σχεδόν ομοιόμορφα), τότε είναι και $\varphi(f_n) \to \varphi(f)$ κατά μέτρο (αντίστ. σχεδόν ομοιόμορφα).

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ κατά μέτρο. Έστω $\varepsilon > 0$ και $\eta > 0$. Η φ είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $|z - y| < \delta$ τότε $|\varphi(z) - \varphi(y)| < \varepsilon$. Συνεπώς, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\{x \in X : |(\varphi \circ f_n)(x) - (\varphi \circ f)(x)| \geqslant \varepsilon\} \subseteq \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \delta\}.$$

Αφού $f_n \to f$ κατά μέτρο, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geqslant n_0$,

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \delta\}) < \eta.$$

Άρα, για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε

$$\mu(\{x \in X : |(\varphi \circ f_n)(x) - (\varphi \circ f)(x)| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \eta.$$

Αφού το $\eta > 0$ ήταν τυχόν,

$$\mu(\{x \in X : |(\varphi \circ f_n)(x) - (\varphi \circ f)(x)| \geqslant \varepsilon\}) \to 0.$$

Δηλαδή, $\varphi \circ f_n \to \varphi \circ f$ κατά μέτρο.

Υποθέτουμε τώρα ότι $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < \varepsilon$, ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $X \setminus A$. Αφού η φ είναι ομοιόμορφα συνεχής, $\varphi \circ f_n \to \varphi \circ f$ ομοιόμορφα στο $X \setminus A$: θεωρήστε τυχόν $\eta > 0$ και βρείτε $\delta > 0$ ώστε: αν $|z - y| < \delta$ τότε $|\varphi(z) - \varphi(y)| < \eta$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geqslant n_0$ και για κάθε $x \in X \setminus A$,

$$|f_n(x) - f(x)| < \delta, \text{ και συνεπώς, } |(\varphi \circ f_n)(x) - (\varphi \circ f)(x)| < \eta.$$

7.6. Δείξτε ότι η ακολουθία $\{\chi_{A_n}\}$ είναι Cauchy κατά μέσο αν και μόνο αν $\mu(A_n \triangle A_m) \to 0$ για $n, m \to \infty$. Δείξτε επίσης ότι αν η ακολουθία $\{\chi_{A_n}\}$ είναι Cauchy σχεδόν ομοιόμορφα τότε $\mu(A_n \triangle A_m) \to 0$ για $n, m \to \infty$. Ισχύει το αντίστροφο;

Υπόδειξη. (α) Παρατηρούμε αρχικά ότι $\chi_{E_n \triangle E_m} = |\chi_{E_m} - \chi_{E_n}|$. Συνεπώς,

$$\mu(E_n \triangle E_m) = \int_X \chi_{E_n \triangle E_m}\, d\mu = \int_X |\chi_{E_m} - \chi_{E_n}|\, d\mu$$

για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$. Αυτό αποδεικνύει ότι η $\{\chi_{E_n}\}$ είναι Cauchy κατά μέσο αν και μόνο αν $\mu(E_n \triangle E_m) \to 0$ όταν $m, n \to \infty$.

(β) Έστω ότι η $\{\chi_{E_n}\}$ είναι Cauchy σχεδόν ομοιόμορφα. Θεωρούμε τυχόν $\delta > 0$. Υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < \delta$ ώστε: για κάθε $0 < \varepsilon < 1$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $m, n \geqslant n_0$,

$$|\chi_{E_n}(x) - \chi_{E_m}(x)| < \varepsilon \text{ αν } x \notin A.$$

Αφού $\varepsilon < 1$, αυτό σημαίνει ότι $E_n \triangle E_m \subseteq A$, άρα $\mu(E_n \triangle E_m) < \delta$ για κάθε $m, n \geqslant n_0$. $m, n \to \infty$. Αυτό σημαίνει ότι $\mu(E_n \triangle E_m) \to 0$ όταν $m, n \to \infty$.

Το αντίστροφο δεν ισχύει. Έστω $X = [0, 1)$ και μ το μέτρο Lenesgue στο $[0, 1)$. Θεωρήστε τη φυσιολογική αρίθμηση $\{I_s\}$ των διαστημάτων $I_{n,k} = \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)$, $n \geqslant 1$, $1 \leqslant k \leqslant 2^n$ (πρώτα τα $I_{1,1}, I_{1,2}$, μετά τα $I_{2,1}, I_{2,2}, I_{23}, I_{2,4}$ και ούτω καθεξής). Τότε $\mu(I_s \triangle I_r) \to 0$ όταν $r, s \to \infty$, αλλά η ακολουθία $\chi_{I_s}(x)$ δεν συγκλίνει για κανένα $x \in [0, 1)$ (παίρνει άπειρες φορές την τιμή 0 και άπειρες φορές την τιμή 1), άρα η χ_{I_s} δεν συγκλίνει σχεδόν ομοιόμορφα.

7.7. Υποθέτουμε ότι $\mu(X) < \infty$. Για $\varepsilon > 0$ και $k \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τα σύνολα

$$E_k(\varepsilon) = \{x \in X : \ |f_k(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}.$$

Αποδείξτε ότι $f_n \to f$ κατά σημείο μ σχεδόν παντού αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k(\varepsilon)\right) = 0.$$

Υπόδειξη. (α) Υποθέτουμε πρώτα ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $\lim_{n\to\infty} \mu(\cup_{k=n}^{\infty} E_k(\varepsilon)) = 0$. Αφού $\mu(X) < \infty$, αυτό σημαίνει ότι $\mu(\limsup_n E_n(\varepsilon)) = 0$ για κάθε $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε το σύνολο

$$Z = \bigcup_{s=1}^{\infty} \limsup_n E_n(1/s).$$

Τότε, $\mu(Z) = 0$. Θα δείξουμε ότι, αν $x \in A = X \setminus Z$ τότε $f_n(x) \to f(x)$. Έστω $\varepsilon > 0$. Βρίσκουμε $s \in \mathbb{N}$ ώστε $1/s < \varepsilon$. Αφού $x \notin \limsup_n E_n(1/s)$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $n \geqslant n_0$, τότε $x \notin E_n(1/s)$. Δηλαδή, για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{s} < \varepsilon.$$

(β) Υποθέτουμε τώρα ότι $f_n \to f$ στο $A = X \setminus Z$, όπου $\mu(Z) = 0$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αν $x \in A$, τότε τελικά ισχύει $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Δηλαδή, $\limsup_n E_n(\varepsilon) \subseteq Z$. Άρα,

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} \mu(\cup_{k=n}^{\infty} E_k(\varepsilon)) = \mu(\limsup_n E_n(\varepsilon)) \leqslant \mu(Z) = 0.$$

7.8. Υποθέτουμε ότι $\mu(X) < \infty$. Αποδείξτε ότι αν για ακολουθίες μετρήσιμων συναρτήσεων $\{f_n\}, \{g_n\}$ ισχύει $f_n \to f$ κατά μέτρο και $g_n \to g$ κατά μέτρο, τότε είναι και $f_ng_n \to fg$ κατά μέτρο.

Υπόδειξη. Αφού $\mu(X) < \infty$, για να δείξουμε ότι $f_ng_n \to fg$ κατά μέτρο αρκεί να δείξουμε ότι κάθε υπακολουθία της $\{f_ng_n\}$ έχει υπακολουθία που συγκλίνει στην fg μ-σχεδόν παντού (θυμηθείτε από το Θεώρημα 7.5.8 ότι οι δύο προτάσεις είναι ισοδύναμες όταν $\mu(X) < \infty$).

Θεωρούμε την $\{f_{k_n}g_{k_n}\}$. Τότε, $f_{k_n} \to f$ κατά μέτρο. Άρα, υπάρχει υπακολουθία $\{f_{k_{\lambda_n}}\}$ της $\{f_{k_n}\}$ η οποία συγκλίνει στην f σχεδόν παντού. Ομοίως, $g_{k_{\lambda_n}} \to g$ κατά μέτρο, άρα υπάρχει υπακολουθία $\{g_{k_{\lambda_{s_n}}}\}$ της $\{g_{k_{\lambda_n}}\}$ η οποία συγκλίνει στην g σχεδόν παντού. Τότε, $f_{k_{\lambda_{s_n}}}g_{k_{\lambda_{s_n}}} \to fg$ σχεδόν παντού. Έπεται το ζητούμενο.

7.9. Αν για μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση $g : X \to [0, \infty]$ ισχύει $|f_n| \leqslant g$ και επιπλέον $f_n \to f$ κατά μέτρο, να δείξετε ότι

$$\int f_n d\mu \to \int f d\mu.$$

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι το συμπέρασμα δεν ισχύει. Τότε, υπάρχουν $\varepsilon > 0$ και υπακολουθία $\{f_{k_n}\}$ της $\{f_n\}$ ώστε

$$(*) \qquad \left|\int_X (f_{k_n} - f)\, d\mu\right| \geqslant \varepsilon \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Αφού $f_n \to f$ κατά μέτρο, έχουμε $f_{k_n} \to f$ κατά μέτρο. Άρα, υπάρχει υπακολουθία $\{f_{k_{\lambda_n}}\}$ της $\{f_{k_n}\}$ με $f_{k_{\lambda_n}} \to f$ σχεδόν παντού. Αφού η g είναι ολοκληρώσιμη και $f_{k_{\lambda_n}} \to f$ σχεδόν παντού, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης: παίρνουμε

$$\int_X (f_{k_{\lambda_n}} - f)\, d\mu \to 0,$$

το οποίο είναι άτοπο, λόγω της $(*)$.

Ομάδα Γ΄.

7.10. Υποθέτουμε ότι $\mu(X) < \infty$ και θεωρούμε ακολουθία $f_n : X \to [-\infty, \infty]$ μετρήσιμων συναρτήσεων με $|f_n| < \infty$ μ-σχεδόν παντού.

(α) Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (λ_n) θετικών αριθμών ώστε $\lambda_n f_n \to 0$ κατά σημείο μ-σχεδόν παντού.

(β) Αποδείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $g : X \to [0, \infty)$ και ακολουθία (r_n) θετικών αριθμών ώστε $|f_n| \leqslant r_n g$ μ-σχεδόν παντού για κάθε n.

Υπόδειξη. (α) Δείχνουμε πρώτα ότι αν η $g : X \to [-\infty, \infty]$ είναι μετρήσιμη και $|g(x)| < \infty$ σχεδόν παντού τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $b > 0$ ώστε $\mu(\{x \in X : |g(x)| > b\}) < \varepsilon$. Θέτουμε $T = \{x \in X : |g(x)| = +\infty\}$. Τότε, $\mu(T) = 0$. Αν $A_n = \{x : |g(x)| \leqslant n\}$ τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X \setminus T$ και η $\{A_n\}$ είναι αύξουσα. Άρα, $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(X \setminus T) = \mu(X)$. Επομένως, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\mu(A_k) > \mu(X) - \varepsilon$. Τότε, $\mu(\{x \in X : |g(x)| > k\}) < \varepsilon$.

Εφαρμόζοντας αυτό για $g = f_n$ και $\varepsilon = 2^{-n}$ βρίσκουμε $b_n > 0$ ώστε $\mu(\{x : |f_n(x)| > b_n\}) < 1/2^n$. Θέτουμε $A_n = \{x : |f_n(x)| > b_n\}$ τότε $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < +\infty$. Αν θέσουμε $Z = \limsup A_n$, τότε από το λήμμα Borel-Cantelli παίρνουμε $\mu(Z) = 0$. Αν $x \notin Z$ τότε υπάρχει $N_x \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geqslant N_x$ ισχύει $|f_n(x)| \leqslant b_n$. Αν θεωρήσουμε την $\lambda_n = \frac{1}{nb_n}$ τότε έχουμε ότι για κάθε $x \notin Z$ ισχύει $\lambda_n f_n(x) \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

(β) Από την υπόθεση, αν $Z_n = \{|f_n| = +\infty\}$ και $Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$ τότε $\mu(Z) = 0$. Δουλεύοντας στο $X \setminus Z$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $|f_n(x)| < +\infty$ για κάθε $n \geqslant 1$ και $x \in X$. Από το (α) έχουμε ότι υπάρχουν $\lambda_n > 0$ ώστε $\lambda_n f_n \to 0$ σχεδόν παντού, συνεπώς μπορούμε πάλι να υποθέσουμε ότι $\lambda_n f_n \to 0$ παντού.

Από το θεώρημα Egorov υπάρχει $A_1 \subseteq X$ ώστε $\mu(X \setminus A_1) < 1$ και $\lambda_n f_n \to 0$ ομοιόμορφα στο A_1. Ειδικότερα, η $(\lambda_n f_n)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο A_1, δηλαδή υπάρχει $t_1 > 0$ ώστε $\lambda_n |f_n(x)| \leqslant t_1$ για κάθε $n \geqslant 1$ και $x \in A_1$. Πάλι από το θεώρημα Egorov υπάρχει $A_2 \subseteq X \setminus A_1$ ώστε $\mu((X \setminus A_1) \setminus A_2) < 1/2$ και $\lambda_n f_n \to 0$ ομοιόμορφα στο A_2. Ειδικότερα, η $(\lambda_n f_n)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο A_2, δηλαδή υπάρχει $t_2 > 0$ ώστε $\lambda_n |f_n(x)| \leqslant t_2$ για κάθε $n \geqslant 1$ και $x \in A_2$. Επαγωγικά, ορίζουμε ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων (A_k) και ακολουθία θετικών αριθμών (t_k) ώστε $\mu(X \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_k)) < 1/k$ και $\lambda_n |f_n(x)| \leqslant t_k$ για κάθε $n \geqslant 1$ και $x \in A_k$.

Ορίζουμε μετρήσιμη συνάρτηση $g : X \to [0, \infty)$ με

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k \chi_{A_k}(x).$$

Αν $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ τότε $\mu(X \setminus A) = 0$ και, από την κατασκευή, για κάθε $x \in A$ και $n \geqslant 1$ έχουμε

$$|f_n(x)| \leqslant r_n g(x)$$

όπου $r_n = 1/\lambda_n$. Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο.

7.11. Υποθέτουμε ότι $\mu(X) < \infty$ και ότι $f_n \to 0$ κατά σημείο μ-σχεδόν παντού.

(α) Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (λ_n) θετικών αριθμών με $\lambda_n \to \infty$ ώστε $\lambda_n f_n \to 0$ κατά σημείο μ-σχεδόν παντού.

(β) Αποδείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $g : X \to [0, \infty)$ και ακολουθία (ε_n) θετικών αριθμών και $\varepsilon_n \to 0$ ώστε $|f_n| \leqslant \varepsilon_n g$ μ-σχεδόν παντού για κάθε n.

Υπόδειξη. (α) Υπάρχει $N \subset X$ με $\mu(N) = 0$ ώστε $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \in X \setminus N$. Για κάθε $m, s \geqslant 1$ ορίζουμε

$$A_{s,m} = \left\{ x \in X : \sup_{n \geqslant s} |f_n(x)| \leqslant \frac{1}{m} \right\}.$$

Η ακολουθία $(A_{s,m})_{s=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα και $A_{s,m} \nearrow X \setminus N$. Άρα, υπάρχει $n_m \in \mathbb{N}$ ώστε $\mu(X \setminus A_{n_m,m}) < \frac{1}{2^m}$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ακολουθία $(n_m)_{m=1}^{\infty}$ είναι γνησίως αύξουσα.

Ορίζουμε $\lambda_n = \sqrt{m}$ για κάθε $k \in \{n_m, \ldots, n_{m+1} - 1\}$. Τότε, $\lambda_n \to \infty$ και θα δείξουμε ότι $\lambda_n f_n \to 0$ μ-σχεδόν παντού. Θέτουμε $B_m = A_{n_m,m}$ και έχουμε $\sum_{m=1}^{\infty} \mu(X \setminus B_m) < \infty$, άρα $\mu(\limsup (X \setminus B_m)) = 0$ από το λήμμα Borel-Cantelli. Έστω $x \notin \limsup (X \setminus B_m)$. Τότε υπάρχει $m_x \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in B_m$ για κάθε $m \geqslant m_x$. Τότε, για κάθε $n \geqslant n_{m_x}$ υπάρχει $m(n) \geqslant m_x$ ώστε $n_{m(n)} \leqslant n < n_{m(n)+1}$. Παρατηρήστε ότι $\lim_{n \to \infty} m(n) = \infty$. Αφού $x \in B_m$ έχουμε

$$\lambda_n f_n(x) = \sqrt{m(n)} f_n(x) \leqslant \sqrt{m(n)} \cdot \frac{1}{m(n)} = \frac{1}{\sqrt{m(n)}} = 0.$$

(β) Δουλεύουμε ακριβώς όπως στο (β) της Άσκησης 7.10. Από το (α) έχουμε ότι υπάρχουν $\lambda_n \to \infty$ ώστε $\lambda_n f_n \to 0$ σχεδόν παντού, συνεπώς μπορούμε πάλι να υποθέσουμε ότι $\lambda_n f_n \to 0$ παντού.

Από το θεώρημα Egorov υπάρχει $A_1 \subseteq X$ ώστε $\mu(X \setminus A_1) < 1$ και $\lambda_n f_n \to 0$ ομοιόμορφα στο A_1. Ειδικότερα, η $(\lambda_n f_n)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο A_1, δηλαδή υπάρχει $t_1 > 0$ ώστε $\lambda_n |f_n(x)| \leqslant t_1$ για κάθε $n \geqslant 1$ και $x \in A_1$. Πάλι από το θεώρημα Egorov υπάρχει $A_2 \subseteq X \setminus A_1$ ώστε $\mu((X \setminus A_1) \setminus A_2) < 1/2$ και $\lambda_n f_n \to 0$ ομοιόμορφα στο A_2. Ειδικότερα, η $(\lambda_n f_n)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο A_2, δηλαδή υπάρχει $t_2 > 0$ ώστε $\lambda_n |f_n(x)| \leqslant t_2$ για κάθε $n \geqslant 1$ και $x \in A_2$. Επαγωγικά, ορίζουμε ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων (A_k) και ακολουθία θετικών αριθμών (t_k) ώστε $\mu(X \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_k)) < 1/k$ και $\lambda_n |f_n(x)| \leqslant t_k$ για κάθε $n \geqslant 1$ και $x \in A_k$.

Ορίζουμε μετρήσιμη συνάρτηση $g : X \to [0, \infty)$ με

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k \chi_{A_k}(x).$$

Αν $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ τότε $\mu(X \setminus A) = 0$ και, από την κατασκευή, για κάθε $x \in A$ και $n \geqslant 1$ έχουμε

$$|f_n(x)| \leqslant \varepsilon_n g(x)$$

όπου $\varepsilon_n = 1/\lambda_n \to 0$. Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο.

7.12. Υποθέτουμε ότι $\mu(X) < \infty$ και ότι οι f_n, f είναι ολοκληρώσιμες. Λέμε ότι οι f_n είναι *ομοιόμορφα ολοκληρώσιμες* αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < \delta$, τότε να ισχύει

$$\int_A |f_n| d\mu < \varepsilon, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Αποδείξτε ότι $f_n \to f$ κατά μέσο αν και μόνο αν οι f_n είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμες και $f_n \to f$ κατά μέτρο.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι $f_n \to f$ κατά μέσο. Από την ανισότητα του Chebyshev βλέπουμε ότι $f_n \to f$ κατά μέτρο. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $n \geqslant n_0$ τότε $\int_X |f_n - f| \, d\mu < \varepsilon/2$. Επίσης, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $\mu(A) < \delta$ τότε $\int_A |f| \, d\mu < \varepsilon/2$ και $\int_A |f_n| \, d\mu < \varepsilon/2$ για κάθε $n < n_0$ (εξηγήστε γιατί). Τότε, για κάθε $n \geqslant n_0$ και για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < \delta$ έχουμε

$$\int_A |f_n| \, d\mu \leqslant \int_A |f_n - f| \, d\mu + \int_A |f| \, d\mu \leqslant \int_X |f_n - f| \, d\mu + \int_A |f| \, d\mu < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Άρα, οι f_n είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμες.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι οι f_n είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμες και $f_n \to f$ κατά μέτρο. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $\mu(A) < \delta$ τότε $\int_A |f_n| \, d\mu < \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και αφού υπάρχει $f_{k_n} \to f$ σχεδόν παντού, από το λήμμα του Fatou έχουμε επίσης $\int_A |f| \, d\mu < \varepsilon$. Αφού $f_n \to f$ κατά μέτρο, μπορούμε να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $n \geqslant n_0$ τότε $\mu(\{|f_n - f| \geqslant \varepsilon\}) < \delta$. Τότε, για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_X |f_n - f| \, d\mu &= \int_{\{|f - f_n| \geqslant \varepsilon\}} |f - f_n| \, d\mu + \int_{\{|f - f_n| < \varepsilon\}} |f - f_n| \, d\mu \\
&\leqslant \int_{\{|f - f_n| \geqslant \varepsilon\}} |f - f_n| \, d\mu + \varepsilon \cdot \mu(X) \\
&\leqslant \int_{\{|f - f_n| \geqslant \varepsilon\}} |f| \, d\mu + \int_{\{|f - f_n| \geqslant \varepsilon\}} |f_n| \, d\mu + \varepsilon \cdot \mu(X) \\
&< 2\varepsilon + \varepsilon \cdot \mu(X) \\
&= (2 + \mu(X))\varepsilon.
\end{aligned}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, $\int_X |f - f_n| \, d\mu \to 0$.

7.13. Υποθέτουμε ότι $\mu(X) < \infty$ και ότι οι f_n, f είναι ολοκληρώσιμες. Εξετάστε αν ισχύει το εξής: $f_n \to f$ κατά μέσο αν και μόνο αν $\int_A f_n d\mu \to \int_A f d\mu$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$.

Υπόδειξη. ($\Longrightarrow$) Ισχύει. Για κάθε $A \in \mathcal{A}$ έχουμε

$$\left|\int_A f_n\, d\mu - \int_A f\, d\mu\right| = \left|\int_A (f_n - f)\, d\mu\right| \leqslant \int_A |f_n - f|\, d\mu \leqslant \int_X |f_n - f|\, d\mu.$$

Αν $f_n \to f$ κατά μέσο, τότε $\int_X |f_n - f|\, d\mu \to 0$, απ¨ όπου έπεται ότι $\int_A f_n\, d\mu \to \int_A f\, d\mu$.

($\Longleftarrow$) Δεν ισχύει. Πάρτε $X = [0, 2\pi]$ με το μέτρο Lebesgue και $f_n(x) = \sin(nx)$. Ελέγξτε ότι

$$\int_A f_n\, d\mu \to 0$$

για κάθε Lebesgue μετρήσιμο $A \subset [0, 2\pi]$: ξεκινήστε από την περίπτωση που το A είναι υποδιάστημα του $[0, 2\pi]$ και προσεγγίστε το τυχόν μετρήσιμο $A \subseteq [0, 2\pi]$ με πεπερασμένες ενώσεις ξένων διαστημάτων.

Παρατηρήστε τώρα ότι

$$\int_{[0,2\pi]} |f_n|\, d\lambda = \int_{[0,2\pi]} |\sin(nx)|\, d\lambda = 4$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

7.14. Έστω μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{C}$, συνεχής ως προς κάθε μεταβλητή ξεχωριστά. Αποδείξτε ότι η f είναι Lebesgue μετρήσιμη.

Υπόδειξη. Αποδεικνύουμε το ζητούμενο για $k = 2$ (η γενική περίπτωση είναι παρόμοια). Ορίζουμε $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ως εξής. Αν $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ τότε υπάρχει μοναδικός $m = m_x \in \mathbb{Z}$ ώστε $x \in \left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right)$. Θέτουμε

$$f_n(x, y) = f\left(\frac{m_x}{n}, y\right).$$

Δείχνουμε ότι η f_n είναι μετρήσιμη: παρατηρήστε ότι, για κάθε Borel σύνολο $B \subseteq \mathbb{C}$,

$$E(B) := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f_n(x, y) \in B\right\} = \bigcup_{m=-\infty}^{\infty} \left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right) \times \{y \in \mathbb{R} : f(m/n, y) \in B\}.$$

Για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, αφού η $f_{m/n}$ είναι συνεχής συνάρτηση, το σύνολο $\{y \in \mathbb{R} : f(m/n, y) \in B\}$ είναι Borel, άρα το σύνολο

$$\left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right) \times \{y \in \mathbb{R} : f(m/n, y) > \alpha\}$$

είναι μετρήσιμο. Έπεται ότι το $E(B)$ είναι μετρήσιμο για κάθε Borel σύνολο $B \subseteq \mathbb{C}$, και αυτό δείχνει ότι η f_n είναι μετρήσιμη.

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι $f_n(x, y) \to f(x, y)$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Πράγματι, αφού $\frac{m_x}{n} \to x$ καθώς το $n \to \infty$ (εξηγήστε γιατί) και αφού η f^y είναι συνεχής, έχουμε

$$f_n(x, y) = f(m_x/n, y) = f^y(m_x/n) \to f^y(x) = f(x, y).$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι η f είναι μετρήσιμη συνάρτηση ως κατά σημείο όριο μιας ακολουθίας μετρήσιμων συναρτήσεων.

Κεφάλαιο 8

Μετρήσιμες συναρτήσεις και ολοκλήρωμα

Ομάδα Α΄.

8.1. Έστω X, Y μετρικοί χώροι εφοδιασμένοι με τις $\sigma-$άλγεβρες των Borel υποσυνόλων τους. Αποδείξτε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f : X \to Y$ είναι μετρήσιμη.

Υπόδειξη. Σύμφωνα με τον ορισμό, πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε $B \in \mathcal{B}(Y)$ ισχύει ότι $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(X)$. Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{A} = \{B \subseteq Y : \ f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(X)\}.$$

Αν B είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του Y, τότε το $f^{-1}(B)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X, διότι η f είναι συνεχής, άρα $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(X)$. Δηλαδή, η $\mathcal{A}$ περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του Y. Εύκολα ελέγχουμε επίσης ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα, συνεπώς

$$\mathcal{B}(Y) \subseteq \mathcal{A}.$$

Από τον ορισμό της $\mathcal{A}$ έπεται ότι η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(B)$ κάθε συνόλου $B \in \mathcal{B}(Y)$ είναι σύνολο Borel στον X. Άρα, η f είναι μετρήσιμη.

8.2. Έστω οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = e^x$ και $g(y) = y^3 + y$. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{(0,1)} g \, df_*(\lambda).$$

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι $f^{-1}((0,1)) = (-\infty, 0)$. Από το Θεώρημα 8.1.6 έχουμε

$$\int_{(0,1)} g \, df_*(\lambda) = \int_{f^{-1}((0,1))} g \circ f \, d\lambda = \int_{(-\infty,0)} g \circ f \, d\lambda.$$

Όμως,

$$(g \circ f)(x) = g(e^x) = e^{3x} + e^x.$$

Άρα,

$$\int_{(0,1)} g \, df_*(\lambda) = \int_{-\infty}^{0} (e^{3x} + e^x) \, dx = \frac{1}{3} e^{3x} + e^X \Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}.$$

8.3. Έστω X ένας μετρικός χώρος. Μια συνάρτηση $f : X \to [-\infty, \infty]$ λέγεται *άνω* (αντίστ. *κάτω*) *ημισυνεχής* αν το σύνολο $\{x \in X : f(x) < a\}$ (αντίστ. $\{x \in X : f(x) > a\}$) είναι ανοικτό στο X για κάθε $a \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι μια τέτοια συνάρτηση f είναι συνεχής αν και μόνο αν είναι άνω και κάτω ημισυνεχής.

Υπόδειξη. Αν η f είναι συνεχής τότε για κάθε $a \in \mathbb{R}$ τα σύνολα

$$\{x \in X : f(x) < a\} = f^{-1}([-\infty, a)) \quad \text{και} \quad \{x \in X : f(x) > a\} = f^{-1}((a, \infty])$$

είναι ανοικτά ως αντίστροφες εικόνες ανοικτών υποσυνόλων του $[-\infty, \infty]$. Άρα, η f είναι άνω και κάτω ημισυνεχής.

Αντίστροφα, αν η f είναι άνω και κάτω ημισυνεχής τότε για κάθε $a < b$ στο $\mathbb{R}$ έχουμε ότι το σύνολο

$$f^{-1}((a, b)) = \{x \in X : f(x) > a\} \cap \{x \in X : f(x) < b\}$$

είναι ανοικτό υποσύνολο του X ως τομή δύο ανοικτών συνόλων. Για κάθε ανοικτό υποσύνολο G του $[-\infty, \infty]$ γνωρίζουμε ότι το G γράφεται ως αριθμήσιμη ξένη ένωση διαστημάτων της μορφής (a, b), $[-\infty, a)$ και $(a, \infty]$. Από τα παραπάνω έπεται ότι το $f^{-1}(G)$ είναι αριθμήσιμη ένωση ανοικτών υποσυνόλων του X, άρα είναι ανοικτό υποσύνολο του X. Συνεπώς, η f είναι συνεχής.

Ομάδα Β΄.

8.4. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος, Y μετρικός χώρος και $f_n : X \to Y$, $n = 1, 2, \ldots$ μια ακολουθία $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(Y))$–μετρήσιμων συναρτήσεων. Αν η $\{f_n\}$ συγκλίνει κατά σημείο σε μια συνάρτηση $f : X \to Y$, να δείξετε ότι και η f είναι $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(Y))$–μετρήσιμη.

Υπόδειξη. Έστω B μη κενό κλειστό υποσύνολο του (Y, d). Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : (Y, d) \to \mathbb{R}$ με $g(y) = \mathrm{dist}(y, B) = \inf\{d(y, x) : x \in B\}$. Από την Πραγματική Ανάλυση είναι γνωστό ότι η g είναι συνεχής και $g^{-1}(\{0\}) = B$. Οι συναρτήσεις $g \circ f_n : X \to \mathbb{R}$ είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμες και $g \circ f_n \longrightarrow g \circ f$ κατά σημείο, άρα η $g \circ f$ είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη. Έπεται ότι

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(\{0\}) = (g \circ f)^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{A}.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι η οικογένεια C όλων των $B \subseteq Y$ για τα οποία $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα. Είδαμε ότι η C περιέχει τα κλειστά υποσύνολα του Y, άρα $\mathcal{B}(Y) \subseteq C$.

Αφού για κάθε Borel σύνολο $B \subseteq Y$ ισχύει ότι $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, συμπεραίνουμε ότι η f είναι $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(Y))$ μετρήσιμη.

8.5. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας μετρικός χώρος πεπερασμένου μέτρου και $f : X \to \mathbb{R}$ μια Borel μετρήσιμη συνάρτηση. Να δείξετε ότι υπάρχει ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $g_n : X \to \mathbb{R}$ ώστε $g_n \to f$ κατά σημείο μ–σχεδόν παντού στο X.

Υπόδειξη. Από το θεώρημα του Luzin, σε συνδυασμό με το θεώρημα επέκτασης του Tietze, για κάθε $n \geqslant 1$ μπορούμε να βρούμε συνεχή συνάρτηση $g_n : X \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\mu(Z_n) < \frac{1}{2^n}$, όπου $Z_n = \{x \in X : f(x) \neq g_n(x)\}$. Θέτουμε $Z = \limsup Z_n$. Αφού $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(Z_n) < \infty$, από το πρώτο λήμμα Borel-Cantelli βλέπουμε ότι $\mu(Z)$. Παρατηρήστε ότι, αν $x \in X \setminus Z_n$ τότε υπάρχει $n_x \in \mathbb{N}$ ώστε $x \notin Z_n$ για κάθε $n \geqslant n_x$. Δηλαδή, για κάθε $n \geqslant n_x$ ισχύει ότι $g_n(x) = f(x)$. Ειδικότερα, για κάθε $x \in X \setminus Z$ έχουμε $g_n(x) \to f(x)$, άρα $g_n \to f$ κατά σημείο μ–σχεδόν παντού στο X.

8.6. Έστω X ένας μετρικός χώρος και ένα υποσύνολο $A \subseteq X$. Πότε η χαρακτηριστική συνάρτηση χ_A είναι άνω ημισυνεχής και πότε κάτω ημισυνεχής;

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$[\chi_A > a] = \begin{cases} \varnothing, & \text{αν } a \geqslant 1 \\ A, & \text{αν } 0 \leqslant a < 1 \\ X, & \text{αν } a < 0. \end{cases}$$

Άρα, η χ_A είναι κάτω ημισυνεχής αν και μόνο αν το A είναι ανοικτό. Ομοίως, παρατηρούμε ότι Αυτό προκύπτει άμεσα από την παρατήρηση ότι

$$[\chi_A < a] = \begin{cases} \varnothing, & \text{αν } a \leqslant 0 \\ A^c, & \text{αν } 0 < a \leqslant 1 \\ X, & \text{αν } a > 1. \end{cases}$$

Άρα, η χ_A είναι άνω ημισυνεχής αν και μόνο αν το A^c είναι ανοικτό, δηλαδή αν και μόνο αν το A είναι κλειστό.

Γενικά, από τους ορισμούς είναι φανερό ότι η $f : X \to \mathbb{R}$ είναι κάτω ημισυνεχής αν και μόνο αν η $-f$ είναι άνω ημισυνεχής. Συνεπώς, αφού $\chi_A = 1 - \chi_{A^c}$, θα μπορούσαμε να πούμε ότι η χ_A είναι άνω ημισυνεχής αν και μόνο αν η χ_{A^c} είναι κάτω ημισυνεχής (δηλαδή αν και μόνο αν το A^c είναι ανοικτό).

8.7. Έστω X ένας μετρικός χώρος και $f,g : X \to [-\infty, \infty]$ δύο άνω (αντίστ. κάτω) ημισυνεχείς συναρτήσεις. Να δείξετε ότι για κάθε $a, b > 0$, η συνάρτηση $af + bg$ είναι και αυτή άνω (αντίστ. κάτω) ημισυνεχής.

Υπόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι αν οι $g, g : X \to [-\infty, \infty]$ είναι άνω ημισυνεχείς και $b > 0$ τότε οι $f + g$ και bf είναι άνω ημισυνεχείς (το αντίστοιχο αποτέλεσμα όταν οι f, g είναι κάτω ημισυνεχείς προκύπτει αν θεωρήσουμε τις άνω ημισυνεχείς $-f, -g$). Για τυχόν $\gamma \in \mathbb{R}$ γράφουμε

$$\{x \in X : (f + g)(x) > \gamma\} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} (\{x \in X : f(x) > \gamma - t\} \cap \{x \in X : g(x) > t\}).$$

Αφού οι f, g είναι άνω ημισυνεχείς, τα σύνολα $\{f > \gamma - t\}$ και $\{g > t\}$ είναι ανοικτά, και από την παραπάνω ισότητα έπεται ότι το σύνολο $\{f + g > \gamma\}$ είναι ανοικτό. Άρα, η $f + g$ είναι άνω ημισυνεχής.

Επίσης, για τυχόν $\gamma \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\{x \in X : (bf)(x) > \gamma\} = \{x \in X : f(x) > \gamma/b\},$$

το οποίο είναι ανοικτό σύνολο αφού η f είναι άνω ημισυνεχής. Άρα, η bf είναι άνω ημισυνεχής.

Ομάδα Γ΄.

8.8. (Θεώρημα Vitali-Καραθεοδωρή) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^k$ ένα μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(A) < \infty$, μια συνάρτηση $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(A)$ και ένα $\varepsilon > 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν άνω ημισυνεχής και άνω φραγμένη συνάρτηση ϕ και κάτω ημισυνεχής και κάτω φραγμένη συνάρτηση ψ στο A ώστε $\phi \leqslant f \leqslant \psi$ και επιπλέον

$$\int_X (\psi - \phi) d\mu < \varepsilon,$$

ακολουθώντας τα εξής βήματα:

(i) Υποθέστε πρώτα ότι $f \geqslant 0$ και αποδείξτε ότι η f μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$(*) \qquad f = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \chi_{B_k}$$

για κάποια μετρήσιμα σύνολα B_k και $b_k \geqslant 0$.

(i) Χρησιμοποιώντας την $(*)$ και την κανονικότητα του μέτρου Lebesgue καταλήξτε στο ζητούμενο στην περίπτωση που $f \geqslant 0$..

(i) Ολοκληρώστε την απόδειξη γράφοντας $f = f^+ - f^-$ και χρησιμοποιώντας την Άσκηση 8.7.

Υπόδειξη. (i) Υποθέτουμε πρώτα ότι $f \geqslant 0$. Υπάρχει αύξουσα ακολουθία (s_n) μη αρνητικών απλών μετρήσιμων συναρτήσεων ώστε $s_n \to f$. Ορίζουμε $s_0 = 0$ και $u_k = s_k - s_{k-1}$ για κάθε $k \geqslant 1$. Αφού η (s_n) είναι αύξουσα, οι u_k είναι μη αρνητικές απλές μετρήσιμες συναρτήσεις, δηλαδή

$$u_k = \sum_{j=1}^{m_k} c_{k,j} \chi_{A_{k,j}}$$

όπου $c_{k,j} \geqslant 0$ και $A_{k,j} \in \mathcal{B}(X)$. Επίσης, $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, άρα

$$f = \lim_n s_n = \lim_n \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m_k} c_{k,j} \chi_{A_{k,j}},$$

δηλαδή

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \chi_{B_k}$$

για κάποια (όχι αναγκαστικά ξένα) σύνολα $B_k \in \mathcal{B}(X)$ και κάποιους $b_k \geqslant 0$.

(ii) Από το θεώρημα Beppo Levi έχουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \mu(B_k) = \int_X f \, d\mu < \infty.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} b_k \mu(B_k) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Για κάθε $k \geqslant 1$ μπορούμε να βρούμε ανοικτό G_k και κλειστό F_k ώστε $F_k \subseteq B_k \subseteq G_k$ και $b_k \mu(G_k \setminus F_k) < \varepsilon / 2^{k+1}$. Ορίζουμε

$$\phi = \sum_{k=1}^{k_0} b_k \chi_{F_k} \quad \text{και} \quad \psi = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \chi_{G_k}.$$

Τότε, $\phi \leqslant f \leqslant \psi$, η ϕ είναι άνω φραγμένη και η ψ είναι κάτω φραγμένη. Από τις Ασκήσεις 8.6 και 8.7 βλέπουμε ότι η ϕ είναι άνω ημισυνεχής και για κάθε $n \geqslant 1$ η $\psi_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \chi_{G_k}$ είναι κάτω ημισυνεχής.

Έπεται ότι η $\psi = \sup_n \psi_n$ είναι επίσης κάτω ημισυνεχής (εξηγήστε γιατί). Τέλος,

$$\begin{aligned}\int_X (\psi - \phi)\, d\mu &= \sum_{k=1}^{k_0} b_k \int_X (\chi_{G_k} - \chi_{F_k})\, d\mu + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} b_k \int_X \chi_{G_k}\, d\mu \\ &= \sum_{k=1}^{k_0} b_k \mu(G_k \setminus F_k) + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} b_k \mu(G_k) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \mu(G_k \setminus F_k) + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} b_k \mu(F_k) \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} b_k \mu(G_k \setminus F_k) + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} b_k \mu(B_k) < \sum_{k=1}^{k_0} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

(iii) Γράφουμε $f = f^+ - f^-$, όπου f^+, f^- μη αρνητικές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Από τα προηγούμενα, μπορούμε να βρούμε άνω ημισυνεχείς και άνω φραγμένες ϕ_1, ϕ_2 και κάτω ημισυνεχείς και κάτω φραγμένες ψ_1, ψ_2 ώστε $\phi_1 \leqslant f^+ \leqslant \psi_1$, $\phi_2 \leqslant f^- \leqslant \psi_2$ και

$$\int_X (\psi_1 - \phi_1)\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{και} \quad \int_X (\psi_2 - \phi_2)\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Παρατηρήστε ότι $-\psi_2 \leqslant -f^- \leqslant -\phi_2$, η $-\psi_2$ είναι άνω ημισυνεχής και άνω φραγμένη, και η $-\phi_2$ είναι κάτω ημισυνεχής και κάτω φραγμένη. Αν ορίσουμε $\phi = \phi_1 - \psi_2$, $\psi = \psi_1 - \phi_2$, τότε η ϕ είναι άνω ημισυνεχής και άνω φραγμένη, η ψ είναι κάτω ημισυνεχής και κάτω φραγμένη, και $\phi \leqslant f \leqslant \psi$. Τέλος,

$$\begin{aligned}\int_X (\psi - \phi)\, d\mu &= \int_X ((\psi_1 - \phi_2) - (\phi_1 - \psi_2))\, d\mu \\ &= \int_X (\psi_1 - \phi_1)\, d\mu + \int_X (\psi_2 - \phi_2)\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

8.9. Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος και $f : X \to [0, \infty]$ μια κάτω ημισυνεχής συνάρτηση, όχι ταυτοτικά ίση με ∞. Για $n = 1, 2, \ldots$ και $x \in X$ ορίζουμε

$$g_n(x) = \inf\{f(p) + nd(x, p) : \ p \in X\}.$$

Αποδείξτε ότι:

(i) Ισχύει η ανισότητα $|g_n(x) - g_n(y)| \leqslant nd(x, y)$ για κάθε $x, y \in X$.

(ii) Ισχύει $0 \leqslant g_1 \leqslant g_2 \leqslant \cdots \leqslant f$.

(iii) Η $\{g_n\}$ συγκλίνει κατά σημείο στην f για $n \to \infty$.

Συνάγετε ότι μια μη αρνητική συνάρτηση είναι κάτω ημισυνεχής αν και μόνο αν είναι κατά σημείο όριο μιας αύξουσας ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων.

Υπόδειξη. (i) Παρατηρούμε αρχικά ότι $g_n(x) < \infty$ για κάθε $x \in X$, διότι η f δεν είναι ταυτοτικά ίση με $+\infty$, δηλαδή υπάρχει $q \in X$ με $f(q) < +\infty$ και τότε

$$g_n(x) \leqslant f(q) + nd(q, x) < +\infty.$$

Έστω $x, y \in X$. Για κάθε $p \in X$ έχουμε

$$g_n(x) \leqslant f(p) + nd(x, p) \leqslant f(p) + nd(y, p) + nd(x, y)$$

από τον ορισμό του $g_n(x)$ και την τριγωνική ανισότητα. Έπεται ότι

$$g_n(x) \leqslant \inf\{f(p) + nd(y,p)\} + nd(x,y) = g_n(y) + nd(x,y),$$

και λόγω συμμετρίας έπεται το ζητούμενο.

(ii) Για κάθε $x \in X$ και $p \in X$ έχουμε $f(p)+nd(x,p) \leqslant f(p)+(n+1)d(x,p)$. Παίρνοντας infimum ως προς p και στα δύο μέλη, βλέπουμε ότι $g_n(x) \leqslant g_{n+1}(x)$. Άρα, η (g_n) είναι αύξουσα. Επίσης,

$$g_n(x) = \inf\{f(p) + nd(x,p) : \ p \in X\} \leqslant f(x) + nd(x,x) = f(x),$$

το οποίο δείχνει ότι $g_n \leqslant f$ για κάθε $n \geqslant 1$.

(iii) Έστω $x \in X$. Η ακολουθία $(g_n(x))$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από το $f(x)$, άρα συγκλίνει και $\lim_n g_n(x) = q_x \leqslant f(x)$. Υποθέτουμε ότι $q_x < f(x)$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Επιλέγουμε a_x τέτοιον ώστε $q_x < a_x < f(x)$ και αφού το $\{p \in X : f(p) > a_x\}$ είναι ανοικτό (διότι η f είναι κάτω ημισυνεχής) βρίσκουμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $d(p,x) < \delta$ να ισχύει $f(p) > a_x$. Αν το n_0 είναι αρκετά μεγάλο ώστε $n_0\delta > a_x$, παρατηρούμε ότι:

- αν $d(p,x) < \delta$ τότε $f(p) + n_0 d(p,x) \geqslant f(p) > a_x$, και
- αν $d(p,x) \geqslant \delta$ τότε $f(p) + n_0 d(p,x) \geqslant f(pp) + n_0\delta > a_x$, διότι η f είναι μη αρνητική.

Έπεται ότι

$$g_{n_0}(x) = \inf\{f(p) + nd(p,x) : p \in X\} \geqslant a_x > q_x = \lim_n g_n(x),$$

το οποίο είναι άτοπο αφού η $(g_n(x))$ είναι αύξουσα. Συνεπώς,

$$\lim_n g_n(x) = q_x = f(x).$$

Κεφάλαιο 9

Μέτρα γινόμενα

Ομάδα Α΄.

9.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{B}, \nu_i)$, $i = 1, 2$ χώροι $\sigma-$πεπερασμένου μέτρου. Να δείξετε ότι

$$\mu \times (\nu_1 + \nu_2) = (\mu \times \nu_1) + (\mu \times \nu_2).$$

Υπόδειξη. Το αριστερό και το δεξιό μέλος είναι μέτρα στον $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$. Για να δείξουμε ότι είναι ίσα αρκεί να ελέγξουμε ότι για κάθε $A \in \mathcal{A}$ και $B \in \mathcal{B}$ ισχύει

$$(\mu \times (\nu_1 + \nu_2))(A \times B) = ((\mu \times \nu_1) + (\mu \times \nu_2))(A \times B).$$

Όμως, από τον ορισμό του μέτρου γινομένου και του αθροίσματος μέτρων έχουμε

$$\begin{aligned}(\mu \times (\nu_1 + \nu_2))(A \times B) &= \mu(A)(\nu_1 + \nu_2)(B)\\ &= \mu(A)(\nu_1(A) + \nu_2(B))\\ &= \mu(A)\nu_1(B) + \mu(A)\nu_2(B)\\ &= (\mu \times \nu_1)(A \times B) + (\mu \times \nu_2)(A \times B)\\ &= ((\mu \times \nu_1) + (\mu \times \nu_2))(A \times B).\end{aligned}$$

9.2. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Να δείξετε ότι τα σύνολα

(i) $\mathrm{Gr}_-(f) = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : \ y < f(x)\}$

(ii) $\mathrm{Gr}_+(f) = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : \ y > f(x)\}$ και

(iii) $\mathrm{Gr}(f) = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : \ y = f(x)\}$

ανήκουν στη $\sigma-$άλγεβρα $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\mathrm{Gr}_-(f) = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : \ y < f(x)\} &= \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : \ y < q < f(x)\}\\ &= \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \Big((X \times (-\infty, q)) \cap (\{x \in X : f(x) > q\} \times \mathbb{R})\Big).\end{aligned}$$

Αφού τα $X \times (-\infty, q)$ και $\{x \in X : f(x) > q\} \times \mathbb{R}$ ανήκουν στην $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ για κάθε $q \in \mathbb{Q}$, έπεται ότι $\mathrm{Gr}_-(f) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι $\mathrm{Gr}_+(f) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Έπεται ότι

$$\mathrm{Gr}(f) = (X \times \mathbb{R}) \setminus (\mathrm{Gr}_-(f) \cup \mathrm{Gr}_+(f)) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

9.3. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος σ−πεπερασμένου μέτρου και $f : X \to [0, \infty)$ μετρήσιμη συνάρτηση. Θέτουμε

$$R(f) = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : \ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\} \quad \text{και} \quad S(f) = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} :) \leqslant y < f(x)\}.$$

Να δείξετε ότι $R(f), S(f) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ και επιπλέον

$$\int_X f \, d\mu = (\mu \times \lambda)(R(f)) = (\mu \times \lambda)(S(f)) = \int_{[0,\infty)} \mu([f \geqslant y]) \, d\lambda(y).$$

Συνάγετε ότι αν για μια μετρήσιμη συνάρτηση $g : X \to [0, \infty)$ ισχύει $\mu([f \geqslant y]) \leqslant \mu([g \geqslant y])$ για κάθε $y \geqslant 0$, τότε $\int_X f d\mu \leqslant \int_X g d\mu$.

Υπόδειξη. Με το συμβολισμό της Άσκησης 9.2, και χρησιμοποιώντας όσα αποδείχθηκαν εκεί, έχουμε

$$S(f) = \mathrm{Gr}_-(f) \cap (X \times [0, \infty)) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

και

$$R(f) = S(f) \cup \mathrm{Gr}(f) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Για το δεύτερο ερώτημα, γράφουμε

$$(\mu \times \lambda)(R(f)) = \int_X \lambda(R(f)_x) \, d\mu(x) = \int_X \lambda([0, f(x)]) \, d\mu(x) = \int_X f(x) \, d\mu(x)$$

και

$$(\mu \times \lambda)(R(f)) = \int_{[0,\infty)} \mu(R(f)^y) \, d\lambda(y) = \int_{[0,\infty)} \mu([f \geqslant y]) \, d\lambda(y).$$

Τέλος, παρατηρούμε ότι $\lambda(S(f)_x) = \lambda([0, f(x))) = f(x) = \lambda(R(f)_x)$ για κάθε $x \in X$, άρα

$$(\mu \times \lambda)(S(f)) = \int_X \lambda(S(f)_x) \, d\mu(x) = \int_X \lambda(R(f)_x) \, d\mu(x) = (\mu \times \lambda)(R(f)).$$

Αν $g : X \to [0, \infty)$ είναι επίσης μετρήσιμη συνάρτηση και $\mu([f \geqslant y]) \leqslant \mu([g \geqslant y])$ για κάθε $y \geqslant 0$, τότε από τα παραπάνω έπεται ότι

$$\int_X f \, d\mu = \int_{[0,\infty)} \mu([f \geqslant y]) \, d\lambda(y) \leqslant \int_{[0,\infty)} \mu([g \geqslant y]) \, d\lambda(y) = \int_X g \, d\mu.$$

Ομάδα Β΄.

9.4. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει σύνολο Borel $A \subseteq [0, 1] \times [0, 1]$ ώστε A_x αριθμήσιμο για κάθε $x \in [0, 1]$ και $[0, 1] \setminus A^y$ αριθμήσιμο για κάθε $y \in [0, 1]$.

Υπόδειξη. Έστω ότι υπάρχει τέτοιο σύνολο A. Από το θεώρημα Fubini για δείκτριες συναρτήσεις θα έχουμε

$$\int_0^1 \lambda(A_x)\, d\lambda(x) = \int_0^1 \lambda(A^y)\, d\lambda(y) = \lambda_2(A).$$

Όμως, αφού το A_x είναι αριθμήσιμο για κάθε $x \in [0,1]$ έχουμε $\lambda(A_x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$, συνεπώς

$$\int_0^1 \lambda(A_x)\, d\lambda(x) = 0,$$

ενώ, αφού το $[0,1] \setminus A^y$ είναι αριθμήσιμο για κάθε $y \in [0,1]$ έχουμε $\lambda(A^y) = 1$ για κάθε $y \in [0,1]$, συνεπώς

$$\int_0^1 \lambda(A^y)\, d\lambda(y) = 1$$

και καταλήγουμε σε άτοπο.

9.5. Δώστε παράδειγμα συνόλου $C \subseteq \mathbb{R}^2$ ώστε $C \notin \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ και να ισχύουν τα εξής:

(α΄) $C_x \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ και $C^y \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και

(β΄) Οι συναρτήσεις $x \mapsto \lambda(C_x)$ και $y \mapsto \lambda(C^y)$ είναι Borel μετρήσιμες και ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda(C_x) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(C^y) d\lambda(y).$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο B του $[0,1]$ το οποίο δεν είναι Borel, και ορίζουμε

$$C = \{(x,x) : x \in B\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Το C δεν είναι Borel σύνολο: αν ήταν, τότε για τη συνεχή συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με $h(x) = (x,x)$ θα είχαμε $B = h^{-1}(C)$, άρα το B θα ήταν κι αυτό Borel σύνολο.

Παρατηρούμε ότι $C_x = \{x\}$ αν $x \in B$ και $C_x = \varnothing$ αν $x \notin B$, άρα $C_x \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ομοίως, παρατηρούμε ότι $C^y = \{y\}$ αν $y \in B$ και $C^y = \varnothing$ αν $y \notin B$, άρα $C^y \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

Αφού, προφανώς, $\lambda(C_x) = \lambda(C^y) = 0$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, οι συναρτήσεις $x \mapsto \lambda(C_x)$ και $y \mapsto \lambda(C^y)$ είναι Borel μετρήσιμες και ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda(C_x) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(C^y) d\lambda(y).$$

9.6. Δώστε παράδειγμα Borel μετρήσιμης συνάρτησης $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ώστε $f \notin \mathcal{L}^1(\lambda \times \lambda)$ και να ισχύει $f_x \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ και $f^y \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και επιπλέον

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x,y) d\lambda(x) d\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x,y) d\lambda(y) d\lambda(x).$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε τα σύνολα $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leqslant y \leqslant x+1\}$ και $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-1 \leqslant y \leqslant x\}$. Ορίζουμε $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x,y) = \chi_A(x,y) - \chi_B(x,y).$$

Τα A, B είναι κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$, άρα η f είναι Borel μετρήσιμη.

Υποθέτουμε ότι $f \in \mathcal{L}^1(\lambda \times \lambda)$. Τότε, η $f^+ = \chi_A \in \mathcal{L}^1(\lambda \times \lambda)$. Όμως,

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \chi_A d(\lambda \times \lambda) = (\lambda \times \lambda)(A) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(A_x)\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \lambda([x, x+1])\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}\, d\lambda(x) = +\infty.$$

Καταλήξαμε σε άτοπο, άρα $f \notin \mathcal{L}^1(\lambda \times \lambda)$.

Παρατηρούμε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$f_x = (\chi_A)_x - (\chi_B)_x = \chi_{A_x} - \chi_{C_x} = \chi_{[x,x+1]} - \chi_{[x-1,x]}.$$

Έπεται ότι $f_x \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ και

$$\int_{\mathbb{R}} f_x\, d\lambda = \lambda([x, x+1]) - \lambda([x-1, x]) = 1 - 1 = 0.$$

Ομοίως, για κάθε $y \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$f^y = (\chi_A)^y - (\chi_B)^y = \chi_{A^y} - \chi_{C^y} = \chi_{[y-1,y]} - \chi_{[y,y+1]}.$$

Άρα, $f^y \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ και

$$\int_{\mathbb{R}} f^y\, d\lambda = \lambda([y-1, y]) - \lambda([y, y+1]) = 1 - 1 = 0.$$

Έπεται ότι τα διαδοχικά ολοκληρώματα είναι ίσα, διότι

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x,y) d\lambda(x) d\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f^y d\lambda \right) d\lambda(y) \int_{\mathbb{R}} \mathbf{0}\, d\lambda = 0$$

και

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x,y) d\lambda(y) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f_x d\lambda \right) d\lambda(x) \int_{\mathbb{R}} \mathbf{0}\, d\lambda = 0.$$

9.7. Έστω $(a_{n,k})_{n,k=1}^{\infty}$ μια διπλή ακολουθία πραγματικών αριθμών για την οποία η σειρά $\sum_{n,k} |a_{n,k}|$ συγκλίνει. Να δείξετε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}.$$

Υπόδειξη. Θέτουμε $\mu = \nu =$ το μέτρο απαρίθμησης στο $\mathbb{N}$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ με $f(n,k) = a_{n,k}$. Η υπόθεση ότι η σειρά $\sum_{n,k} |a_{n,k}|$ συγκλίνει σημαίνει ότι

$$\int_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} |f|\, d(\mu \times \nu) < \infty.$$

Από το θεώρημα Fubini έπεται ότι

$$\int_{\mathbb{N}} \Big(\int_{\mathbb{N}} f(n,k)\, d\nu(k) \Big) d\mu(n) = \int_{\mathbb{N}} \Big(\int_{\mathbb{N}} f(n,k)\, d\mu(n) \Big) d\nu(k),$$

δηλαδή

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k} \Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} \Big).$$

Ομάδα Γ΄.

9.8. Έστω $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ μια Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Αν η συνάρτηση $g(x,y)=f(x)-f(y)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $(0,1)\times(0,1)$, να δείξετε ότι $f\in\mathcal{L}^1(0,1)$.

Υπόδειξη. Παρατηρούμε αρχικά ότι οι $g_1(x.y)=f(x)$ και $g_2(x,y)=f(y)$ είναι μετρήσιμες. Πράγματι, για κάθε $b\in\mathbb{R}$ έχουμε $g_1^{-1}((-\infty,b])=\{(x,y):f(x)\leqslant b\}=f^{-1}((-\infty,b])\times(0,1)$ και όμοια για την g_2. Άρα, η $g=g_1-g_2$ είναι μετρήσιμη.

Για κάθε $x,y\in(0,1)$ έχουμε $|f(x)|\leqslant|g(x,y)|+|f(y)|$, άρα για κάθε $x\in(0,1)$ ισχύει ότι

$$(*)\qquad \int_0^1|f(x)|\,d\lambda(x)\leqslant\int_0^1(|g(x,y)|+|f(y)|)\,d\lambda(x)=|f(y)|+\int_0^1|g(x,y)|\,d\lambda(x).$$

Όμως,

$$\int_0^1\left(\int_0^1|g(x,y)|\,d\lambda(x)\right)d\lambda(y)=\int_{(0,1)\times(0,1)}|g(x,y)|d\lambda_2(x,y)<+\infty$$

διότι η g είναι ολοκληρώσιμη. Συνεπώς, σχεδόν για κάθε y έχουμε $\int_0^1|g(x,y)|\,d\lambda(x)<+\infty$. Επιλέγοντας ένα τέτοιο y_0, από την $(*)$ έχουμε

$$\int_0^1|f(x)|\,d\lambda(x)\leqslant|f(y_0)|+\int_0^1|g(x,y_0)|\,d\lambda(x)<+\infty,$$

δηλαδή $f\in\mathcal{L}^1(0,1)$.

Ένας άλλος τρόπος είναι ο εξής. Αφού $|f(x)|<\infty$ για κάθε $x\in(0,1)$, υπάρχει $m\in\mathbb{N}$ τέτοιος ώστε το $A=\{x\in(0,1):|f(x)|\leqslant m]\subseteq(0,1)$ να έχει θετικό μέτρο. Θέτουμε $B=\{x\in(0,1):|(x)|>m\}$. Τότε, αν $(x,y)\in B\times A$, έχουμε

$$|f(x)-f(y)|\geqslant|f(x)|-|f(y)|\geqslant|f(x)|-m>0.$$

Από το θεώρημα Tonelli,

$$\begin{aligned}\int_{(0,1)\times(0,1)}|f(x)-f(y)|\,d\lambda(x,y)&\geqslant\int_{B\times A}|f(x)-f(y)|\,d\lambda(x,y)\geqslant\int_{B\times A}(|f(x)|-m)\,d\lambda(x,y)\\&=\int_B\int_A(|f(x)|-m)\,d\lambda(y)\,d\lambda(x)=\lambda(A)\int_B(|f(x)|-m)\,d\lambda(x).\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\int_B|f(x)|\,d\lambda(x)\leqslant\frac{\|g\|_1}{\lambda(A)}+m\lambda(B)<\infty.$$

Αφού $f\leqslant m$ στο A, συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_{(0,1)}|f(x)|\,d\lambda(x)&=\int_A|f(x)|\,d\lambda(x)+\int_B|f(x)|\,d\lambda(x)\leqslant m\lambda(A)+\frac{\|g\|_1}{\lambda(A)}+m\lambda(B)\\&=m(\lambda(A)+\lambda(B))+\frac{\|g\|_1}{\lambda(A)}=m+\frac{\|g\|_1}{\lambda(A)}<\infty.\end{aligned}$$

Άρα, η f είναι ολοκληρώσιμη.

9.9. Έστω $f,g:\mathbb{R}^n\to[0,\infty]$ μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις. Να δείξετε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n}f\cdot g\,d\lambda=\int_0^\infty\left(\int_{\{x\in\mathbb{R}^n:g(x)\geqslant y\}}f(x)\,d\lambda(x)\right)d\lambda(y).$$

Συνάγετε ότι
$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,d\lambda(x) = \int_0^\infty \lambda(\{x : g(x) \geqslant y\})\,d\lambda(y).$$

Υπόδειξη. Ξεκινώντας από το δεξιό μέλος και χρησιμοποιώντας το θεώρημα Tonelli, γράφουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left(\int_{\{x\in\mathbb{R}^n : g(x)\geqslant y\}} f(x)\,d\lambda_n(x)\right) d\lambda(y) &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\{x\in\mathbb{R}^n : g(x)\geqslant y\}}(x,y) f(x)\,d\lambda_n(x) d\lambda(y)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \chi_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times[0,\infty) : g(x)\geqslant y\}}(x,y) f(x)\,d\lambda(y) d\lambda_n(x)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \int_0^\infty \chi_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times[0,\infty) : g(x)\geqslant y\}}(x,y)\,d\lambda(y) d\lambda_n(x)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \int_0^\infty \chi_{[0,g(x)]}(y)\,d\lambda(y) d\lambda_n(x)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(x)\,d\lambda_n(x).
\end{aligned}$$

Παίρνοντας $f \equiv 1$ σε αυτή τη σχέση, βλέπουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,d\lambda(x) = \int_0^\infty \lambda(\{x : g(x) \geqslant y\})\,d\lambda(y).$$

9.10. Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μια Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: υπάρχει $C_1 > 0$ ώστε, για κάθε $t > 0$
$$\lambda(\{x : |f(x)| \geqslant t\}) \leqslant \frac{C_1}{t^2}.$$
Δείξτε ότι υπάρχει $C_2 > 0$ ώστε, για κάθε μετρήσιμο σύνολο E με $0 < \lambda(E) < \infty$ να ισχύει

$$\int_E |f(x)|\,dx \leqslant C_2 \sqrt{\lambda(E)}.$$

Υπόδειξη. Για κάθε $\alpha > 0$ μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}
\int_E |f(x)|\,dx &= \int_0^\infty \lambda(\{x \in E : |f(x)| \geqslant t\})\,dt\\
&= \int_0^\alpha \lambda(\{x \in E : |f(x)| \geqslant t\})\,dt + \int_\alpha^\infty \lambda(\{x \in E : |f(x)| \geqslant t\})\,dt\\
&\leqslant \int_0^\alpha \lambda(E)\,dt + \int_\alpha^\infty \frac{C_1}{t^2}\,dt = \alpha\lambda(E) + \frac{C_1}{\alpha}.
\end{aligned}$$

Επιλέγοντας $\alpha = \frac{1}{\sqrt{\lambda(E)}}$ παίρνουμε

$$\int_E |f(x)|\,dx \leqslant (C_1 + 1)\sqrt{\lambda(E)}.$$

9.11. Έστω μια μετρήσιμη συνάρτηση $f \in \mathcal{L}^1(0,1)$. Για $x \in (0,1)$ θέτουμε

$$g(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{t}\,dt.$$

Δείξτε ότι $g \in \mathcal{L}^1(0,1)$ και

$$\int_0^1 g(x)\,d\lambda(x) = \int_0^1 f(x)\,d\lambda(x).$$

Υπόδειξη. Για να δείξουμε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη γράφουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |g(x)|\,d\lambda(x) &= \int_0^1 \left|\int_x^1 \frac{f(t)}{t}\,d\lambda(t)\right| d\lambda(x)\\
&\leqslant \int_0^1 \int_x^1 \frac{|f(t)|}{t}\,d\lambda(t)\,d\lambda(x)\\
&= \int_0^1 \int_0^1 \frac{|f(t)|}{t}\chi_{(x,1)}(t)\,d\lambda(t)\,d\lambda(x)\\
&= \int_0^1 \frac{|f(t)|}{t}\lambda(\{x : 0 < x < t\})\,d\lambda(t)\\
&= \int_0^1 |f(t)|\,d\lambda(t) = \|f\|_1 < \infty,
\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας το θεώρημα Tonelli. Άρα, $g \in L^1((0,1))$. Τώρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Fubini και, ακολουθώντας την ίδια πορεία, έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^1 g(x)\,d\lambda(x) &= \int_0^1 \left(\int_x^1 \frac{f(t)}{t}\,d\lambda(t)\right) d\lambda(x)\\
&= \int_0^1 \int_0^1 \frac{f(t)}{t}\chi_{(x,1)}(t)\,d\lambda(t)\,d\lambda(x)\\
&= \int_0^1 \frac{f(t)}{t}\left(\int_0^1 \chi_{(x,1)}(t)\,d\lambda(x)\right) d\lambda(t)\\
&= \int_0^1 \frac{f(t)}{t}\lambda(\{x : 0 < x < t\})\,d\lambda(t)\\
&= \int_0^1 f(t)\,d\lambda(t) = \int_0^1 f(x)\,d\lambda(x).
\end{aligned}$$

9.12. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ τυχόντες χώροι μέτρου. Αποδείξτε ότι στο χώρο γινόμενο $(X\times Y, \mathcal{A}\otimes\mathcal{B})$ ορίζεται ένα μέτρο γινόμενο ρ ακολουθώντας τα εξής βήματα:

(i) Αποδείξτε ότι αν ένα μετρήσιμο ορθογώνιο $A \times B$ γράφεται στη μορφή

$$A \times B = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \times B_n),$$

όπου $\{A_n \times B_n\}$ ακολουθία ξένων ανά δύο μετρήσιμων ορθογωνίων, τότε

$$\mu(A)\nu(B) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)\nu(A_n).$$

(ii) Αν $\{A_n \times B_n\}$ και $\{E_n \times F_n\}$ δύο ακολουθίες ξένων ανά δύο μετρήσιμων ορθογωνίων ώστε

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \times B_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n \times F_n),$$

τότε είναι

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)\nu(B_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)\nu(F_n).$$

(iii) Θεωρήστε $\mathcal{R}$ την οικογένεια όλων των πεπερασμένων ξένων ενώσεων μετρήσιμων ορθογωνίων. Για ένα $C=\bigcup_{k=1}^{n}(A_k\times B_k)\in\mathcal{R}$ θέτουμε

$$\rho_0(C)=\sum_{k=1}^{n}\mu(A_k)\nu(B_k).$$

Αποδείξτε ότι η $\mathcal{R}$ είναι άλγεβρα και το ρ_0 ένα προμέτρο στην $\mathcal{R}$.

(iv) Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Επέκτασης του Καραθεοδωρή συνάγετε το ζητούμενο.

Υπόδειξη. (i) Παρατηρούμε ότι αν $E\in\mathcal{A}$ και $F\in\mathcal{B}$ τότε

$$\int_Y\int_X\chi_E(x)\chi_F(y)\,d\mu(x)\,d\nu(y)=\int_Y\mu(E)\chi_F(y)\,d\nu(y)=\mu(E)\nu(F).$$

Από την $A\times B=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\times B_n)$ και το γεγονός ότι τα $A_n\times B_n$ είναι ξένα, έχουμε

$$\chi_A(x)\chi_B(y)=\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{A_n}(x)\chi_{B_n}(y),$$

και εφαρμόζοντας το θεώρημα Beppo Levi έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)\nu(B_n)&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_Y\int_X\chi_{A_n}(x)\chi_{B_n}(y)\,d\mu(x)\,d\nu(y)=\int_Y\int_X\chi_{A_n}(x)\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{B_n}(y)\,d\mu(x)\,d\nu(y)\\&=\int_Y\int_X\chi_A(x)\chi_B(y)\,d\mu(x)\,d\nu(y)=\mu(A)\nu(B).\end{aligned}$$

(ii) Έστω $\{A_n\times B_n\}$ και $\{E_n\times F_n\}$ δύο ακολουθίες ξένων ανά δύο μετρήσιμων ορθογωνίων τέτοιες ώστε

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\times B_n)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n\times F_n).$$

Για κάθε $n\geqslant 1$ έχουμε

$$A_n\times B_n=(A_n\times B_n)\cap\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}(E_m\times F_m)\right)=\bigcup_{m=1}^{\infty}((A_n\cap E_m)\times(B_n\cap F_m))$$

και τα ορθογώνια $(A_n\cap E_m)\times(B_n\cap F_m)$ είναι ξένα ανά δύο, οπότε το (i) μας δίνει

$$\mu(A_n)\nu(B_n)=\sum_{m=1}^{\infty}\mu(A_n\cap E_m)\nu(B_n\cap F_m).$$

Έπεται ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)\nu(B_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\mu(A_n\cap E_m)\nu(B_n\cap F_m).$$

Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι

$$\sum_{m=1}^{\infty}\mu(E_m)\nu(F_m)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n\cap E_m)\nu(B_n\cap F_m).$$

Άρα,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)\nu(B_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)\nu(F_n).$$

(iii) Δείχνουμε πρώτα ότι η $\mathcal{R}$ είναι άλγεβρα. Έστω $C=\bigcup_{i=1}^{n}(A_i\times B_i)$ και $D=\bigcup_{j=1}^{m}(E_j\times F_j)$ δύο σύνολα στην $\mathcal{R}$, όπου τα $A_i\times B_i$ είναι ξένα και τα $E_j\times F_j$ είναι ξένα μετρήσιμα ορθογώνια. Γράφουμε

$$C\cap D=\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{m}((A_i\cap E_j)\times(B_i\cap F_j)),$$

και παρατηρούμε ότι τα $(A_i\cap E_j)\times(B_i\times F_j)$ είναι ξένα μετρήσιμα ορθογώνια, συνεπώς $C\cap D\in\mathcal{R}$. Παρατηρούμε επίσης ότι αν $A\times B$ είναι μετρήσιμο ορθογώνιο τότε

$$(X\times Y)\setminus(A\times B)=((X\setminus A)\times B)\cup(A\times(Y\setminus B))\cup((X\setminus A)\times(Y\setminus B))\in\mathcal{R},$$

άρα

$$(X\times Y)\setminus C=\bigcap_{i=1}^{n}((X\times Y)\setminus(A_i\times B_i))\in\mathcal{R}$$

ως πεπερασμένη τομή συνόλων από την $\mathcal{R}$. Έπεται ότι η $\mathcal{R}$ είναι άλγεβρα.

Αν $C\in\mathcal{R}$ και $C=\bigcup_{i=1}^{n}(A_i\times B_i)=\bigcup_{j=1}^{m}(E_j\times F_j)$, όπου τα $A_i\times B_i$ είναι ξένα μετρήσιμα ορθογώνια και τα $E_j\times F_j$ είναι ξένα μετρήσιμα ορθογώνια, τότε από το (ii) έχουμε ότι $\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i)\nu(B_i)=\sum_{j=1}^{m}\mu(E_j)\nu(F_j)$, άρα η ρ_0 είναι καλά ορισμένη.

Θα δείξουμε ότι η ρ_0 είναι αριθμήσιμα προσθετική, δηλαδή ότι αν (C_n) είναι μια ακολουθία ξένων συνόλων στην $\mathcal{R}$ και $\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n\in\mathcal{R}$ τότε

$$\rho_0\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\rho_0(C_n).$$

Γράφουμε

$$C_n=\bigcup_{i=1}^{k_n}(A_{n,i}\times B_{n,i}),$$

όπου τα $A_{n,i}\times B_{n,i}$, $i=1,\dots,k_n$ είναι ξένα μετρήσιμα ορθογώνια, και

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n=\bigcup_{j=1}^{m}(E_j\times F_j)$$

όπου τα $E_j\times F_j$ είναι ξένα μετρήσιμα ορθογώνια. Τότε,

$$\bigcup_{j=1}^{m}(E_j\times F_j)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{k_n}(A_{n,i}\times B_{n,i})$$

και τα ορθογώνια στο δεξιό μέλος είναι ξένα ανά δύο, συνεπώς από το (ii) έχουμε

$$\sum_{j=1}^{m} \mu(E_j)\nu(F_j) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \mu(A_{n,i})\nu(B_{n,j}),$$

δηλαδή

$$\rho_0\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_0(C_n).$$

Έχουμε επίσης $\rho_0(\varnothing) = 0$, άρα η ρ_0 είναι προμέτρο.

(iv) Από το θεώρημα επέκτασης του Καραθεοδωρή, υπάρχει μέτρο $\rho : \sigma(\mathcal{R}) \to [0, \infty]$ που επεκτείνει το προμέτρο ρ_0. Αφού $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ και η $\mathcal{R}$ περιέχει τα μετρήσιμα ορθογώνια, Έπεται ότι $\sigma(\mathcal{R}) = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, συνεπώς η ρ είναι μέτρο στην $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ που από την κατασκευή ικανοποιεί την

$$\rho(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$$

για κάθε μετρήσιμο ορθογώνιο.

9.13. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu) = (Y, \mathcal{B}, \nu) = (\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}), \mu)$, όπου

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{αν } A \text{ αριθμήσιμο} \\ \infty, & \text{αν } A \text{ υπεραριθμήσιμο} \end{cases}.$$

Έστω $\pi : X \times Y \to X$ με $\pi(x, y) = x - y$ η προβολή του X παράλληλα στη διαγώνιο $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ του $X \times Y = \mathbb{R}^2$. Ορίζουμε $\rho, \tau : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to [0, \infty]$ από τις σχέσεις

$$\rho(C) = \begin{cases} 0, & \text{αν } C = A \cup B \text{ και } \pi_1(A), \pi_2(B) \text{ αριθμήσιμα} \\ \infty, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$\tau(C) = \begin{cases} 0, & \text{αν } C = A \cup B \cup D \text{ και } \pi_1(A), \pi_2(B), \pi(D) \text{ αριθμήσιμα} \\ \infty, & \text{διαφορετικά} \end{cases}.$$

Να δείξετε ότι:

(i) Τα ρ και τ είναι μέτρα στην $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

(ii) $\rho(A \times B) = \tau(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$ και $B \in \mathcal{B}$.

(iii) Για τη διαγώνιο Δ ισχύει $\Delta \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ και $\rho(\Delta) = \infty$, ενώ $\tau(\Delta) = 0$.

Έτσι, η μοναδικότητα του μέτρου γινομένου αποτυγχάνει δίχως την υπόθεση του $\sigma-$πεπερασμένου.

Υπόδειξη. (i) Η αριθμήσιμη προσθετικότητα ελέγχεται εύκολα από τον ορισμό των ρ και τ. Ουσιαστικά, αρκεί να εξετάσετε την περίπτωση μιας ακολουθίας (C_n) ξένων συνόλων στην $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ με $\tau(C_n) = 0$ για κάθε n ή $\rho(C_n) = 0$ για κάθε n, και να δείξετε ότι $\tau\left(\bigcup_n C_n\right) = 0$ ή $\rho\left(\bigcup_n C_n\right) = 0$ αντίστοιχα.

(ii) Αρχικά παρατηρούμε ότι αν A, B είναι μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και το $\pi(A \times B)$ είναι αριθμήσιμο, τότε τα A και B είναι αριθμήσιμα. Πράγματι, αν σταθεροποιήσουμε $y \in B$ τότε η $f : A \to \pi(A \times B)$ με $f(x) = x - y$ είναι 1-1 και, όμοια, αν σταθεροποιήσουμε $x \in A$ τότε η $g : B \to \pi(A \times B)$ με $g(y) = x - y$ είναι 1-1.

Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Για την $\tau(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ αρκεί να δείξουμε ότι $\tau(A \times B) = 0$ αν και μόνο αν $\mu(A)\nu(B) = 0$, δηλαδή αν και μόνο αν τουλάχιστον ένα από τα A και B είναι αριθμήσιμο. Υποθέτουμε ότι $\tau(A \times B) = 0$. Τότε, $A \times B = K \cup L \cup M$, όπου τα $\pi_1(K)$, $\pi_2(L)$ και $\pi(M)$ είναι αριθμήσιμα. Παρατηρούμε ότι

$$(A \setminus \pi_1(K)) \times (B \setminus \pi_2(L)) \subseteq M.$$

Αφού το $\pi(M)$ είναι αριθμήσιμο, έχουμε ότι το $\pi((A \setminus \pi_1(K)) \times (B \setminus \pi_2(L)))$ είναι αριθμήσιμο και η προηγούμενη παρατήρηση δείχνει ότι τα $A \setminus \pi_1(K)$ και $B \setminus \pi_2(L)$ είναι αριθμήσιμα, και αφού τα $\pi_1(K)$ και $\pi_2(L)$ είναι αριθμήσιμα συμπεραίνουμε ότι τα A, B είναι αριθμήσιμα. Τότε, $\mu(A) = \nu(B) = 0$ και ειδικότερα $\mu(A)\nu(B) = 0$. Αντίστροφα, αν τουλάχιστον ένα από τα A, B είναι αριθμήσιμο τότε κάποιο από τα $\pi_1(A \times B) = A$ και $\pi_2(A \times B) = B$ είναι αριθμήσιμο, οπότε γράφοντας $A \times B = (A \times B) \cup \varnothing \cup \varnothing$ ή $A \times B = \varnothing \cup (A \times B) \cup \varnothing$ αντίστοιχα, συμπεραίνουμε ότι $\tau(A \times B) = 0$.

Για την $\rho(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ αρκεί να δείξουμε ότι $\rho(A \times B) = 0$ αν και μόνο αν $\mu(A)\nu(B) = 0$, δηλαδή αν και μόνο αν τουλάχιστον ένα από τα A και B είναι αριθμήσιμο. Υποθέτουμε ότι $\rho(A \times B) = 0$. Τότε, $A \times B = K \cup L$, όπου τα $\pi_1(K)$ και $\pi_2(L)$ είναι αριθμήσιμα. Παρατηρούμε ότι

$$(A \setminus \pi_1(K)) \times (B \setminus \pi_2(L)) = \varnothing.$$

Άρα, τουλάχιστον ένα από τα $A \setminus \pi_1(K)$ και $B \setminus \pi_2(L)$ είναι το κενό σύνολο, το οποίο σημαίνει ότι είτε $A = \pi_1(K)$ είτε $B = \pi_2(L)$, και αφού τα $\pi_1(K)$ και $\pi_2(L)$ είναι αριθμήσιμα συμπεραίνουμε ότι τουλάχιστον ένα από τα A, B είναι αριθμήσιμο. Αντίστροφα, αν τουλάχιστον ένα από τα A, B είναι αριθμήσιμο τότε κάποιο από τα $\pi_1(A \times B) = A$ και $\pi_2(A \times B) = B$ είναι αριθμήσιμο, οπότε γράφοντας $A \times B = (A \times B) \cup \varnothing$ ή $A \times B = \varnothing \cup (A \times B)$ αντίστοιχα, συμπεραίνουμε ότι $\rho(A \times B) = 0$.

(iii) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $\Delta_n = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right] \times \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$. Τότε, $\Delta_n \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ και $\Delta = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ (εξηγήστε γιατί). Άρα, $\Delta \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

Έστω ότι $\rho(\Delta) = 0$. Τότε, $\Delta = A \cup B$ για κάποια σύνολα A, B με τα $\pi_1(A)$ και $\pi_2(B)$ αριθμήσιμα. Παρατηρούμε ότι οι π_1 και π_2 είναι 1-1 στο Δ. Συνεπώς, τα A και B είναι αριθμήσιμα, άρα το $\Delta = A \cup B$ είναι αριθμήσιμο, το οποίο είναι άτοπο. Αυτό δείχνει ότι $\rho(\Delta) = \infty$.

Από την άλλη πλευρά, $\pi(\Delta) = \{x - y : (x, y) \in \Delta\} = \{x - x : x \in \mathbb{R}\} = \{0\}$. Γράφοντας $\Delta = \varnothing \cup \varnothing \cup \Delta$ και παρατηρώντας ότι τα $\pi_1(\varnothing) = \varnothing$, $\pi_2(\varnothing) = \varnothing$ και $\pi(\Delta) = \{0\}$ είναι αριθμήσιμα, συμπεραίνουμε ότι $\tau(\Delta) = 0$.

Κεφάλαιο 10

Το Θεώρημα Radon-Nikodym

Ομάδα Α΄.

10.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \nu)$ ένας χώρος μέτρου και μ το μέτρο απαρίθμησης στο X. Αποδείξτε ότι $\nu \ll \mu$.

Υπόδειξη. Έστω $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) = 0$. Αφού το μ είναι το μέτρο απαρίθμησης στο X, αναγκαστικά έχουμε $A = \emptyset$, και αφού το ν είναι μέτρο έχουμε $\nu(A) = 0$. Συνεπώς, $\nu \ll \mu$.

10.2. Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και μ, ν_1, ν_2 μέτρα στον $(X, \mathcal{A})$ ώστε $\nu_1 \ll \mu$ και $\nu_2 \ll \mu$. Υποθέτουμε ότι το μ είναι σ-πεπερασμένο. Αποδείξτε ότι

$$\frac{d(\nu_1 + \nu_2)}{d\mu} = \frac{d\nu_1}{d\mu} + \frac{d\nu_2}{d\mu}$$

και ότι για $a \geqslant 0$

$$\frac{d(a\nu_1)}{d\mu} = a\frac{d\nu_1}{d\mu},$$

μ-σχεδόν παντού.

Υπόδειξη. Έστω $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) = 0$. Αφού $\nu_1 \ll \mu$ και $\nu_2 \ll \mu$, έχουμε $\nu_1(A) = 0$ και $\nu_2(A) = 0$, άρα $(\nu_1 + \nu_2)(A) = \nu_1(A) + \nu_2(A) = 0$. Αυτό αποδεικνύει ότι $\nu_1 + \nu_2 \ll \mu$. Αφού το μ είναι σ-πεπερασμένο, υπάρχουν οι παράγωγοι Radon-Nikodym $\frac{d(\nu_1+\nu_2)}{d\mu}$, $\frac{d\nu_1}{d\mu}$, $\frac{d\nu_2}{d\mu}$ και για κάθε $A \in \mathcal{A}$ έχουμε

$$\int_A \frac{d(\nu_1 + \nu_2)}{d\mu}\, d\mu = (\nu_1 + \nu_2)(A) = \nu_1(A) + \nu_2(A) = \int_A \frac{d\nu_1}{d\mu}\, d\mu + \int_A \frac{d\nu_2}{d\mu}\, d\mu = \int_A \left(\frac{d\nu_1}{d\mu} + \frac{d\nu_2}{d\mu}\right) d\mu.$$

Έπεται ότι $\frac{d(\nu_1+\nu_2)}{d\mu} = \frac{d\nu_1}{d\mu} + \frac{d\nu_2}{d\mu}$ μ-σχεδόν παντού.

Εντελώς ανάλογα, αν $A \in \mathcal{A}$ και $\mu(A) = 0$, από την $\nu_1 \ll \mu$ έχουμε $\nu_1(A) = 0$, άρα $(a\nu_1)(A) = a\nu_1(A) = 0$. Αυτό αποδεικνύει ότι $a\nu_1 \ll \mu$. Αφού το μ είναι σ-πεπερασμένο, υπάρχουν οι παράγωγοι Radon-Nikodym $\frac{d(a\nu_1)}{d\mu}$ και $\frac{d\nu_1}{d\mu}$, και για κάθε $A \in \mathcal{A}$ έχουμε

$$\int_A \frac{d(a\nu_1)}{d\mu}\, d\mu = (a\nu_1)(A) = a\nu_1(A) = a\int_A \frac{d\nu_1}{d\mu}\, d\mu = \int_A \left(a\frac{d\nu_1}{d\mu}\right) d\mu.$$

Έπεται ότι $\frac{d(a\nu_1)}{d\mu} = a\frac{d\nu_1}{d\mu}$ μ-σχεδόν παντού.

Ομάδα Β΄.

10.3. Έστω μ, ν δύο μέτρα στον χώρο $(X, \mathcal{A})$. Αποδείξτε ότι $\mu \perp \nu$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ ώστε
$$\mu(A) < \varepsilon \quad \text{και} \quad \nu(X \setminus A) < \varepsilon.$$

Υπόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι $\mu \perp \nu$. Τότε, υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ ώστε $\mu(A) = 0$ και $\nu(X \setminus A) = 0$. Γι' αυτό το (ίδιο πάντα) A είναι φανερό ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύουν οι
$$\mu(A) < \varepsilon \quad \text{και} \quad \nu(X \setminus A) < \varepsilon.$$

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε, χρησιμοποιώντας την υπόθεση, να βρούμε $A_n \in \mathcal{A}$ ώστε
$$\mu(A_n) < \frac{1}{2^n} \quad \text{και} \quad \nu(X \setminus A_n) < \frac{1}{2^n}.$$
Θεωρούμε το σύνολο $A = \limsup A_n$. Αφού $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 < \infty$, από το πρώτο λήμμα Borel-Cantelli συμπεραίνουμε ότι
$$\mu(A) = 0.$$

Παρατηρούμε ότι
$$X \setminus A = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c.$$
Η ακολουθία $B_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c$ είναι αύξουσα, άρα
$$\nu(X \setminus A) = \lim_{n\to\infty} \nu\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c \right).$$

Όμως,
$$\nu\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c \right) \leqslant \nu(A_n^c) < \frac{1}{2^n} \to 0,$$
άρα τελικά $\nu(X \setminus A) = 0$. Έπεται ότι $\mu \perp \nu$.

10.4. Έστω μ, ν μέτρα στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$ και $f : X \to [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση ώστε $\nu(A) = \int_A f d\mu$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν το ν είναι $\sigma-$πεπερασμένο τότε $f < \infty$ $\mu-$σ.π.

(β) Αν το μ είναι $\sigma-$πεπερασμένο και $f < \infty$ $\mu-$σ.π. τότε το ν είναι σ-πεπερασμένο.

Υπόδειξη. (α) Το ν είναι σ-πεπερασμένο, άρα υπάρχουν ξένα ανά δύο $A_n \in \mathcal{A}$ τέτοια ώστε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ και $\nu(A_n) < \infty$ για κάθε $n \geqslant 1$. Έχουμε
$$\int_{A_n} f \, d\mu = \nu(A_n) < \infty,$$
άρα $\mu(Z_n) = 0$, όπου $Z_n = \{x \in A_n : f(x) = \infty\}$. Ορίζουμε $Z = \{x \in X : f(x) = \infty\}$. Αφού $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, βλέπουμε εύκολα ότι $Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$. Τότε, $\mu(Z) = 0$ και $f(x) < \infty$ για κάθε $x \in X \setminus Z$, δηλαδή $f < \infty$ $\mu-$σ.π.

(β) Το μ είναι σ-πεπερασμένο, άρα υπάρχουν ξένα ανά δύο $B_n \in \mathcal{A}$ τέτοια ώστε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ και $\mu(B_n) < \infty$ για κάθε $n \geqslant 1$. Θεωρούμε το σύνολο $Z = \{x \in X : f(x) = \infty\}$. Από την υπόθεση έχουμε $\mu(Z) = 0$, άρα

$$\nu(Z) = \int_Z f\, d\mu = 0.$$

Για κάθε $k \geqslant 1$ ορίζουμε $A_k = \{x \in X \setminus Z : k-1 \leqslant f(x) < k\}$. Παρατηρούμε ότι

$$X \setminus Z = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_k \cap B_n).$$

Τα σύνολα $A_k \cap B_n$ είναι ξένα και για κάθε $k, n \geqslant 1$ έχουμε

$$\nu(A_k \cap B_n) = \int_{A_k\cap B_n} f\, d\mu \leqslant \int_{A_k\cap B_n} (k+1)\, d\mu = (k+1)\mu(A_k \cap B_n) \leqslant (k+1)\mu(B_n) < \infty.$$

Γράφοντας

$$X = Z \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_k \cap B_n)\right)$$

βλέπουμε από τα παραπάνω ότι το X είναι αριθμήσιμη ένωση ξένων συνόλων από την $\mathcal{A}$ που έχουν πεπερασμένο ν-μέτρο. Συνεπώς, το ν είναι σ-πεπερασμένο.

10.5. Έστω μ, ν μέτρα στο μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$ και $f : X \to [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση ώστε $\nu(A) = \int_A f d\mu$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Αποδείξτε ότι $f > 0$ μ–σ.π. αν και μόνο αν $\mu \ll \nu$.

Υπόδειξη. ($\Longrightarrow$) Έστω $A \in \mathcal{A}$ με $\nu(A) = 0$. Υποθέτουμε ότι $\mu(A) > 0$. Αφού $f > 0$ μ–σ.π. υπάρχει $Z \subset A$ με $\mu(Z) = 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in A \setminus Z$. Θέτουμε $B_k = \{x \in A \setminus Z : f(x) \geqslant 1/k\}$ και παρατηρούμε ότι η (B_k) είναι αύξουσα ακολουθία συνόλων στην $\mathcal{A}$ και $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = A \setminus Z$, άρα

$$\lim \mu(B_k) = \mu(A \setminus Z) = \mu(A) > 0,$$

άρα υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $\mu(B_k) = 0$. Έχουμε $B_m \subseteq A$, άρα $\nu(B_m) = 0$ και

$$\nu(B_m) = \int_{B_m} f\, d\mu \geqslant \frac{1}{k}\mu(B_m) > 0,$$

το οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς, $\mu(A) = 0$. Αυτό δείχνει ότι $\mu \ll \nu$.

($\Longleftarrow$) Υποθέτουμε ότι το σύνολο $A = \{x \in X : f(x) = 0\}$ έχει μέτρο $\mu(A) > 0$. Τότε,

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu = 0.$$

Όμως, τότε, από την υπόθεση ότι $\mu \ll \nu$ παίρνουμε $\mu(A) = 0$, το οποίο είναι άτοπο.

10.6. Έστω μ, ν σ-επερασμένα μέτρα στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$ ώστε $\mu \ll \nu$ και $\nu \ll \mu$. Αποδείξτε ότι

$$\frac{d\nu}{d\mu} \cdot \frac{d\mu}{d\nu} = 1, \quad \mu - \text{σ.π.}$$

Υπόδειξη. Έστω $A \in \mathcal{A}$. Εφαρμόζοντας την

$$\int g \frac{d\mu}{d\nu}\, d\nu = \int g\, d\mu,$$

που ισχύει για κάθε μετρήσιμη $g : X \to [0, \infty]$, με $g = \frac{d\nu}{d\mu}\chi_A$ παίρνουμε

$$\int_A \frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\nu}\, d\nu = \int_A \frac{d\nu}{d\mu}\, d\mu = \nu(A) = \int_A 1\, d\nu.$$

Αφού το $A \in \mathcal{A}$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{d\nu}{d\mu} \cdot \frac{d\mu}{d\nu} = 1, \quad \mu - \text{σ.π.}$$

10.7. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος $\sigma-$πεπερασμένου μέτρου. Αποδείξτε ότι υπάρχει πεπερασμένο μέτρο ν στον $(X, \mathcal{A})$ ώστε $\nu \ll \mu$ και $\mu \ll \nu$.

Υπόδειξη. Το μ είναι σ-πεπερασμένο, άρα υπάρχει ακολουθία (A_n) ξένων ανά δύο συνόλων στην $\mathcal{A}$ με $\mu(A_n) < \infty$ για κάθε $n \geqslant 1$ και $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Θεωρούμε τη μετρήσιμη συνάρτηση

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} g_n,$$

όπου $g_n = \frac{1}{\mu(A_n)}\chi_{A_n}$ αν $\mu(A_n) > 0$ και $g_n = 0$ αν $\mu(A_n) = 0$. Παρατηρούμε ότι, από το θεώρημα Beppo Levi,

$$\int_X f\, d\mu = \sum_{\{n:\mu(A_n)>0\}} \frac{1}{2^n}\frac{1}{\mu(A_n)} \int_X \chi_{A_n} d\mu = \sum_{\{n:\mu(A_n)>0\}} \frac{1}{2^n} \leqslant 1 < \infty,$$

δηλαδή η f είναι μ-ολοκληρώσιμη. Για κάθε $A \in \mathcal{A}$ ρίζουμε

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu.$$

Από τον ορισμό του ν έχουμε ότι αν $\mu(A) = 0$ τότε $\nu(A) = 0$, άρα $\nu \ll \mu$.

Αντίστροφα, αν $A \in \mathcal{A}$ και $\nu(A) = 0$, τότε

$$0 = \nu(A) = \int_A f\, d\mu = \sum_{\{n:\mu(A_n)>0\}} \frac{1}{2^n}\frac{1}{\mu(A_n)} \int_A \chi_{A_n} d\mu = \sum_{\{n:\mu(A_n)>0\}} \frac{1}{2^n}\frac{\mu(A \cap A_n)}{\mu(A_n)},$$

άρα $\mu(A \cap A_n) = 0$ για κάθε n για το οποίο $\mu(A_n) > 0$, το οποίο σημαίνει ότι $\mu(A \cap A_n) = 0$ για κάθε $n \geqslant 1$. Τότε,

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cap A_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap A_n) = 0.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $\mu \ll \nu$.

10.8. Έστω μ, ν μέτρα στο μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$. Υποθέτουμε ότι το μ είναι σ-πεπερασμένο. Αποδείξτε ότι $\nu \leqslant \mu$ αν και μόνο αν η Radon-Nikodym παράγωγος $\frac{d\nu}{d\mu}$ ορίζεται και ισχύει $\frac{d\nu}{d\mu} \leqslant 1$ $\mu-$σ.π. στο X.

Υπόδειξη. ($\Longleftarrow$) Από την υπόθεση ότι $\frac{d\nu}{d\mu} \leqslant 1$ $\mu-$σ.π. στο X έπεται ότι

$$\nu(A) = \int_A \frac{d\nu}{d\mu}\, d\mu \leqslant \int_A \mathbf{1}\, d\mu = \mu(A)$$

για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Δηλαδή, $\nu \leqslant \mu$.

($\Longrightarrow$) Αν $\nu \leqslant \mu$ τότε για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A)$ έχουμε $\nu(A) = 0$, δηλαδή $\nu \ll \mu$. Άρα, ορίζεται η Radon-Nikodym παράγωγος $\frac{d\nu}{d\mu}$ και για κάθε $A \in \mathcal{A}$ η ανισότητα $\nu(A) \leqslant \mu(A)$ μπορεί να γραφτεί ως

$$\int_A \frac{d\nu}{d\mu}\, d\mu \leqslant \int_A \mathbb{1}\, d\mu,$$

απ' όπου έπεται ότι $\frac{d\nu}{d\mu} \leqslant 1$ $\mu-$σ.π. στο X.

Ομάδα Γ΄.

10.9. Έστω μ_1, ν_1 $\sigma-$πεπερασμένα μέτρα στο χώρο $(X, \mathcal{A})$ και μ_2, ν_2 $\sigma-$πεπερασμένα μέτρα στο χώρο $(Y, \mathcal{B})$ ώστε $\nu_1 \ll \mu_1$ και $\nu_2 \ll \mu_2$. Να δείξετε ότι

$$\nu_1 \times \nu_2 \ll \mu_1 \times \mu_2$$

και επιπλέον

$$\frac{d(\nu_1 \times \nu_2)}{d(\mu_1 \times \mu_2)}(x, y) = \frac{d\nu_1}{d\mu_1}(x) \cdot \frac{d\nu_2}{d\mu_2}(y), \quad (\mu_1 \times \mu_2) - \text{σ.π.}$$

Υπόδειξη. Έστω $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ με $(\mu_1 \times \mu_2)(C) = 0$. Έχουμε

$$0 = (\mu_1 \times \mu_2)(C) = \int_X \mu_2(C_x) d\mu_1(x),$$

άρα υπάρχει $Z \in \mathcal{A}$ με $\mu_1(Z) = 0$ τέτοιο ώστε $\mu_2(C_x) = 0$ για κάθε $x \in X \setminus Z$. Αφού $\nu_1 \ll \mu_1$ έχουμε $\nu_1(Z) = 0$ και αφού $\nu_2 \ll \mu_2$ έχουμε $\nu_2(C_x) = 0$ για κάθε $x \in X \setminus Z$. Δηλαδή, $\nu_2(C_x) = 0$ ν_1-σχεδόν παντού, και έπεται ότι

$$(\nu_1 \times \nu_2)(C) = \int_X \nu_2(C_x) d\nu_1(x) = 0.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $\nu_1 \times \nu_2 \ll \mu_1 \times \mu_2$.

Παρατηρούμε τώρα ότι, για κάθε $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, από το θεώρημα Tonelli έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{d\nu_1}{d\mu_1}(x) \cdot \frac{d\nu_2}{d\mu_2}(y) d(\mu_1 \times \mu_2)(x, y) &= \int_Y \int_X \chi_C(x, y) \frac{d\nu_1}{d\mu_1}(x) \cdot \frac{d\nu_2}{d\mu_2}(y) d\mu_1(x) d\mu_2(y) \\
&= \int_Y \left(\int_X \chi_C(x, y) \frac{d\nu_1}{d\mu_1}(x) d\mu_1(x) \right) \frac{d\nu_2}{d\mu_2}(y) d\mu_2(y) \\
&= \int_Y \left(\int_X (\chi_C)_y(x) \frac{d\nu_1}{d\mu_1}(x) d\mu_1(x) \right) \frac{d\nu_2}{d\mu_2}(y) d\mu_2(y) \\
&= \int_Y \left(\int_X \chi_{C_y}(x) d\nu_1(x) \right) \frac{d\nu_2}{d\mu_2}(y) d\mu_2(y) \\
&= \int_Y \nu_1(C^y) \frac{d\nu_2}{d\mu_2}(y) d\mu_2(y) \\
&= \int_Y \nu_1(C^y) d\nu_2(y) = (\nu_1 \times \nu_2)(C).
\end{aligned}$$

Αφού $\nu_1 \times \nu_2 \ll \mu_1 \times \mu_2$, έχουμε επίσης ότι

$$\int_C \frac{d(\nu_1 \times \nu_2)}{d(\mu_1 \times \mu_2)}(x,y)\, d(\mu_1 \times \mu_2)(x,y) = (\nu_1 \times \nu_2)(C),$$

δηλαδή

$$\int_C \frac{d\nu_1}{d\mu_1}(x) \cdot \frac{d\nu_2}{d\mu_2}(y) d(\mu_1 \times \mu_2)(x,y) = \int_C \frac{d(\nu_1 \times \nu_2)}{d(\mu_1 \times \mu_2)}(x,y)\, d(\mu_1 \times \mu_2)(x,y)$$

για κάθε $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Άρα,

$$\frac{d(\nu_1 \times \nu_2)}{d(\mu_1 \times \mu_2)}(x,y) = \frac{d\nu_1}{d\mu_1}(x) \cdot \frac{d\nu_2}{d\mu_2}(y), \quad (\mu_1 \times \mu_2) - \text{σ.π.}$$

10.10. (Δεσμευμένη μέση τιμή) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ μια $\sigma-$άλγεβρα και $f \in L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$. Μια *δεσμευμένη μέση τιμή* της f ως προς τη $\sigma-$άλγεβρα $\mathcal{B}$ είναι μια $\mathcal{B}-$μετρήσιμη συνάρτηση $g : X \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$$\int_B f d\mu = \int_B g d\mu, \quad \text{για κάθε } B \in \mathcal{B}.$$

(i) Αποδείξτε ότι υπάρχει μια δεσμευμένη μέση τιμή της f ως προς $\mathcal{B}$.

(ii) Αποδείξτε ότι αν g είναι μια δεσμευμένη μέση τιμή της f ως προς $\mathcal{B}$, τότε

$$\int |g| d\mu \leqslant \int |f| d\mu < \infty.$$

(iii) Αποδείξτε ότι η δεσμευμένη μέση τιμή είναι μοναδική, δηλαδή αν g, g_1 είναι δύο δεσμευμένες μέσες τιμές της f, τότε $g = g_1$ $\mu-$σ.π.

Η δεσμευμένη μέση τιμή της f ως προς $\mathcal{B}$ συμβολίζεται με $\mathbb{E}(f|\mathcal{B})$.

Υπόδειξη. (i) Υποθέτουμε αρχικά ότι $f \geqslant 0$. Ορίζουμε $\nu : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ με

$$\nu(B) = \int_B f\, d\mu.$$

Γνωρίζουμε ότι το ν είναι μέτρο στην $\mathcal{B}$ και $\nu \ll \mu\big|_{\mathcal{B}}$. Από το θεώρημα Radon-Nikodym υπάρχει $g \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ ώστε

$$\nu(B) = \int_B g d\mu, \quad \text{για κάθε } B \in \mathcal{B}.$$

Η g είναι μια δεσμευμένη μέση τιμή της f ως προς $\mathcal{B}$.

Για τη γενική περίπτωση, θεωρούμε $f \in L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$, γράφουμε $f = f^+ - f^-$, παρατηρούμε ότι $f^+, f^- \in L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ και εφαρμόζοντας το προηγούμενο βήμα βρίσκουμε δεσμευμένες μέσες τιμές g_1, g_2 των f^+, f^- αντίστοιχα. Η $g = g_1 - g_2$ είναι μια δεσμευμένη μέση τιμή της f ως προς $\mathcal{B}$.

(ii) Θέτουμε $B = \{g > 0\}$ και $C = \{g \leqslant 0\}$. Αφού η g είναι $\mathcal{B}$-μετρήσιμη, έχουμε $B, C \in \mathcal{B}$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $-f, f \leqslant |f|$ και τις

$$\int_B g\, d\mu = \int_B f\, d\mu \qquad \text{και} \qquad \int_C g\, d\mu = \int_C f\, d\mu,$$

βλέπουμε ότι

$$\int_X |g|\,d\mu = \int_B g\,d\mu - \int_C g\,d\mu = \int_B f\,d\mu - \int_C f\,d\mu \leqslant \int_B |f|\,d\mu + \int_C |f|\,d\mu = \int_X |f|\,d\mu.$$

(iii) Θέτουμε $B = \{g - g_1 > 0\} \in \mathcal{B}$. Παρατηρούμε ότι

$$\int_B (g - g_1)\,d\mu = \int_B g\,d\mu - \int_B g_1\,d\mu = \int_B f\,d\mu - \int_B f\,d\mu = 0.$$

Έπεται ότι $\mu(B) = 0$. Όμοια, για το $C = \{g_1 - g > 0\} \in \mathcal{B}$ βλέπουμε ότι $\mu(C) = 0$. Άρα, $g = g_1$ μ-σχεδόν παντού.

10.11. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας και $f \in L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$. Να υπολογιστούν οι $\mathbb{E}(f|\{\emptyset, X\})$ και $\mathbb{E}(f|\mathcal{A})$.

Υπόδειξη. Έστω $\mathcal{B} = \{\emptyset, X\}$. Αν y είναι μια τιμή της $g = \mathbb{E}(f|\mathcal{B})$ τότε $\emptyset \neq \{g = y\} \in \mathcal{B}$, άρα $\{g = y\} = X$. Δηλαδή, η g είναι σταθερή. Αφού

$$\int_X g\,d\mu = \int_X f\,d\mu$$

και $\mu(X) = 1$ έπεται ότι η σταθερή τιμή της $g = \mathbb{E}(f|\mathcal{B})$ είναι η μέση τιμή $\mathbb{E}(f) = \int_X f\,d\mu$ της f.

Για το δεύτερο ερώτημα παρατηρούμε ότι η f ικανοποιεί τον ορισμό της δεσμευμένης τιμής της f (του εαυτού της) ως προς $\mathcal{A}$. Από τη μοναδικότητα της δεσμευμένης τιμής συμπεραίνουμε ότι $\mathbb{E}(f|\mathcal{A}) = f$.

10.12. (Ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας και δύο $\sigma-$άλγεβρες $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. Να δείξετε ότι:

(i) Η δεσμευμένη μέση τιμή είναι γραμμική: για $a, b \in \mathbb{R}$ και $f, g \in L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ ισχύει ότι

$$\mathbb{E}(af + bg|\mathcal{B}) = a\mathbb{E}(f|\mathcal{B}) + b\mathbb{E}(g|\mathcal{B}).$$

(ii) Αν η $g : X \to \mathbb{R}$ είναι $\mathcal{B}-$μετρήσιμη και $\int_X |fg|\,d\mu < \infty$, τότε

$$\mathbb{E}(gf|\mathcal{B}) = g\mathbb{E}(f|\mathcal{B}).$$

(iii) Ισχύει ότι

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{E}(f|\mathcal{C})|\mathcal{B}\right) = \mathbb{E}(f|\mathcal{C}) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(f|\mathcal{B})|\mathcal{C}\right).$$

Υπόδειξη. (i) Θέτουμε $h_1 = \mathbb{E}(f|\mathcal{B})$ και $h_2 = \mathbb{E}(g|\mathcal{B})$. Για κάθε $B \in \mathcal{B}$ έχουμε

$$\int_B f\,d\mu = \int_B h_1\,d\mu \qquad \text{και} \qquad \int_B g\,d\mu = \int_B h_2\,d\mu.$$

Συνεπώς, για κάθε $B \in \mathcal{B}$ και κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\int_B (af + bg)\,d\mu = a\int_B f\,d\mu + b\int_B g\,d\mu = a\int_B h_1\,d\mu + b\int_B h_2\,d\mu = \int_B (ah_1 + bh_2)\,d\mu.$$

Η $ah_1 + bh_2$ είναι $\mathcal{B}$-μετρήσιμη, άρα είναι μια δεσμευμένη μέση τιμή της $af + bg$. Από τη μοναδικότητα της δεσμευμένης τιμής συμπεραίνουμε ότι $\mathbb{E}(af + bg|\mathcal{B}) = a\mathbb{E}(f|\mathcal{B}) + b\mathbb{E}(g|\mathcal{B})$.

(ii) Υποθέτουμε αρχικά ότι $g = \chi_C$ για κάποιο $C \in \mathcal{B}$. Παρατηρήστε ότι η gf είναι ολοκληρώσιμη, αφού η f είναι ολοκληρώσιμη. Για κάθε $B \in \mathcal{B}$ έχουμε

$$\int_B gf\,d\mu = \int_{B\cap C} f\,d\mu = \int_{B\cap C} \mathbb{E}(f|\mathcal{B})\,d\mu = \int_B g\mathbb{E}(f|\mathcal{B})\,d\mu.$$

Άρα, $\mathbb{E}(gf|\mathcal{B}) = g\mathbb{E}(f|\mathcal{B})$. Από το (i) (τη γραμμικότητα της δεσμευμένης μέσης τιμής) έπεται ότι αν s είναι απλή $\mathcal{B}$-μετρήσιμη συνάρτηση τότε

$$\mathbb{E}(sf|\mathcal{B}) = s\mathbb{E}(f|\mathcal{B}).$$

Υποθέτουμε τώρα ότι $f \geqslant 0$ και έστω g μη αρνητική $\mathcal{B}$-μετρήσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $\int_X |gf|\,d\mu < \infty$. Θεωρούμε αύξουσα ακολουθία (s_n) απλών $\mathcal{B}$-μετρήσιμων συναρτήσεων με $0 \leqslant s_n \nearrow g$. Τότε $0 \leqslant s_n f \nearrow gf$ και $0 \leqslant s_n\mathbb{E}(f|\mathcal{B}) \nearrow g\mathbb{E}(f|\mathcal{B})$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, για κάθε $B \in \mathcal{B}$ παίρνουμε

$$\int_B gf\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \int_B s_n f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_B s_n\mathbb{E}(f|\mathcal{B})\,d\mu = \int_B g\mathbb{E}(f|\mathcal{B})\,d\mu.$$

Έπεται ότι $\mathbb{E}(gf|\mathcal{B}) = g\mathbb{E}(f|\mathcal{B})$.

Για τη γενική περίπτωση, θεωρούμε $f \in L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $\mathcal{B}$-μετρήσιμη συνάρτηση g τέτοια ώστε $\int_X |gf|\,d\mu < \infty$. Παρατηρούμε ότι οι $g^+f^+, g^-f^+, g^+f^-, g^-f^-$ είναι ολοκληρώσιμες και εφαρμόζοντας το προηγούμενο βήμα βλέπουμε ότι $\mathbb{E}(g^+f^+|\mathcal{B}) = g^+\mathbb{E}(f^+|\mathcal{B})$ και $\mathbb{E}(g^+f^-|\mathcal{B}) = g^+\mathbb{E}(f^-|\mathcal{B})$. Από τη γραμμικότητα της δεσμευμένης τιμής έχουμε

$$\mathbb{E}(g^+f|\mathcal{B}) = \mathbb{E}(g^+f^+|\mathcal{B}) - \mathbb{E}(g^+f^-|\mathcal{B}) = g^+\mathbb{E}(f^+|\mathcal{B}) - g^+\mathbb{E}(f^-|\mathcal{B}) = g^+\mathbb{E}(f|\mathcal{B}).$$

Όμοια, από τις $\mathbb{E}(g^-f^+|\mathcal{B}) = g^-\mathbb{E}(f^+|\mathcal{B})$ και $\mathbb{E}(g^-f^-|\mathcal{B}) = g^-\mathbb{E}(f^-|\mathcal{B})$ και τη γραμμικότητα της δεσμευμένης τιμής έχουμε

$$\mathbb{E}(g^-f|\mathcal{B}) = \mathbb{E}(g^-f^+|\mathcal{B}) - \mathbb{E}(g^-f^-|\mathcal{B}) = g^-\mathbb{E}(f^+|\mathcal{B}) - g^-\mathbb{E}(f^-|\mathcal{B}) = g^-\mathbb{E}(f|\mathcal{B}).$$

Πάλι από τη γραμμικότητα της δεσμευμένης τιμής,

$$\mathbb{E}(g|\mathcal{B}) = \mathbb{E}(g^+f|\mathcal{B}) - \mathbb{E}(g^-f|\mathcal{B}) = g^+\mathbb{E}(f|\mathcal{B}) - g^-\mathbb{E}(f|\mathcal{B}) = g\mathbb{E}(f|\mathcal{B}).$$

(iii) Θέτουμε $g = \mathbb{E}(f|\mathcal{C})$ και $h = \mathbb{E}(f|\mathcal{B})$. Αφού $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$, η g είναι $\mathcal{B}$-μετρήσιμη. Από την προηγούμενη άσκηση έχουμε $\mathbb{E}(g|\mathcal{B}) = g$. Δηλαδή,

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{C})|\mathcal{B}) = \mathbb{E}(f|\mathcal{C}).$$

Έστω $C \in \mathcal{C}$. Από τον ορισμό της δεσμευμένης μέσης τιμής $\mathbb{E}(f|\mathcal{C})$ έχουμε

$$\int_C g\,d\mu = \int_C f\,d\mu.$$

Αφού $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ έχουμε $C \in \mathcal{B}$. Από τον ορισμό της δεσμευμένης τιμής $\mathbb{E}(f|\mathcal{C})$ έχουμε

$$\int_C h\,d\mu = \int_C f\,d\mu.$$

Αφού
$$\int_C g\,d\mu = \int_C h\,d\mu$$
για κάθε $C \in \mathcal{C}$ συμπεραίνουμε ότι $g = \mathbb{E}(h|\mathcal{C})$. Δηλαδή,
$$\mathbb{E}(f|\mathcal{C}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{B})|\mathcal{C}).$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε την
$$\mathbb{E}\left(\mathbb{E}(f|\mathcal{C})|\mathcal{B}\right) = \mathbb{E}(f|\mathcal{C}) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(f|\mathcal{B})|\mathcal{C}\right).$$

Κεφάλαιο 11

Χώροι L^p

Ομάδα Α΄.

11.1. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου και $f \in L^p(\mu)$. Να δείξετε ότι για κάθε $a > 0$ ισχύει

$$\mu\left(\{x : |f(x)| \geqslant a\}\right) \leqslant \left(\frac{\|f\|_p}{a}\right)^p.$$

Υπόδειξη. Έστω $\alpha > 0$. Παρατηρήστε ότι

$$\|f\|_p^p = \int_E |f|^p d\mu \geqslant \int_{\{|f|\geqslant\alpha\}} \alpha^p d\mu = \alpha^p \mu(\{|f| \geqslant \alpha\}.$$

11.2. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$, $1 < p < \infty$ και q ο συζυγής εκθέτης του p. Αν $f_n \to f$ στον $L^p(\mu)$ και $g_n \to g$ στον $L^q(\mu)$, δείξτε ότι $f_ng_n \to fg$ στον $L^1(\mu)$.

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι

$$\|f_ng_n - fg\|_1 \leqslant \|f_n(g_n - g)\|_1 + \|g(f_n - f)\|_1 \leqslant \|f_n\|_p\|g_n - g\|_q + \|f_n - f\|_p\|g\|_q$$

από την τριγωνική ανισότητα για την $\|\cdot\|_1$ και την ανισότητα Hölder. Επίσης, αφού

$$|\,\|f_n\|_p - \|f\|_p\,| \leqslant \|f_n - f\|_p \to 0,$$

έχουμε $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p$, άρα η ακολουθία $(\|f_n\|_p)$ είναι φραγμένη: υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|f_n\|_p \leqslant M$ για κάθε n. Από την υπόθεση έχουμε επίσης $\|f_n - f\|_p \to 0$ και $\|g_n - g\|_q \to 0$, άρα

$$\|f_ng_n - fg\|_1 \leqslant M\|g_n - g\|_q + \|f_n - f\|_p\|g\|_q \to 0.$$

11.3. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου και $p,q,r \geqslant 1$ με $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Να δείξετε ότι αν $f \in L^p(\mu)$ και $g \in L^q(\mu)$, τότε $fg \in L^r(\mu)$ και

$$\|fg\|_r \leqslant \|f\|_p\|g\|_q.$$

Υπόδειξη. Παρατηρήστε αρχικά ότι $1/r > 1/p$ άρα $r/p < 1$ και όμοια $r/q < 1$. Επίσης,

$$\frac{1}{p/r} + \frac{1}{q/r} = r\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = 1$$

από την υπόθεση, δηλαδή οι $p/r, q/r$ είναι συζυγείς εκθέτες. Γράφουμε $|fg|^r = |f|^r|g|^r = (|f|^p)^{r/p}(|g|^q)^{r/q}$ και εφαρμόζουμε την ανισότητα Hölder γι' αυτούς τους εκθέτες:

$$\begin{aligned}\int_X |fg|^r d\mu &= \int_X (|f|^p)^{r/p}(|g|^q)^{r/q} d\mu \leqslant \left(\int_X [(|f|^p)^{r/p}]^{p/r} d\mu\right)^{r/p} \left(\int_X [(|g|^q)^{r/q}]^{q/r} d\mu\right)^{r/q} \\ &= \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{r/p} \left(\int_X |g|^q d\mu\right)^{r/q} = \|f\|_p^r \|g\|_q^r < +\infty.\end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $fg \in L^r(\mu)$. Τέλος,

$$\|fg\|_r = \left(\int_X |fg|^r d\mu\right)^{1/r} = (\|f\|_p^r \|g\|_q^r)^{1/r} = \|f\|_p \|g\|_q.$$

11.4. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f_n, f \in L^p(\mu)$ ώστε $f_n \to f$ στον $L^p(\mu)$. Αν (g_n) μια ομοιόμορφα φραγμένη ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο X με $g_n \to g$ μ–σχεδόν παντού, να δείξετε ότι $\|f_n g_n - fg\|_p \to 0$.

Υπόδειξη. Από την υπόθεση υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|g_n\|_\infty \leqslant M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού $g_n \to g$ σχεδόν παντού, εύκολα ελέγχουμε ότι $\|g\|_\infty \leqslant M$ (υπάρχει $Z \subset X$ με $\mu(Z) = 0$ ώστε, για κάθε $x \in X \setminus Z$ ισχύουν οι $|g_n(x)| \leqslant M$ για κάθε n και $g_n(x) \to g(x)$, άρα για κάθε $x \in X \setminus Z$ έχουμε $|g(x)| \leqslant M$).

Θα χρησιμοποιήσουμε την απλή παρατήρηση ότι αν $u \in L^p(\mu)$ και $v \in L^\infty(\mu)$ τότε $uv \in L^p(\mu)$ και

$$\|uv\|_p^p = \int_X |u|^p |v|^p \, d\mu \leqslant \int_X |u|^p \|v\|_\infty^p \, d\mu = \|v\|_\infty^p \|u\|_p^p.$$

δηλαδή

$$\|uv\|_p \leqslant \|v\|_\infty \|u\|_p.$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned}\|f_n g_n - fg\|_p &= \|(f_n - f)g_n + f(g_n - g)\|_p \leqslant \|(f_n - f)g_n\|_p + \|f(g_n - g)\|_p \\ &\leqslant \|g_n\|_\infty \|f_n - f\|_p + \|f(g_n - g)\|_p \leqslant M\|f_n - f\|_p + \|f(g_n - g)\|_p.\end{aligned}$$

Για τον πρώτο όρο στο δεξιό μέλος έχουμε $\|f_n - f\|_p \to 0$, άρα $M\|f_n - f\|_p \to 0$. Για τον δεύτερο όρο χρησιμοποιούμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης: έχουμε

$$|f(g_n - g)|^p = |f|^p |g_n - g|^p \leqslant |f|^p (|g_n| + |g|)^p \leqslant (2M)^p |f|^p$$

σχεδόν παντού, και η $(2M)^p |f|^p$ είναι ολοκληρώσιμη, διότι $f \in L^p(\mu)$ (ως $\|\cdot\|_p$-όριο των $f_n \in L^p(\mu)$). Επίσης, $|f(g_n - g)|^p \to 0$ σχεδόν παντού, διότι $|f(x)| < \infty$ σχεδόν παντού και $g_n(x) - g(x) \to 0$ σχεδόν παντού. Μπορούμε λοιπόν να εφαρμόσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, και έχουμε

$$\int_E |f(g_n - g)|^p \, d\mu \to 0,$$

δηλαδή $\|f(g_n - g)\|_p \to 0$. Από τα παραπάνω έπεται ότι

$$\|f_n g_n - fg\|_p \leqslant M\|f_n - f\|_p + \|f(g_n - g)\|_p \to 0.$$

11.5. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου και $1 \leqslant p < q < \infty$.

(i) Αν $f : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμη, να δείξετε ότι

$$\|f\|_p \leqslant \|f\|_q \,[\mu(X)]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\,.$$

(ii) Να δείξετε ότι $L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu)$.

Υπόδειξη. (α) και (β) Υποθέτουμε ότι $\|f\|_q < \infty$, αλλιώς το δεξιό μέλος απειρίζεται και δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. Αν $f \in L^q(\mu)$, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}\int_X |f|^p \cdot \mathbf{1}\, d\mu &\leqslant \left(\int_X |f|^q d\mu\right)^{p/q} \left(\int_X \mathbf{1}\, d\mu\right)^{1-p/q}\\ &= \|f\|_q^p (\mu(X))^{1-p/q},\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder για τις $|f|^p$ και $\mathbf{1}$ με εκθέτες $\frac{q}{p}$ και $\frac{q}{q-p}$ αντίστοιχα. Άρα,

$$\|f\|_p^p \leqslant \|f\|_q^p (\mu(X))^{1-\frac{p}{q}} < +\infty,$$

απ¨ όπου έπεται ότι $f \in L^p(\mu)$ και $\|f\|_p \leqslant \|f\|_q [\mu(X)]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$.

Ομάδα Β΄.

11.6. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου και $1 \leqslant p < q < r < \infty$. Να δείξετε ότι κάθε $f \in L^q(\mu)$ γράφεται στη μορφή $f = g + h$ για κάποιες $g \in L^p(\mu)$ και $h \in L^r(\mu)$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο $B = \{|f| > 1\}$ και ορίζουμε τις $g = f\chi_B$, $h = f - g$. Από τον ορισμό είναι φανερό ότι $f = g + h$. Παρατηρούμε ότι $|f(x)|^p \leqslant |f(x)|^q$ για κάθε $x \in B$, διότι $p < q$ και $|f(x)| > 1$ αν $x \in B$. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$\begin{aligned}\int_X |g|^p d\mu = \int_X |f|^p \chi_B \, d\mu = \int_B |f|^p \, d\mu &\leqslant \int_B |f|^q \, d\mu\\ &\leqslant \int_X |f|^q \, d\mu = \|f\|_q^q < \infty,\end{aligned}$$

διότι $f \in L^q(\mu)$. Άρα, $g \in L^p(\mu)$.

Για την h παρατηρούμε ότι $h = f\chi_{X\setminus B}$, και $|h(x)| \leqslant 1$ για κάθε $x \in X \setminus B$. Συνεπώς, $|h(x)|^r \leqslant |h(x)|^q$ για κάθε $x \in X \setminus B$, διότι $q < r$. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$\begin{aligned}\int_X |h|^r d\mu = \int_X |f|^r \chi_{X\setminus B} \, d\mu = \int_{X\setminus B} |f|^r \, d\mu &\leqslant \int_{X\setminus B} |f|^q \, d\mu\\ &\leqslant \int_X |f|^q \, d\mu = \|f\|_q^q < \infty,\end{aligned}$$

διότι $f \in L^q(\mu)$. Άρα, $h \in L^r(\mu)$.

11.7. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου και $1 \leqslant p < r < \infty$. Να δείξετε ότι αν $f \in L^p(\mu) \cap L^r(\mu)$, τότε είναι και $f \in L^q(\mu)$ για κάθε $p \leqslant q \leqslant r$.

Υπόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $p < q < r$. Ψπάρχει $t \in (0,1)$ τέτοιος ώστε $q = (1-t)p + tr$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder για τις συναρτήσεις $|f|^{(1-t)p}$ και $|f|^{tr}$ με εκθέτες $\frac{1}{1-t}$ και $\frac{1}{t}$

αντίστοιχα, γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_X |f|^q\,d\mu &= \int_E |f|^{(1-t)p}|f|^{tr}\,d\mu \leqslant \left(\int_X \left(|f|^{(1-t)p}\right)^{\frac{1}{1-t}}\,d\mu\right)^{1-t}\left(\int_X \left(|f|^{tr}\right)^{\frac{1}{t}}\,d\mu\right)^{t}\\ &= \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1-t}\left(\int_X |f|^r d\mu\right)^{t} = \|f\|_p^{(1-t)p}\|f\|_r^{tr} < \infty.\end{aligned}$$

Άρα, $f \in L^q(\mu)$.

11.8. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου, $p \geqslant 1$ και μια ακολουθία $\{f_n\}$ στον $L^p(\mu)$ με $\|f_n\|_p \leqslant 1$ για κάθε n. Αν $f_n \to f$ κατά σημείο μ–σ.π., να δείξετε ότι $f \in L^p(\mu)$ και $\|f\|_p \leqslant 1$.

Υπόδειξη. Αφού $|f_n|^p \to |f|^p$ σχεδόν παντού στο X, από το λήμμα του Fatou έχουμε

$$\|f\|_p^p = \int_X |f|^p\,d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty}|f_n|^p\,d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty}\int_X |f_n|^p\,d\mu \leqslant 1,$$

διότι

$$\int_X |f_n|^p\,d\mu = \|f_n\|_p^p \leqslant 1$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, από την υπόθεση.

11.9. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου και $f : X \to \mathbb{C}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση. Να δείξετε ότι $f \in L^p(\mu)$ αν και μόνο αν

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p\mu\left(\{x \in X : n-1 \leqslant |f(x)| < n\}\right) < \infty,$$

όπου $1 \leqslant p < \infty$.

Υπόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $E_n = \{x \in X : n-1 \leqslant |f| < n\}$. Παρατηρήστε ότι

$$(n-1)^p\mu(E_n) \leqslant \int_{E_n} |f|^p\,d\mu \leqslant n^p\mu(E_n).$$

Επίσης, αφού τα E_n είναι ξένα, από την προσθετικότητα του ολοκληρώματος έχουμε

$$\sum_{n=k}^{\infty}\int_{E_n} |f|^p\,d\mu = \int_{\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n} |f|^p\,d\mu \leqslant \int_X |f|^p\,d\mu$$

για κάθε $k \geqslant 1$. Υποθέτουμε πρώτα ότι $f \in L^p(\mu)$. Τότε, αφού $\frac{n}{n-1} \leqslant 2$ για κάθε $n \geqslant 2$, έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} n^p\mu(E_n) &\leqslant \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^p (n-1)^p\mu(E_n) \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} 2^p(n-1)^p\mu(E_n)\\ &\leqslant 2^p\sum_{n=2}^{\infty}\int_{E_n} |f|^p\,d\mu \leqslant 2^p\int_X |f|^p\,d\mu < \infty.\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p\mu(\{n-1 \leqslant |f| < n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} n^p\mu(E_n) < \infty.$$

Αντίστροφα, αν η παραπάνω σειρά συγκλίνει, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_X |f|^p\,d\mu &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}|f|^p \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} n^p\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^p\mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} n^p\mu(\{n-1\leqslant |f|<n\}) < \infty,\end{aligned}$$

άρα $f \in L^p(\mu)$.

11.10. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου και $f_n, f \in L^p(\mu)$, όπου $1 \leqslant p < \infty$, με $f_n \to f$ μ–σ.π. Να δείξετε ότι

$$\|f_n - f\|_p \to 0 \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \|f_n\|_p \to \|f\|_p.$$

Υπόδειξη. Από την τριγωνική ανισότητα για την $\|\cdot\|_p$ έχουμε

$$|\,\|f_n\|_p - \|f\|_p\,| \leqslant \|f_n - f\|_p.$$

Συνεπώς, αν $\|f_n - f\|_p \to 0$ έχουμε $\|f_n\|_p - \|f\|_p \to 0$, δηλαδή $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$.

Για την αντίστροφη ανισότητα, χρησιμοποιούμε την Άσκηση 6.29 (γενίκευση του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης). Ορίζουμε $g_n = 2^p(|f_n|^p + |f|^p)$ και $g = 2^{p+1}|f|^p$. Έχουμε

$$\begin{aligned}|f_n - f|^p &\leqslant (|f_n| + |f|)^p \leqslant (2\max\{|f_n|, |f|\})^p = 2^p\max\{|f_n|^p, |f|^p\}\\ &\leqslant 2^p(|f_n|^p + |f|^p) = g_n.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $g_n \to g$ σχεδόν παντού (διότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού). Επίσης, $g_n, g \in L^1(\mu)$ (διότι $|f_n|^p, |f|^p \in L^1(\mu)$) και

$$\int_X |g_n|\,d\mu = 2^p\left(\int_X |f_n|^p\,d\mu + \int_X |f|^p\,d\mu\right) \to 2^{p+1}\int_X |f|^p\,d\mu = \int_X g\,d\mu,$$

διότι $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$.

Αφού $|f_n - f|^p \to 0$ σχεδόν παντού, από την Άσκηση 6.29 συμπεραίνουμε ότι

$$\int_X |f_n - f|^p\,d\mu \to 0,$$

δηλαδή $\|f_n - f\|_p \to 0$.

11.11. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου και μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{C}$. Να δείξετε ότι

$$\lim_{p\to\infty}\|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

Υπόδειξη. Έστω $0 \neq f \in L^\infty(\mu)$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $1 \leqslant p < \infty$,

$$\|f\|_p^p = \int_X |f|^p\,d\mu \leqslant \int_X \|f\|_\infty^p d\mu = \|f\|_\infty^p\mu(X) < \infty,$$

άρα $f \in L^p(\mu)$. Επίσης,

$$\|f\|_p \leqslant \|f\|_\infty[\mu(X)]^{1/p} \to \|f\|_\infty$$

καθώς το $p \to \infty$, άρα $\limsup_{p\to\infty} \|f\|_p \leqslant \|f\|_\infty$.

Από την άλλη πλευρά, αν $0 < \varepsilon < \|f\|_\infty$, τότε το σύνολο $B_\varepsilon = \{x \in X : |f(x)| \geqslant \|f\|_\infty - \varepsilon\}$ έχει θετικό μέτρο, και

$$\|f\|_p^p \geqslant \int_{B_\varepsilon} |f|^p d\, d\mu \geqslant (\|f\|_\infty - \varepsilon)^p \mu(B_\varepsilon),$$

άρα

$$\liminf_{p\to\infty} \|f\|_p \geqslant (\|f\|_\infty - \varepsilon) \lim_{p\to\infty} [\mu(B_\varepsilon)]^{1/p} = \|f\|_\infty - \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon \in (0, \|f\|_\infty)$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι

$$\liminf_{p\to\infty} \|f\|_p \geqslant \|f\|_\infty,$$

και έπεται ότι $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

11.12. Έστω $1 \leqslant p_0 < p_1 \leqslant \infty$. Δώστε παραδείγματα μετρήσιμων συναρτήσεων $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν τα εξής:

(α) $f \in L^p(0,\infty)$ αν και μόνο αν $p_0 < p < p_1$.

(β) $f \in L^p(0,\infty)$ αν και μόνο αν $p_0 \leqslant p \leqslant p_1$

(γ) $f \in L^p(0,\infty)$ αν και μόνο αν $p = p_0$.

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε την $f(x) = \frac{1}{x^{1/p_1}}\chi_{[0,1]}(x) + \frac{1}{x^{1/p_0}}\chi_{[1,\infty)}(x)$. Παρατηρήστε ότι αν $p_0 < p < p_1$ τότε

$$\int_0^\infty |f(x)|^p d\lambda(x) = \int_0^1 \frac{1}{x^{p/p_1}} d\lambda(x) + \int_1^\infty \frac{1}{x^{p/p_0}} d\lambda(x) < \infty.$$

Επίσης, αν $p \leqslant p_0$ έχουμε

$$\int_0^\infty |f(x)|^p d\lambda(x) \geqslant \int_1^\infty \frac{1}{x^{p/p_0}} d\lambda(x) = \infty,$$

ενώ αν $p \geqslant p_1$ έχουμε

$$\int_0^\infty |f(x)|^p d\lambda(x) \geqslant \int_0^1 \frac{1}{x^{p/p_1}} d\lambda(x) = \infty.$$

(β) Θεωρούμε την $f(x) = \frac{1}{x^{1/p_1}}\chi_{[0,1]}(x) + \frac{1}{x^{1/p_0}(\ln(x+1))^{2/p_0}}\chi_{[1,\infty)}(x)$. Παρατηρήστε ότι αν $p_0 \leqslant p \leqslant p_1$ τότε

$$\int_0^\infty |f(x)|^p d\lambda(x) = \int_0^1 \frac{1}{x^{p/p_1}} d\lambda(x) + \int_1^\infty \frac{1}{x^{p/p_0}(\ln(x+1))^{2p/p_0}} d\lambda(x) < \infty.$$

Επίσης, αν $p < p_0$ έχουμε

$$\int_0^\infty |f(x)|^p d\lambda(x) \geqslant \int_1^\infty \frac{1}{x^{p/p_0}(\ln(x+1))^{2p/p_0}} d\lambda(x) = \infty,$$

ενώ αν $p > p_1$ έχουμε

$$\int_0^\infty |f(x)|^p d\lambda(x) \geqslant \int_0^1 \frac{1}{x^{p/p_1}} d\lambda(x) = \infty.$$

(γ) Θεωρήστε την $f(x) = \frac{1}{x^{1/p_0}}\chi_{[0,1]}(x) + \frac{1}{x^{1/p_0}(\ln(x+1))^{2/p_0}}\chi_{[1,\infty)}(x)$.

11.13. Έστω E ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ με $0 < \lambda(E) < \infty$.

(i) Δείξτε ότι η $\chi_E * \chi_E$ είναι συνεχής συνάρτηση.

(ii) Δείξτε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε: αν $|x| < \varepsilon$ τότε $\lambda(E \cap (E + x)) > 0$.

Υπόδειξη. (α) Γράφουμε

$$\begin{aligned}|(\chi_E * \chi_E)(x) - (\chi_E * \chi_E)(y)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^d} [\chi_E(x-z) - \chi_E(y-z)]\chi_E(z) d\lambda(z)\right| \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |\chi_E(x-z) - \chi_E(y-z)| d\lambda(z).\end{aligned}$$

Αν θέσουμε $f(z) = \chi_E(x-z)$, τότε $\chi_E(y-z) = \chi_E(x-z-(x-y) = f(z+(x-y)) = f_{x-y}(z)$. Αφού $\lambda(E) < \infty$, έχουμε $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Έπεται ότι

$$\lim_{y \to x} \int_{\mathbb{R}^d} |\chi_E(x-z) - \chi_E(y-z)| d\lambda(z) = \lim_{x \to y} \int_{\mathbb{R}^d} |f - f_{x-y}|\, d\lambda = 0.$$

(β) Η συνάρτηση

$$f(x) := (\chi_{-E} * \chi_E)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{-E}(x-z)\chi_E(z)\, d\lambda(z) = \lambda((x+E) \cap E)$$

είναι συνεχής, από το πρώτο ερώτημα. Όμως,

$$f(0) = \lambda(E \cap E) > 0.$$

Άρα, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε: αν $|x| < \varepsilon$ τότε

$$f(x) = \lambda((E+x) \cap E) > 0.$$

11.14. Έστω $\{f_n\}$ ακολουθία μη αρνητικών συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι κάθε f_n μηδενίζεται έξω από το $[0, 1/n]$ και

$$\int_0^{1/n} f_n(t)\, dt = 1.$$

Έστω $g \in L^1(\mathbb{R})$. Ορίζουμε $g_n = f_n * g$. Δείξτε ότι $\|g_n - g\|_1 \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

Υπόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned}\|g_n\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} |g_n(x)|\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \left|\int_{\mathbb{R}} g(x-t) f_n(t)\, d\lambda(t)\right| d\lambda(x) \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |g(x-t)| f_n(t)\, d\lambda(t)\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f_n(t) \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x-t)|\, d\lambda(x)\right) d\lambda(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f_n(t) \|g\|_1\, d\lambda(t).\end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\|g_n\|_1 \leqslant \|g\|_1 < +\infty.$$

Αρχικά δείχνουμε ότι

$$\|g_n - g\|_1 \leqslant \int_{\mathbb{R}} f_n(t) \|g_t - g\|_1\, d\lambda(t),$$

όπου $g_t(x) = g(x-t)$. Πράγματι,

$$|g_n(x) - g(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |g(x-t) - g(x)| f_n(t)\, d\lambda(t),$$

άρα

$$\begin{aligned}\|g_n - g\|_1 &\leqslant \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |g(x-t) - g(x)| f_n(t)\, d\lambda(t)\, d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f_n(t) \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x-t) - g(x)|\, d\lambda(x) \right) d\lambda(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \|g_t - g\|_1 f_n(t)\, d\lambda(t).\end{aligned}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $|t| < \delta$ τότε $\|g_t - g\|_1 < \varepsilon$. Έστω $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n_0} < \delta$. Για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε

$$\begin{aligned}\|g_n - g\|_1 &\leqslant \int_{\mathbb{R}} \|g_t - g\|_1 f_n(t)\, d\lambda(t) = \int_{[0,1/n]} \|g_t - g\|_1 f_n(t)\, d\lambda(t) \\ &< \varepsilon \int_{[0,1/n]} f_n(t)\, d\lambda(t) \leqslant \varepsilon,\end{aligned}$$

και έπεται ότι $\lim_{n\to\infty} \|g_n - g\|_1 = 0$.

11.15. Σταθεροποιούμε μια $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και ορίζουμε

$$A_g(f) = g * f.$$

(i) Δείξτε ότι ο $A_g : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n)$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής.

(ii) Αν επιπλέον $g \geqslant 0$, υπολογίστε τη νόρμα $\|A_g\|$ του A_g.

(iii) Δείξτε ότι η μοναδική $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ για την οποία $f * f = f$ είναι η $f = 0$.

Υπόδειξη. (i) Γνωρίζουμε ότι αν $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ τότε η συνέλιξη $g * f$ ορίζεται καλά (σχεδόν παντού), ανήκει στον $L^1(\mathbb{R}^n)$ και $\|g * f\|_1 \leqslant \|g\|_1 \|f\|_1$. Η ανισότητα αυτή δείχνει ότι

$$\|A_g(f)\|_1 \leqslant \|g\|_1 \|f\|_1$$

για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, άρα ο τελεστής $A_g : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n)$ είναι φραγμένος και $\|A_g\| \leqslant \|g\|_1$. Η γραμμικότητα του A_g προκύπτει από την αντίστοιχη ιδιότητα της συνέλιξης: αν $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ τότε

$$A_g(a_1 f_1 + a_2 f_2) = g * (a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 (g * f_1) + a_2 (g * f_2) = a_1 A_g(f_1) + a_2 A_g(f_2).$$

(ii) Αν επιπλέον $g \geqslant 0$ τότε για κάθε ολοκληρώσιμη $f \geqslant 0$ έχουμε, από το θεώρημα Tonelli,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} (g * f)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y) f(y)\ d\lambda(y) \right) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)\ d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \|g\|_1 d\lambda(y) = \|g\|_1 \int_{\mathbb{R}^n} f(y) d\lambda(y) = \|g\|_1 \|f\|_1.\end{aligned}$$

Παίρνοντας, για παράδειγμα $f = \chi_E$, όπου E μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(E) = 1$, έχουμε $\chi_E \geqslant 0$ και $\|\chi_E\|_1 = \lambda(E) = 1$, συνεπώς

$$\|A_g\| = \sup\{\|A_g(f)\|_1 : \|f\|_1 \leqslant 1\} \geqslant \|A_g(\chi_E)\|_1 = \|g * \chi_E\|_1 = \|g\|_1\|\chi_E\|_1 = \|g\|_1.$$

Η αντίστροφη ανισότητα $\|A_g\| \leqslant \|g\|_1$ αποδείχθηκε (γενικότερα) στο (i), άρα $\|A_g\| = \|g\|_1$.

(iii) *Χρησιμοποιεί ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier.* Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ με $f * f = f$. Τότε,

$$(\widehat{f})^2 = \widehat{f * f} = \widehat{f}.$$

Αφού η $\widehat{f}$ είναι συνεχής συνάρτηση, έπεται ότι $\widehat{f} \equiv 0$ ή $\widehat{f} \equiv 1$. Το δεύτερο ενδεχόμενο αποκλείεται διότι $\lim_{|\xi|\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$. Άρα, $\widehat{f} \equiv 0$ και γνωρίζουμε ότι αυτό συνεπάγεται την $f \equiv 0$.

11.16. Δείξτε ότι αν $f_n \in L^1[0,1]$ και $\|f_n\|_1 \leqslant \frac{1}{2^n}$, τότε $f_n \to 0$ σχεδόν παντού ως προς το μέτρο Lebesgue.

Υπόδειξη. Από το θεώρημα Beppo Levi έχουμε

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|\right) d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 |f_n|\, d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_1 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 < \infty.$$

Έπεται ότι λ-σχεδόν παντού στο $[0,1]$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ συγκλίνει, άρα λ-σχεδόν παντού στο $[0,1]$ έχουμε $|f_n(x)| \to 0$ και έπεται το ζητούμενο.

Ομάδα Γ΄.

11.17. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $p \geqslant 1$ και μια συνάρτηση $f \in L^p(\mu)$. Να δείξετε ότι

$$\int |f|^p\, d\mu = p \int_0^{\infty} t^{p-1} \mu\left(\{x \in X : |f(x)| > t\}\right) d\lambda(t).$$

Υπόδειξη. Εφαρμόζουμε το θεώρημα Tonelli. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\int_X |f|^p\, d\mu &= \int_X \left(\int_0^{|f(x)|} pt^{p-1}\, d\lambda(t)\right) d\mu(x)\\
&= \int_X \left(\int_0^{\infty} pt^{p-1} \chi_{[0,|f(x)|)}(t)\, d\lambda(t)\right) d\mu(x)\\
&= \int_0^{\infty} \left(\int_X \chi_{[0,|f(x)|)}(t)\, d\mu(x)\right) pt^{p-1}\, d\lambda(t)\\
&= \int_0^{\infty} \left(\int_X \chi_{\{x\in X:|f(x)|>t\}}(x)\, d\mu(x)\right) pt^{p-1}\, d\lambda(t)\\
&= \int_0^{\infty} \mu(\{x \in X : |f(x)| > t\}) pt^{p-1}\, d\lambda(t).
\end{aligned}$$

11.18. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου και $f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $p \geqslant 1$ και σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε

$$\mu\left(\{x \in X : |f(x)| \geqslant t\}\right) \leqslant \frac{C}{t^p},$$

για κάθε $t > 0$. Δείξτε ότι $f \in L^r(\mu)$ για κάθε $1 \leqslant r < p$.

Υπόδειξη. Έστω $q \leqslant r < p$. Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 11.17 γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_X |f(x)|^r \, d\mu(x) &= \int_0^\infty rt^{r-1}\mu(\{x \in E : |f(x)| > t\})\, d\lambda(t)\\ &= \int_0^1 rt^{r-1}\mu(\{x \in X : |f(x)| > t\})\, d\lambda(t)\\ &\quad + \int_1^\infty rt^{r-1}\mu(\{x \in X : |f(x)| > t\})\, d\lambda(t)\\ &\leqslant \int_0^1 rt^{r-1}\mu(X)\, d\lambda(t) + \int_1^\infty rt^{r-1}\frac{c}{t^p}\, d\lambda(t)\\ &= \mu(X)\int_0^1 rt^{r-1} d\lambda(t) + Cr\int_1^\infty t^{r-p-1}\, d\lambda(t)\\ &= \mu(X) + \frac{Cr}{p-r} < \infty,\end{aligned}$$

διότι

$$\int_1^\infty t^{r-p-1}\, d\lambda(t) = \lim_{M\to\infty}\left(\frac{M^{r-p}}{r-p} - \frac{1}{r-p}\right) = \frac{1}{p-r},$$

αφού $r - p < 0$.

Έπεται ότι $f \in L^r(\mu)$.

11.19. Έστω $r \geqslant 1$ και $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις με $\|f_n\|_r \leqslant M$ για κάθε n. Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού (ως προς το μέτρο Lebesgue) στο $(0,1)$. Να δείξετε ότι για κάθε $1 \leqslant p < r$ ισχύει $\|f_n - f\|_p \to 0$.

Υπόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι, από το λήμμα του Fatou,

$$\int_0^1 |f|^r \, d\lambda \leqslant \liminf \int_0^1 |f_n|^r \, d\lambda \leqslant M^r,$$

διότι $\|f\|_r \leqslant m$ για κάθε n. Έπεται ότι

$$\int_0^1 |f_n - f|^r \, d\lambda \leqslant \int_0^1 2^r(|f_n|^r + |f|^r)\, d\lambda \leqslant 2^{r+1}M^r.$$

Έστω $\delta > 0$. Αφού $f_n \to f$ σχεδόν παντού, υπάρχει $E \subseteq (0,1)$ με $\lambda(E) > 1 - \delta$, τέτοιο ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο E. Για τυχόν $1 \leqslant p < r$ γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f_n - f|^p \, d\lambda &= \int_E |f_n - f|^p \, d\lambda + \int_{E^c} |f_n - f|^p \, d\lambda\\ &\leqslant \int_E |f_n - f|^p \, d\lambda + [\lambda(E^c)]^{1-\frac{p}{r}}\left(\int_{E^c} |f_n - f|^r\right)^{\frac{p}{r}}\\ &< \int_E |f_n - f|^p \, d\lambda + \delta^{1-\frac{p}{r}}\left(\int_0^1 |f_n - f|^r\right)^{\frac{p}{r}}\\ &\leqslant \int_E |f_n - f|^p \, d\lambda + \delta^{1-\frac{p}{r}}2^{r+1}M^r.\end{aligned}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\delta > 0$ ώστε

$$\delta^{1-\frac{p}{r}}2^{r+1}M^r < \frac{\varepsilon^p}{2},$$

και μετά $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|f_n(x) - f(x)|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}$ για κάθε $n \geqslant 0$ και για κάθε $x \in E$. Τότε, για κάθε $n \geqslant 0$ έχουμε

$$\int_0^1 |f_n - f|^p \, d\lambda \leqslant \int_E |f_n - f|^p \, d\lambda + \delta^{1-\frac{p}{r}} 2^{r+1} M^r < \frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2} = \varepsilon^p,$$

δηλαδή $\|f_n - f\|_p < \varepsilon$. Άρα, $\|f_n - f\|_p \to 0$.

11.20. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$. Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ θέτουμε $f_t(x) = f(x+t), x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

(i) Για κάθε t είναι $f_t \in L^1(\mathbb{R})$ και $\int f_t d\lambda = \int f d\lambda$.

(ii) Ισχύει $\lim_{t\to 0} \int |f_t - f| d\lambda = 0$.

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε πρώτα την $f = \chi_E$, όπου E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(E) < \infty$. Έχουμε $f_t(x) = \chi_E(x+t) = \chi_{-t+E}(x)$, άρα $f_t \in L^1(\mathbb{R})$ και

$$\int f_t \, d\lambda = \lambda(-t+E) = \lambda(E) = \int f \, d\lambda.$$

Λόγω γραμμικότητας, συμπεραίνουμε εύκολα ότι αν ϕ είναι μια απλή ολοκληρώσιμη συνάρτηση, τότε για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ισχύει $\phi_t \in L^1(\mathbb{R}$ και

$$\int \phi_t \, d\lambda = \int \phi \, d\lambda.$$

Έστω τώρα $f \in L^1(\mathbb{R})$ με $f \geqslant 0$. Θεωρούμε ακολουθία απλών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων ϕ_n με $\phi_n \nearrow f$. Έστω $t \in \mathbb{R}$. Έχουμε $(\phi_n)_t \in L^1(\mathbb{R}, (\phi_n)_t \nearrow f_t$, και

$$\int (\phi_n)_t \, d\lambda = \int \phi_n \, d\lambda.$$

Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης,

$$\int f_t \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int (\phi_n)_t \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int \phi_n \, d\lambda = \int f \, d\lambda.$$

Έτσι βλέπουμε ότι $f_t \in L^1(\mathbb{R})$ και $\int f_t = \int f$.

Στη γενική περίπτωση, όπου $f \in L^1(\mathbb{R})$, γράφουμε $f = f^+ - f^-$ και εφαρμόζουμε το προηγούμενο για τις ολοκληρώσιμες συναρτήσεις f^+ και f^-.

(β) Έστω $\varepsilon > 0$. Ο χώρος $C_c(\mathbb{R})$ των συνεχών συναρτήσεων με συμπαγή φορέα είναι πυκνός στον $L^1(\mathbb{R}))$, άρα μπορούμε να βρούμε $g \in C_c(\mathbb{R})$ ώστε $\|f - g\|_1 < \varepsilon$. Έστω $K = \text{supp}(g)$. Η g είναι συνεχής, με φορέα το συμπαγές K, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $|x - y| < \delta$ τότε $|g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2\lambda(K)}$. Τότε, για κάθε $|t| < \delta$ έχουμε

$$\|g - g_t\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |g(x) - g(x+t)| \, d\lambda(x) = \int_{K\cup(K-t)} |g(x) - g(x+t)| \, d\lambda(x) < \varepsilon.$$

Τώρα, γράφουμε

$$\|f - f_t\|_1 \leqslant \|f - g\|_1 + \|g - g_t\|_1 + \|g_t - f_t\|_1 < 3\varepsilon,$$

χρησιμοποιώντας και την $\|f - g\|_1 = \|f_t - g_t\|_1$, η οποία ισχύει για κάθε t από το (α).

11.21. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$. Να δείξετε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int f(x)\cos(nx)\,d\lambda(x) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{n\to\infty} \int f(x)\sin(nx)\,d\lambda(x) = 0.$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε αρχικά την περίπτωση όπου $f = \chi_I$ για κάποιο φραγμένο κλειστό διάστημα $I = [a, b]$. Τότε,

$$\int \chi_I(x)\cos(nx)\,d\lambda(x) = \int_a^b \cos(nx)\,dx = \frac{1}{n}(\sin(nb) - \sin(na)) \longrightarrow 0$$

αφού $|\sin(nb) - \sin(na)| \leqslant 2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $I_1, \ldots, I_N$ είναι ξένα ανά δύο φραγμένα κλειστά διαστήματα και $F = I_1 \cup \cdots \cup I_N$ τότε για την $f = \chi_F$ έχουμε

$$\int \chi_F(x)\cos(nx)\,d\lambda(x) = \sum_{j=1}^N \int \chi_{I_j}(x)\cos(nx)\,d\lambda(x) \longrightarrow 0$$

από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος και το προηγούμενο βήμα.

Έστω τώρα E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(E) < \infty$ και $\varepsilon > 0$. Από την πρώτη αρχή του Littlewood μπορούμε να βρούμε $F = I_1 \cup \cdots \cup I_N$ όπως παραπάνω, τέτοιο ώστε $\lambda(E \triangle F) \leqslant \varepsilon$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\left|\int \chi_E(x)\cos(nx)\,d\lambda(x)\right| &\leqslant \left|\int (\chi_E(x) - \chi_F(x))\cos(nx)\,d\lambda(x)\right| + \left|\int \chi_F(x)\cos(nx)\,d\lambda(x)\right| \\
&\leqslant \int |\chi_E(x) - \chi_F(x)|\,d\lambda(x) + \left|\int \chi_F(x)\cos(nx)\,d\lambda(x)\right| \\
&= \lambda(E \triangle F) + \left|\int \chi_F(x)\cos(nx)\,d\lambda(x)\right| \leqslant \varepsilon + \left|\int \chi_F(x)\cos(nx)\,d\lambda(x)\right|.
\end{aligned}$$

Αφήνοντας το $n \to \infty$ και χρησιμοποιώντας το προηγούμενο βήμα, βλέπουμε ότι

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\int \chi_E(x)\cos(nx)\,d\lambda(x)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $\int \chi_E(x)\cos(nx)\,d\lambda(x) \longrightarrow 0$. Τώρα, από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος έπεται ότι για κάθε απλή μετρήσιμη συνάρτηση $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\lambda(\{s \neq 0\}) < \infty$ ισχύει ότι

$$\int s(x)\cos(nx)\,d\lambda(x) \longrightarrow 0.$$

Έστω τώρα $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση και έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε απλή μετρήσιμη συνάρτηση $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\lambda(\{s \neq 0\}) < \infty$, τέτοια ώστε $\int |f - s|\,d\lambda \leqslant \varepsilon$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\left|\int f(x)\cos(nx)\,d\lambda(x)\right| &\leqslant \left|\int (f(x) - s(x))\cos(nx)\,d\lambda(x)\right| + \left|\int s(x)\cos(nx)\,d\lambda(x)\right| \\
&\leqslant \int |f(x) - s(x)|\,d\lambda(x) + \left|\int s\cos(nx)\,d\lambda(x)\right| \\
&\leqslant \varepsilon + \left|\int s(x)\cos(nx)\,d\lambda(x)\right|.
\end{aligned}$$

Αφήνοντας το $n \to \infty$ και χρησιμοποιώντας το προηγούμενο βήμα, βλέπουμε ότι

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\int f(x)\cos(nx)\,d\lambda(x)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι

$$\int f(x)\cos(nx)\,d\lambda(x) \longrightarrow 0.$$

Για τη γενική περίπτωση όπου $f \in L^1(\mathbb{R})$ γράφουμε $f = u + iv$ και εφαρμόζουμε το προηγούμενο αποτέλεσμα για τις u και v.

11.22. Δίνεται μια φραγμένη Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που μηδενίζεται έξω από το $[-1, 1]$. Για κάθε $h > 0$ ορίζουμε τη συνάρτηση $\phi_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$\phi_h(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,d\lambda(t), \quad x \in \mathbb{R}$$

Δείξτε ότι $\|\phi_h\|_2 \leqslant \|f\|_2$ και $\|\phi_h - f\|_2 \to 0$ όταν $h \to 0^+$.

Υπόδειξη. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,d\lambda(t)\right|^2 &= \frac{1}{4h^2}\left(\int_{x-h}^{x+h} f^2(t)\,d\lambda(t)\right)\left(\int_{x-h}^{x+h} 1^2\,d\lambda(t)\right)\\ &= \frac{1}{4h^2}\left(\int_{x-h}^{x+h} f^2(t)\,d\lambda(t)\right)\cdot(2h)\\ &= \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f^2(t)\,d\lambda(t).\end{aligned}$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned}\|\phi_h(f)\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}}\left|\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\ d\lambda(t)\right|^2 d\lambda(x)\\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f^2(t)\,d\lambda(t)\right) d\lambda(x)\\ &= \frac{1}{2h}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\chi[x-h, x+h](t)f^2(t)\,d\lambda(t)\right) d\lambda(x)\\ &= \frac{1}{2h}\int_{\mathbb{R}} f^2(t)\left(\int_{\mathbb{R}}\chi[x-h, x+h](t)\,d\lambda(x)\right) d\lambda(t)\\ &= \frac{1}{2h}\int_{\mathbb{R}} f^2(t)\left(\int_{\mathbb{R}}\chi[t-h, t+h](x)\,d\lambda(x)\right) d\lambda(t)\\ &= \frac{1}{2h}\int_{\mathbb{R}} f^2(t)(2h)\,d\lambda(t)\\ &= \int_{\mathbb{R}} f^2(t)\,d\lambda(t) = \|f\|_2^2.\end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει την $\|\phi_h(f)\|_2 \leqslant \|f\|_2$.

Για το δεύτερο ερώτημα παρατηρούμε πρώτα ότι αν η g είναι συνεχής με συμπαγή φορέα τότε $\phi_h(g) \to g$ ομοιόμορφα καθώς το $h \to 0$ και $\|\phi_h(g) - g\|_2 \to 0$ αφού $\phi_h(g) - g \equiv 0$ έξω από κάποιο κλειστό διάστημα (αν π.χ. $0 < h < 1$). Κατόπιν, θεωρούμε $\varepsilon > 0$ και βρίσκουμε g συνεχή, με συμπαγή φορέα, ώστε $\|f - g\|_2 < \varepsilon$. Παρατηρούμε ότι $\phi_h(f - g) = \phi_h(f) - \phi_h(g)$, και χρησιμοποιώντας το πρώτο ερώτημα γράφουμε

$$\begin{aligned}\|\phi_h(f) - f\|_2 &\leqslant \|\phi_h(f) - \phi_h(g)\|_2 + \|\phi_h(g) - g\|_2 + \|g - f\|_2\\ &= \|\phi_h(f - g)\|_2 + \|\phi_h(g) - g\|_2 + \|g - f\|_2\\ &\leqslant \|\phi_h(g) - g\|_2 + 2\|g - f\|_2 < \|\phi_h(g) - g\|_2 + 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Αφήνοντας το $\varepsilon \to 0^+$ παίρνουμε

$$\limsup_{h\to 0^+} \|\phi_h(f) - f\|_2 \leqslant \lim_{h\to 0^+} \|\phi_h(g) - g\|_2 + 2\varepsilon = 2\varepsilon,$$

και αφήνοντας το $\varepsilon \to 0^+$ έχουμε

$$\limsup_{h\to 0^+} \|\phi_h(f) - f\|_2 = 0,$$

δηλαδή $\|\phi_h(f) - f\|_2 \to 0$.

11.23. Έστω $\{f_n\}$ ακολουθία μη αρνητικών συναρτήσεων στον $L^1(\mathbb{R}^k)$ με $\int f_n d\lambda = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $\delta > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\{x:|x|>\delta\}} f_n\, d\lambda = 0.$$

Δείξτε ότι για κάθε $p > 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p = \infty.$$

Υπόδειξη. Έστω $p > 1$ και q ο συζυγής εκθέτης του, δηλαδή $1/p + 1/q = 1$. Σταθεροποιούμε $\delta > 0$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $g_\delta = \chi_{[-\delta,\delta]}$. Από την ανισότητα Hölder παίρνουμε

$$\begin{aligned}(2\delta)^{1/q}\|f_n\|_p &= \left(\int |g_\delta|^q\, d\lambda\right)^{1/q} \|f_n\|_p \geqslant \left|\int f_n g_\delta\, d\lambda\right|\\ &= \int_{\{x:|x|\leqslant\delta\}} f_n\, d\lambda = \int f_n\, d\lambda - \int \{x : |x| > \delta\} f_n\, d\lambda\\ &= 1 - \int_{\{x:|x|>\delta\}} f_n\, d\lambda.\end{aligned}$$

Από την υπόθεση υπάρχει $n_0 = n_0(\delta) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geqslant n_0$,

$$\int_{\{x:|x|>\delta\}} f_n\, d\lambda < \frac{1}{2}.$$

Συνεπώς, για κάθε $n \geqslant n_0(\delta)$ έχουμε

$$\|f_n\|_p > \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2\delta)^{1/q}}.$$

Έπεται ότι

$$\liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_p \geqslant \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2\delta)^{1/q}}$$

για κάθε $\delta > 0$, και αφήνοντας το $\delta \to 0^+$ παίρνουμε $\liminf_n \|f_n\|_p = +\infty$. Άρα, $\|f_n\|_p \to \infty$.

11.24. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος πιθανότητας και μια $f\in L^p(\mu)$ για κάποιο $p\geqslant 1$. Να δείξετε ότι

$$\log\|f\|_p\geqslant\int\log|f|\,d\mu.$$

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\ln\|f\|_p=\ln\left[\left(\int_X|f|^p\,d\mu\right)^{1/p}\right]=\frac{1}{p}\ln\left(\int_X|f|^p\,d\mu\right),$$

οπότε η ζητούμενη ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\ln\left(\int_X|f|^p\,d\mu\right)\geqslant p\int_X\ln|f|\,d\mu=\int_X p\ln|f|\,d\mu=\int_X\ln(|f|^p)\,d\mu.$$

Θέτοντας $g=|f|^p$ έχουμε ότι η g είναι μη αρνητική, $g\in L^1(\mu)$, και θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\ln\left(\int_X g\,d\mu\right)\geqslant\int_X\ln g,d\mu.$$

Γράφουμε $g=e^h$, όπου $h=\ln g$. Τότε, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\ln\left(\int_X e^h\,d\mu\right)\geqslant\int_X h\,d\mu.$$

Ορίζουμε

$$t_0=\int_X h\,d\mu.$$

Υποθέτουμε ότι $t_0\in\mathbb{R}$ (αν $t_0=-\infty$ δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε, και $t_0<\infty$ διότι $h=\ln g\leqslant g-1$ και η $g-1$ είναι ολοκληρώσιμη στο X). Η συνάρτηση $u(t):=e^t$ είναι κυρτή, άρα για κάθε $t\in\mathbb{R}$ έχουμε

$$e^t-e^{t_0}=u(t)-u(t_0)\geqslant u'(t)(t-t_0)=e^{t_0}(t-t_0).$$

Δηλαδή,

$$e^{h(x)}-e^{t_0}\geqslant e^{t_0}(h(x)-t_0).$$

Ολοκληρώνοντας στο X και χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι $\mu(X)=1$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_X e^{h(x)}\,d\mu(x)-\int_X e^{t_0}\,d\mu(x)&\geqslant e^{t_0}\left[\int_X h(x)\,d\mu(x)-\int_X t_0\,d\mu(x)\right]\\&=e^{t_0}\left[t_0-t_0\mu(X)\right]=0.\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\int_X e^{h(x)}\,d\mu(x)\geqslant\int_X e^{t_0}\,d\mu(x)=e^{t_0},$$

απ¨ όπου έπεται ότι

$$\ln\left(\int_X e^{h(x)}\,d\mu(x)\right)\geqslant t_0=\int_X h\,d\mu.$$

11.25. Έστω E,F Lebesgue μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}$, με $\lambda(E)<\infty$.

(i) Δείξτε ότι η $\chi_E * \chi_F$ είναι συνεχής συνάρτηση.

(ii) Δείξτε ότι $n \cdot (\chi_E * \chi_{[0,1/n]}) \to \chi_E$ σχεδόν παντού καθώς $n \to \infty$.

Υπόδειξη. (i) Γράφουμε

$$\begin{aligned}|(\chi_E * \chi_F)(x) - (\chi_E * \chi_F)(y)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} [\chi_E(x-z) - \chi_E(y-z)]\chi_F(z)\, d\lambda(z) \right| \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}} |\chi_E(x-z) - \chi_E(y-z)|\, d\lambda(z).\end{aligned}$$

Αν θέσουμε $f(z) = \chi_E(x-z)$, τότε $\chi_E(y-z) = \chi_E(x-z-(x-y) = f(z+(x-y)) = f_{x-y}(z)$. Αφού $\lambda(E) < \infty$, έχουμε $f \in L^1(\mathbb{R})$. Από γνωστή πρόταση έπεται ότι

$$\lim_{y\to x} \int_{\mathbb{R}} |\chi_E(x-z) - \chi_E(y-z)|\, d\lambda(z) = \lim_{x\to y} \int_{\mathbb{R}} |f - f_{x-y}|\, d\lambda = 0.$$

(ii) *Με χρήση του θεωρήματος παραγώγισης του Lebesgue:* Παρατηρήστε ότι

$$\chi_E(x) = n \int_{\mathbb{R}} \chi_E(x)\chi_{[0,1/n]}(z)\, d\lambda(z).$$

Από το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue έχουμε

$$\begin{aligned}|n(\chi_E * \chi_{[0,1/n]})(x) - \chi_E(x)| &= \left| n \int_{\mathbb{R}} [\chi_E(x-z) - \chi_E(x)]\chi_{[0,1/n]}(z)\, d\lambda(z) \right| \\ &\leqslant \frac{1}{1/n} \int_{[0,1/n]} |\chi_E(x-z) - \chi_E(x)| d\lambda(z) \\ &= \frac{1}{1/n} \int_{[x-1/n,x]} |\chi_E(t) - \chi_E(x)| d\lambda(t) \to \chi_E(x)\end{aligned}$$

για κάθε σημείο Lebesgue x της χ_E, δηλαδή σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$.

11.26. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος $\sigma-$πεπερασμένου μέτρου και $g : X \to \mathbb{C}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι για κάθε $f \in L^1(\mu)$ ισχύει και $f \cdot g \in L^1(\mu)$. Να δείξετε ότι $f \in L^\infty(\mu)$.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι $g \notin L^\infty(\mu)$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\mu(A_n) > 0$, όπου $A_n = \{x : |g(x)| \geqslant n\}$. Ορίζουμε

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\mu(A_n)} \mathrm{sign}(g(x))\chi_{A_n}(x).$$

Παρατηρούμε ότι

$$|f(x)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\mu(A_n)} \chi_{A_n}(x),$$

και, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Beppo Levi, ότι

$$\begin{aligned}\int_X |f(x)|\, d\mu(x) &\leqslant \int_X \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\mu(A_n)} \chi_{A_n}(x)\, d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \frac{1}{n^2\mu(A_n)} \chi_{A_n}(x)\, d\mu(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\mu(A_n)} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.\end{aligned}$$

Άρα, $f \in L^1(X)$. Όμως,

$$\begin{aligned}
\int_X f(x)g(x)\,d\mu(x) &= \int_X |g(x)| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\mu(A_n)}\chi_{A_n}(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \frac{1}{n^2\mu(A_n)}\chi_{A_n}(x)|g(x)|\,d\mu(x) \\
&\geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_X n\frac{1}{n^2\mu(A_n)}\chi_{A_n}(x)\,d\mu(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{1}{n^2\mu(A_n)}\mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,
\end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση.

11.27. Έστω $1 \leqslant p < \infty$ και $f \in L^p[0,1]$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$f_n = 2^n \sum_{k=1}^{2^n} a_{n,k}(f)\chi_{J_{n,k}},$$

όπου $J_{n,k} = \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)$ και $a_{n,k}(f) = \int_{J_{n,k}} f\,d\lambda$. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0.$$

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι $1 < p < \infty$. Δείχνουμε πρώτα ότι $\|f - f_n\|_p \leqslant 4\|f\|_p$. Αν q είναι ο συζυγής εκθέτης του p, έχουμε

$$\begin{aligned}
\|f - f_n\|_p^p &= \sum_{k=1}^{2^n} \int_{J_{n,k}} \left|f(x) - 2^n a_{n,k}(f)\right|^p\,d\lambda(x) \\
&= \sum_{k=1}^{2^n} 2^{np} \int_{J_{n,k}} \left|\int_{J_{n,k}} (f(x) - f(y))\,d\lambda(y)\right|^p\,d\lambda(x) \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{2^n} 2^{np} \int_{J_{n,k}} \left(\int_{J_{n,k}} |f(x) - f(y)|^p\,d\lambda(y)[\lambda(J_{n,k})]^{p/q}\right)d\lambda(x) \\
&= \sum_{k=1}^{2^n} 2^{np}\cdot 2^{-np/q} \int_{J_{n,k}}\int_{J_{n,k}} |f(x) - f(y)|^p\,d\lambda(y)\,d\lambda(x) \\
&= \sum_{k=1}^{2^n} 2^{n} \int_{J_{n,k}}\int_{J_{n,k}} |f(x) - f(y)|^p\,d\lambda(y)\,d\lambda(x).
\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\|f-f_n\|_p^p &\leqslant \sum_{k=1}^{2^n} 2^n \int_{J_{n,k}} \int_{J_{n,k}} 2^p(|f(x)|^p+|f(y)|^p)\,d\lambda(y)\,d\lambda(x)\\
&= \sum_{k=1}^{2^n} 2^n 2^p \cdot 2\lambda(J_{n,k}) \int_{J_{n,k}} |f(x)|^p\,d\lambda(x)\\
&= 2^{p+1} \sum_{k=1}^{2^n} \int_{J_{n,k}} |f(x)|^p\,d\lambda(x)\\
&= 2^{p+1}\|f\|_p^p \leqslant 4^p\|f\|_p^p.
\end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει την $\|f-f_n\|_p \leqslant 4\|f\|_p$.

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι αν η g είναι συνεχής και αν ορίσουμε αντίστοιχα τις g_n, τότε $\|g-g_n\|_p \to 0$. Πράγματι, για το τυχόν $\varepsilon>0$ μπορούμε να βρούμε $\delta>0$ ώστε αν $x,y\in[0,1]$ και $|x-y|\leqslant\delta$ να έχουμε $|g(x)-g(y)|\leqslant\varepsilon$. Βρίσκουμε $n_0\in\mathbb{N}$ με $1/2^{n_0}\leqslant\delta$, και για κάθε $n\geqslant n_0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\|g-g_n\|_p^p &= \sum_{k=1}^{2^n} \int_{J_{n,k}} \left|g(x)-2^n a_{n,k}(g)\right|^p\,d\lambda(x)\\
&= \sum_{k=1}^{2^n} 2^{np} \int_{J_{n,k}} \left|\int_{J_{n,k}} (g(x)-g(y))\,d\lambda(y)\right|^p\,d\lambda(x)\\
&ls \sum_{k=1}^{2^n} 2^{np} \int_{J_{n,k}} \left(\int_{J_{n,k}} |g(x)-g(y)|^p\,d\lambda(y)[\lambda(J_{n,k})]^{p/q}\right)d\lambda(x)\\
&\leqslant \sum_{k=1}^{2^n} 2^{np} \int_{J_{n,k}} \lambda(J_{n,k})\varepsilon^p\,2^{-np/q}\,d\lambda(x)\\
&= 2^n 2^{np}(2^{-n})^2\varepsilon^p\,2^{-np/q} = \varepsilon^p,
\end{aligned}$$

δηλαδή $\|g-g_n\|_p\leqslant\varepsilon$.

Θεωρούμε τώρα $f\in L^p[0,1]$ και για τυχόν $\varepsilon>0$ βρίσκουμε συνεχή g με $\|f-g\|_p\leqslant\varepsilon$. Παρατηρήστε ότι $a_{k,n}(f-g)=a_{k,n}(f)-a_{k,n}(g)$, άρα $(f-g)_n=f_n-g_n$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\|f-f_n\|_p &\leqslant \|f-g\|_p+\|g-g_n\|_p+\|g_n-f_n\|_p\\
&\leqslant \|f-g\|_p+\|g-g_n\|_p+\|(g_n-f_n)-(g-f)\|_p+\|g-f\|_p\\
&= \|f-g\|_p+\|g-g_n\|_p+\|(g-f)_n-(g-f)\|_p+\|g-f\|_p\\
&\leqslant \|f-g\|_p+\|g-g_n\|_p+4\|g-f\|_p+\|g-f\|_p\\
&\leqslant 6\varepsilon+\|g-g_n\|_p.
\end{aligned}$$

Αφήνοντας το $n\to\infty$ παίρνουμε

$$\limsup_{n\to\infty}\|f-f_n\|_p \leqslant \lim_{n\to\infty}\|g-g_n\|_p+6\varepsilon=6\varepsilon,$$

και αφήνοντας το $\varepsilon\to 0^+$ έχουμε

$$\limsup_{n\to\infty}\|f-f_n\|_p=0,$$

δηλαδή $\|f - f_n\|_p \to 0$.

11.28. Έστω $1 < p < \infty$ και μια συνάρτηση $f \in L^p[0,\infty)$. Δείξτε ότι

$$\left|\int_0^x f(t)\,d\lambda(t)\right| \leqslant \|f\|_p x^{1-\frac{1}{p}}$$

για κάθε $x > 0$ και ότι

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{1-\frac{1}{p}}} \int_0^x f(t)\,d\lambda(t) = 0.$$

Υπόδειξη. Έστω q ο συζυγής εκθέτης του p και έστω $x > 0$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder γράφουμε

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x f(t)\,d\lambda(t)\right| &\leqslant \int_0^x |f(t)|\,d\lambda(t) = \int_0^\infty |f(t)|\chi_{[0,x]}(t)\,d\lambda(t)\\ &\leqslant \|f\|_p\|\chi_{[0,x]}\|_q = \|f\|_p x^{1/q} = \|f\|_p x^{1-\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε την

$$\begin{aligned}\|\chi_{[0,x]}\|_q &= \left(\int_0^\infty \chi_{[0,x]}^q\,d\lambda\right)^{1/q}\\ &= \left(\int_0^\infty \chi_{[0,x]}\,d\lambda\right)^{1/q} = [\lambda([0,x])]^{1/q} = x^{1/q}.\end{aligned}$$

Για το δεύτερο ερώτημα, θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και επιλέγουμε $\alpha = \alpha(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|f\chi_{[\alpha,\infty)}\|_p = \left(\int_\alpha^\infty |f|^p\,d\lambda\right)^{1/p} < \varepsilon.$$

Μπορούμε να βρούμε τέτοιον α, διότι $|f|^p\chi_{[0,\alpha]} \nearrow |f|^p$ καθώς το $\alpha \to \infty$, και από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_\alpha^\infty |f|^p\,d\lambda = \lim_{\alpha\to\infty}\left(\int_0^\infty |f|^p\,d\lambda - \int_0^\alpha |f|^p\,d\lambda\right) = 0.$$

Για κάθε $x > \alpha$ μπορούμε να γράψουμε

$$(*)\qquad \frac{1}{x^{1/q}}\left|\int_0^x f(t)\,d\lambda(t)\right| \leqslant \frac{1}{x^{1/q}}\int_0^\alpha |f(t)|\,d\lambda(t) + \frac{1}{x^{1/q}}\int_\alpha^x |f(t)|\,d\lambda(t).$$

Από την επιλογή του α έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^{1/q}}\int_\alpha^x |f(t)|\,d\lambda(t) &\leqslant \frac{1}{x^{1/q}}\|f\chi_{[\alpha,x]}\|_p\|\chi_{[\alpha,x]}\|_q\\ &= \frac{(x-\alpha)^{1/q}}{x^{1/q}}\|f\chi_{[\alpha,x]}\|_p < \|f\chi_{[\alpha,x]}\|_p\\ &\leqslant \|f\chi_{[\alpha,\infty)}\|_p < \varepsilon\end{aligned}$$

για κάθε $x > \alpha$, άρα η $(*)$ δίνει

$$\frac{1}{x^{1/q}}\left|\int_0^x f(t)\,d\lambda(t)\right| \leqslant \frac{1}{x^{1/q}}\int_0^\alpha |f(t)|\,d\lambda(t) + \varepsilon$$

για κάθε $x > \alpha$. Όμως,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{1/q}} \int_0^{\alpha} |f(t)|\, d\lambda(t) = 0,$$

άρα

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{1}{x^{1/q}} \left| \int_0^{x} f(t)\, d\lambda(t) \right| \leqslant 0 + \varepsilon = \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν,

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{1}{x^{1/q}} \left| \int_0^{x} f(t)\, d\lambda(t) \right| = 0,$$

και έπεται το ζητούμενο.

11.29. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $c_1, c_2, \ldots, c_m > 0$ με $c_1 + c_2 + \ldots + c_m = 1$. Να δείξετε ότι αν $f_1, f_2, \ldots, f_m : X \to \mathbb{C}$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις, τότε

$$\int \left(\prod_{i=1}^m |f_i|^{c_i} \right) d\mu \leqslant \prod_{i=1}^m \left(\int |f_i|\, d\mu \right)^{c_i}.$$

Υπόδειξη. Αν $\int_X |f_i|\, d\mu = 0$ για κάποιο $i = 1, \ldots, m$, τότε $f_i = 0$ σχεδόν παντού, άρα $\prod_{i=1}^m |f_i|^{c_i} = 0$ σχεδόν παντού, και τα δύο μέλη της ζητούμενης ανισότητας είναι ίσα με μηδέν.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\int_X |f_i|\, d\mu > 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, m$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$g_i = \frac{1}{\int_X |f_i|\, d\mu} f_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Τότε, $\int_X |g_i|\, d\mu = 1$ για κάθε $i = 1, \ldots, m$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $x \mapsto \ln x$ είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$ και την $\sum_{j=1}^m c_j = 1$ βλέπουμε ότι (αν $|g_i(x)| > 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, m$)

$$\begin{aligned} \ln(|g_1(x)|^{c_1} |g_2(x)|^{c_2} \cdots |g_m(x)|^{c_m}) &= c_1 \ln(|g_1(x)|) + c_2 \ln(|g_2(x)|) + \cdots + c_m \ln(|g_m(x)|) \\ &\leqslant \ln(c_1|g_1(x)| + c_2|g_2(x)| + \cdots + c_m|g_m(x)|), \end{aligned}$$

δηλαδή

$$|g_1(x)|^{c_1} |g_2(x)|^{c_2} \cdots |g_m(x)|^{c_m} \leqslant c_1|g_1(x)| + c_2|g_2(x)| + \cdots + c_m|g_m(x)|.$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει προφανώς και στην περίπτωση που $g_i(x) = 0$ για κάποιο i. Ολοκληρώνοντας, παίρνουμε

$$\int_X \left(\prod_{i=1}^m |g_i|^{c_i} \right) d\mu \leqslant c_1 \int_X |g_1|\, d\mu + \cdots + c_m \int_X |g_m|\, d\mu = c_1 + \cdots + c_m = 1.$$

Αφού

$$\prod_{i=1}^m |g_i|^{c_i} = \frac{\prod_{i=1}^m |f_i|^{c_i}}{\prod_{i=1}^m \left(\int_X |f_i|\, d\mu \right)^{c_i}},$$

έπεται ότι

$$\int_X \left(\prod_{i=1}^m |f_i|^{c_i} \right) d\mu \leqslant \prod_{i=1}^m \left(\int_X |f_i|\, d\mu \right)^{c_i}.$$

11.30. Υποθέτουμε ότι $f \in L^p(\mathbb{R})$ για κάθε $1 \leqslant p < 2$ και επιπλέον ότι

$$\sup_{1\leqslant p<2} \|f\|_p < +\infty.$$

Δείξτε ότι $f \in L^2(\mathbb{R})$ και

$$\|f\|_2 = \lim_{p\to 2^-} \|f\|_p.$$

Υπόδειξη. Από την υπόθεση υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^p \, d\lambda \leqslant M^p$$

για κάθε $p \in [1,2)$. Άρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^{2-1/n} \, d\lambda \leqslant M^{2-1/n}.$$

Από το λήμμα του Fatou και από το γεγονός ότι $|f|^{2-1/n} \to |f|^2$ σχεδόν παντού, παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^2 \, d\lambda \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f|^{2-1/n} \, d\lambda \leqslant \liminf M^{2-1/n} = M^2 < \infty.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Για να δείξουμε ότι $\lim_{p\to 2^-} \|f\|_p = \|f\|_2$ αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $p_n \in [1,2)$ με $p_n \uparrow 2$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \|f\|_{p_n} = \|f\|_2.$$

Για το σκοπό αυτό αρκεί να δείξουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^{p_n} \, d\lambda \to \int_{\mathbb{R}} |f|^2 \, d\lambda.$$

Κατόπιν, θα έχουμε

$$\|f\|_{p_n} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^{p_n} \, d\lambda \right)^{\frac{1}{p_n}} \to \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^2 \, d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_2$$

διότι $\frac{1}{p_n} \to \frac{1}{2}$. Θεωρούμε τις ακολουθίες συναρτήσεων $f_n = |f|^2 \chi_{\{|f|<1\}} + |f|^{p_n} \chi_{\{|f|\geqslant 1\}}$ και $g_n = |f|^2 \chi_{\{|f|\geqslant 1\}} + |f|^{p_n} \chi_{\{|f|<1\}}$, και παρατηρούμε ότι:

(α) $f_n \leqslant |f|^{p_n} \leqslant g_n$ για κάθε n, άρα

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f|^{p_n} \, d\lambda \leqslant \int_{\mathbb{R}} g_n \, d\lambda.$$

(β) Η (f_n) είναι αύξουσα (διότι η (p_n) είναι αύξουσα) και $f_n \nearrow |f|^2$ σχεδόν παντού, άρα, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έπεται ότι

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda \to \int_{\mathbb{R}} |f|^2 \, d\lambda.$$

(γ) Η (g_n) είναι φθίνουσα και $g_n \searrow |f|^2$ σχεδόν παντού. Επίσης, έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}} g_1 \, d\lambda \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f|^2 \, d\lambda + \int_{\mathbb{R}} |f|^{p_1} \, d\lambda \leqslant M^2 + M^{p_1} < \infty,$$

άρα, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης για την $(g_1 - g_n)$,

$$\int_{\mathbb{R}} g_n \, d\lambda \to \int_{\mathbb{R}} |f|^2 \, d\lambda.$$

Από τα (α), (β), (γ) και από το κριτήριο ισοσυγκλινουσών ακολουθιών συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^{p_n} \, d\lambda \to \int_{\mathbb{R}} |f|^2 \, d\lambda.$$

11.31. Έστω $f \in L^1[0,1]$ με την εξής ιδιότητα: υπάρχει $C > 0$ ώστε

$$\int_A |f| \, d\lambda \leqslant C \sqrt{\lambda(A)}$$

για κάθε Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο $A \subseteq [0,1]$. Δείξτε ότι $f \in L^p[0,1]$ για κάθε $1 \leqslant p < 2$. Είναι αναγκαστικά η f στον $L^2[0,1]$;

Υπόδειξη. Από την υπόθεση και από την ανισότητα Markov, αν $A_t = \{|f| \geqslant t\}$, $t > 0$, έχουμε

$$t\lambda(A_t) \leqslant \int_{A_t} |f| \, d\lambda \leqslant C \sqrt{\lambda(A_t)},$$

δηλαδή

$$\lambda(A_t) \leqslant \frac{C^2}{t^2}.$$

Έστω $1 \leqslant p < 2$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f|^p &= \int_0^\infty pt^{p-1}\lambda(\{|f| \geqslant t\}) \, d\lambda(t) \\
&= \int_0^1 pt^{p-1}\lambda(\{|f| \geqslant t\}) \, d\lambda(t) + \int_1^\infty pt^{p-1}\lambda(\{|f| \geqslant t\}) \, d\lambda(t) \\
&\leqslant \int_0^1 pt^{p-1} d\lambda(t) + \int_1^\infty pt^{p-1} + C^2 p \int_1^\infty t^{p-3} d\lambda(t) < \infty
\end{aligned}$$

διότι $p - 3 < -1$. Άρα, $f \in L^p([0,1])$.

11.32. Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη, $E = \mathrm{supp}(f)$ για την οποία ισχύει

$$(*). \qquad \int_E \exp(f(x)) \, d\lambda(x) = 1$$

Αποδείξτε ότι $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ για κάθε $1 \leqslant p < \infty$ και $\|f\|_p \leqslant Cp$, όπου $C > 0$ μια απόλυτη σταθερά. Δώστε παράδειγμα μιας μετρήσιμης συνάρτησης f που ικανοποιεί την $(*)$ αλλά $f \notin L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(t) = t^p e^{-t}$, $t > 0$. Έχουμε $g'(t) = (pt^{p-1} - t^p)e^{-t}$, άρα η g έχει μέγιστο στο $t_0 = p$. Δηλαδή,

$$t^p \leqslant \frac{p^p}{e^p} e^t$$

για κάθε $t > 0$. Τότε,

$$\int |f|^p \leqslant \frac{p^p}{e^p} \int \exp(|f(x)|) \, d\lambda(x) = \frac{p^p}{e^p},$$

άρα
$$\|f\|_p \leqslant \frac{1}{e}p.$$
Για το δεύτερο ερώτημα, ένα παράδειγμα μπορεί να είναι η $f(x) = c + \ln \frac{1}{\sqrt{x}}$ στο $(0,1)$, όπου το $c \in \mathbb{R}$ επιλέγεται έτσι ώστε
$$\int_0^1 e^{f(x)} d\lambda(x) = e^c \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} d\lambda(x) = e^c \cdot 2 = 1.$$
Η f δεν είναι φραγμένη, αφού $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

11.33. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{C}$. Ορίζουμε το *ουσιώδες πεδίο τιμών* της f να είναι το σύνολο R_f όλων των $a \in \mathbb{C}$ για τα οποία ισχύει το εξής: για κάθε $\varepsilon > 0$
$$\mu(\{x \in X : |f(x) - a| < \varepsilon\}) > 0.$$

(i) Να δείξετε ότι το R_f είναι κλειστό σύνολο.

(ii) Αν $f \in L^\infty$ να δείξετε ότι το R_f είναι συμπαγές και $\|f\|_\infty = \max\{|a| : \ a \in R_f\}$.

Υπόδειξη. (α) Έστω $a_n \in R_f$ με $a_n \to a \in \mathbb{C}$. Για κάθε n και $\delta > 0$ θέτουμε $G_n(\delta) = \{x \in X : |f(x) - a_n| < \delta\}$. Από την υπόθεση, $\mu(G_n(\delta)) > 0$ για κάθε n και $\delta > 0$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Ορίζουμε $G(\varepsilon) = \{x \in X : |f(x) - a| < \varepsilon\}$. Αφού $a_n \to a$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|a - a_{n_0}| < \frac{\varepsilon}{2}$. Παρατηρούμε ότι αν $x \in G_{n_0}(\varepsilon/2)$ τότε
$$|f(x) - a| \leqslant |f(x) - a_{n_0}| + |a_{n_0} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$
δηλαδή $x \in G(\varepsilon)$. Άρα, $G(\varepsilon) \supseteq G_{n_0}(\varepsilon/2)$ και συμπεραίνουμε ότι
$$\mu(G(\varepsilon)) \geqslant \mu(G_{n_0}(\varepsilon/2)) > 0.$$
Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έχουμε $a \in R_f$, και αυτό δείχνει ότι το R_f είναι κλειστό σύνολο.

(β) Υποθέτοντας ότι $f \in L^\infty$ θα δείξουμε ότι το R_f είναι φραγμένο, και από το (α) θα έχουμε ότι το R_f είναι συμπαγές. Θεωρούμε $a \in \mathbb{C}$ με $|a| > \|f\|_\infty$ και επιλέγουμε $0 < \varepsilon < |a| - \|f\|_\infty$. Παρατηρούμε ότι αν $|f(x) - a| < \varepsilon$ τότε
$$|a| < |f(x) - a| + |f(x)| < \varepsilon + |f(x)| < |a| - \|f\|_\infty + |f(x)|,$$
δηλαδή $|f(x)| > \|f\|_\infty$. Συνεπώς, γι' αυτόν τον ε έχουμε
$$\mu(G(\varepsilon)) \leqslant \mu(\{|f| > \|f\|_\infty\}) = 0.$$
Έπεται ότι $a \notin R_f$. Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι αν $|a| < -\|f\|_\infty$ τότε $a \notin R_f$. Συνεπώς,
$$R_f \subseteq \{a \in \mathbb{C} : |a| \leqslant \|f\|_\infty\}.$$

Έπεται επίσης ότι $\max\{|a| : a \in R_f\} \leqslant \|f\|_\infty$. Αν υποθέσουμε ότι $\pm\|f\|_\infty \notin R_f$, τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε
$$\mu(\{x \in X : |f(x) - \|f\|_\infty| < \varepsilon\}) = 0$$
και
$$\mu(\{x \in X : |f(x) - \|f\|_\infty| < \varepsilon\}) = 0.$$

Δηλαδή, σχεδόν παντού έχουμε

$$\|f\|_\infty - f(x) = |f(x) - \|f\|_\infty| \geqslant \varepsilon$$

και

$$\|f\|_\infty + f(x) = |f(x) + \|f\|_\infty| \geqslant \varepsilon.$$

Τότε, σχεδόν παντού έχουμε

$$-(\|f\|_\infty - \varepsilon) \leqslant f(x) \leqslant \|f\|_\infty - \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad |f(x)| \leqslant \|f\|_\infty - \varepsilon,$$

το οποίο σημαίνει ότι $\|f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty - \varepsilon$, και έχουμε άτοπο. Άρα, τουλάχιστον ένας από τους $\pm\|f\|_\infty$ ανήκει στο R_f και έχουμε $\max\{|a| : a \in R_f\} \leqslant \|f\|_\infty$.

11.34. Έστω $0 < p < 1$. Ορίζουμε τον (αρνητικό αυτή τη φορά) *συζυγή εκθέτη* q του p από τη σχέση $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Αν $f, g : X \to [0, \infty]$ να δείξετε ότι ισχυουν οι εξής:

$$\int fg\, d\mu \geqslant \left(\int f^p\, d\mu\right)^{1/p} \left(\int g^q\, d\mu\right)^{1/q}$$

$$\left(\int (f+g)^p\, d\mu\right)^{1/p} \geqslant \left(\int f^p\, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int g^p\, d\mu\right)^{1/p}.$$

Υπόδειξη. Εφαρμόζοντας την ανισότητα Hölder για τις $(fg)^p$ και g^{-p} με εκθέτες $r = \frac{1}{p}$ και $s = \frac{1}{1-p}$, γράφουμε

$$\begin{aligned}\int f^p\, d\mu &= \int (fg)^p g^{-p}\, d\mu \\ &\leqslant \left(\int fg\, d\mu\right)^p \left(\int (g^{-p})^{\frac{1}{1-p}}\right)^{1-p} \\ &= \left(\int fg\, d\mu\right)^p \left(\int g^q\right)^{-\frac{p}{q}},\end{aligned}$$

διότι $-\frac{p}{1-p} = q$ και $1 - p = -\frac{p}{q}$ αφού οι p και q είναι συζυγείς εκθέτες. Έπεται ότι

$$\left(\int fg\, d\mu\right)^p \leqslant \left(\int f^p\, d\mu\right)\left(\int g^q\right)^{\frac{p}{q}},$$

και υψώνοντας στην $1/p$ παίρνουμε το ζητούμενο.

Για την δεύτερη ανισότητα χρησιμοποιούμε την ανισότητα, χρησιμοποιώντας την προηγούμενη γράφουμε

$$\left(\int f^p\, d\mu\right)^{1/p} \left(\int (f+g)^{-(1-p)q}\, d\mu\right)^{1/q} \leqslant \int f(f+g)^{-(1-p)}\, d\mu$$

και

$$\left(\int g^p\, d\mu\right)^{1/p} \left(\int (f+g)^{-(1-p)q}\, d\mu\right)^{1/q} \leqslant \int g(f+g)^{-(1-p)}\, d\mu.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$\left[\left(\int f^p\,d\mu\right)^{1/p}+\left(\int g^p\,d\mu\right)^{1/p}\right]\left(\int (f+g)^{-(1-p)q}\,d\mu\right)^{1/q}$$
$$\leqslant \int (f+g)(f+g)^{-(1-p)}\,d\mu=\int (f+g)^p\,d\mu.$$

Αφού $-(1-p)q=p$, καταλήγουμε στην

$$\left(\int f^p\,d\mu\right)^{1/p}+\left(\int g^p\,d\mu\right)^{1/p}\leqslant\left(\int (f+g)^p\,d\mu\right)^{1-1/q}$$
$$=\left(\int (f+g)^p\,d\mu\right)^{1/p}.$$

11.35. Δείξτε ότι αν $1\leqslant p<q\leqslant\infty$, τότε ο $L^q[0,1]$ είναι πρώτης κατηγορίας υποσύνολο του $L^p[0,1]$.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder βλέπουμε ότι αν $1\leqslant p<q\leqslant\infty$ τότε $\|f\|_p\leqslant\|f\|_q$ για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$. Άρα, για κάθε $f\in L^q[0,1]$ έχουμε $f\in L^p[0,1]$. Δηλαδή, $L^q[0,1]\subseteq L^p[0,1]$.

Θεωρούμε την ακολουθία συνόλων $F_n=\{f\in L^p[0,1]:\|f\|_q\leqslant n\}$. Προφανώς ισχύει

$$L^q[0,1]=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι κάθε F_n είναι πουθενά πυκνό υποσύνολο του $L^p[0,1]$. Παρατηρούμε τα εξής:

(α) Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ το F_n είναι $\|\cdot\|_p$–κλειστό. Πράγματι, αν (f_k) είναι μια ακολουθία στο F_n, δηλαδή $\|f_k\|_q\leqslant n$ για κάθε $k\in\mathbb{N}$, και αν $\|f_k-f\|_p\to 0$, τότε μπορούμε να δείξουμε ότι $\|f\|_q\leqslant n$: αφού $f_k\xrightarrow{L^p}f$, από την ανισότητα Markov έχουμε

$$\lambda(|f_k-f|>\varepsilon)\leqslant\varepsilon^{-p}\|f_k-f\|_p^p,$$

άρα $f_k\xrightarrow{\lambda}f$ κατά μέτρο. Άρα, υπάρχει υπακολουθία (f_{k_s}) της (f_k) ώστε $f_{k_s}\to f$ σχεδόν παντού. Έπεται ότι $|f_{k_s}|^q\to|f|^q$ και από το λήμμα του Fatou παίρνουμε

$$\int |f|^q\,d\lambda\leqslant\liminf_{s\to\infty}\int |f_{k_s}|^q\,d\lambda\leqslant n^q,$$

διότι $\|f_{k_s}\|_q\leqslant n$. Άρα, $f\in F_n$.

(β) Το F_n έχει κενό εσωτερικό: για κάθε $f\in F_n$ και για κάθε $\varepsilon>0$ ισχύει

$$B(f,\varepsilon)=\{g\in L^p[0,1]:\|f-g\|_p<\varepsilon\}\nsubseteq F_n.$$

Πράγματι, σταθεροποιούμε $f\in F_n$ και $\varepsilon>0$. Επιλέγουμε $\alpha\in(1/q,1/p)$ και ορίζουμε τη συνάρτηση

$$h(t)=\frac{\varepsilon(1-\alpha p)^{1/p}}{2t^{\alpha}},$$

η οποία ανήκει στον $L^p[0,1]\setminus L^q[0,1]$ (ελέγξτε το). Άρα, η συνάρτηση $f+h\in L^p[0,1]$ και μάλιστα

$f + h \in B(f, \varepsilon)$ διότι $\|h\|_p = \varepsilon/2$, αλλά $f + h \notin F_n$, αφού $h \notin L^q[0, 1]$.

Κεφάλαιο 12

Συμπληρωματικές Ασκήσεις

12.1. (α) Έστω $(X,\mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και (A_n), (B_n) δύο ακολουθίες συνόλων στην $\mathcal{A}$. Αποδείξτε ότι

$$\limsup A_n \cap \limsup B_n \supseteq \limsup (A_n \cap B_n) \quad \text{και} \quad \limsup A_n \cup \limsup B_n = \limsup (A_n \cup B_n).$$

Ποιες είναι οι αντίστοιχες σχέσεις για το $\liminf$;

(β) Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών και $A_n = (-\infty, a_n)$. Αποδείξτε ότι

$$(-\infty, \liminf a_n) \subseteq \liminf A_n \subseteq (-\infty, \liminf a_n] \quad \text{και} \quad (-\infty, \limsup a_n) \subseteq \limsup A_n \subseteq (-\infty, \limsup a_n].$$

Αποδείξτε ότι αν $\liminf A_n = \limsup A_n$ τότε το $\lim a_n$ υπάρχει (και ενδεχομένως είναι $\pm\infty$) αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά.

Υπόδειξη. (α) Αν $x \in \limsup (A_n \cap B_n)$ τότε υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών (k_n) τέτοια ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $x \in A_{k_n} \cap B_{k_n}$. Αφού $x \in A_{k_n}$ για κάθε n (το x ανήκει σε άπειρα από τα A_n) έχουμε $x \in \limsup A_n$. Ομοίως, $x \in \limsup B_n$. Άρα, $x \in \limsup A_n \cap \limsup B_n$.

Για την δεύτερη ισότητα παρατηρούμε αρχικά ότι

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} (A_k \cup B_k) \right) = \limsup (A_n \cup B_n)$$

και όμοια $\limsup B_n \subseteq \limsup (A_n \cup B_n)$. Άρα, αρκεί να δείξουμε τον εγκλεισμό $\limsup A_n \cup \limsup B_n \supseteq \limsup (A_n \cup B_n)$. Έστω $x \in \limsup (A_n \cup B_n)$. Το σύνολο $J = \{n \in \mathbb{N} : x \in A_n \cup B_n\}$ είναι άπειρο, άρα κάποιο από τα $J_1 = \{n \in \mathbb{N} : x \in A_n\}$ και $J_2 = \{n \in \mathbb{N} : x \in B_n\}$ είναι άπειρο. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε $x \in \limsup A_n$ και στη δεύτερη $x \in \limsup B_n$, άρα $x \in \limsup A_n \cup \limsup B_n$.

(β) Έστω $x < \liminf a_n$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $x < a_n$, δηλαδή $x \in A_n$, για κάθε $n \geqslant n_0$. Συνεπώς, $x \in \liminf A_n$. Αυτό αποδεικνύει ότι $(-\infty, \liminf a_n) \subseteq \liminf A_n$. Αντίστροφα, έστω $x \in \liminf A_n$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $x < a_n$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Από τον Απειροστικό Λογισμό γνωρίζουμε ότι τότε $x \leqslant \liminf a_n$. Αυτό αποδεικνύει ότι $\liminf A_n \subseteq (-\infty, \liminf a_n]$. Οι αντίστοιχοι ισχυρισμοί για το $\limsup$ αποδεικνύονται με παρόμοιο τρόπο.

Υποθέτουμε τώρα ότι $\liminf A_n = \limsup A_n$. Από τα προηγούμενα έχουμε

$$(-\infty, \limsup a_n) \subseteq \limsup A_n = \liminf A_n \subseteq (-\infty, \liminf a_n],$$

άρα $\limsup a_n \leqslant \liminf a_n$ (ελέγξτε την περίπτωση που είναι $\pm\infty$). Άρα, υπάρχει το $\lim a_n$.

Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά. Αν θεωρήσουμε την $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ τότε $a_n \to 0$ αλλά $0 \in \limsup A_n$ και $0 \notin \liminf A_n$, άρα δεν ισχύει η ισότητα $\liminf A_n = \limsup A_n$.

12.2. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας και $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ ακολουθίες συνόλων στην $\mathcal{A}$ τέτοιες ώστε $\mu(\limsup_k A_k) = 1$ και $\mu(\liminf_k B_k) = 1$. Αποδείξτε ότι $\mu(\limsup_k (A_k \cap B_k)) = 1$.

Εξετάστε επίσης αν το συμπέρασμα εξακολουθεί να ισχύει αν αντικαταστήσουμε την υπόθεση $\mu(\liminf_k B_k) = 1$ με την $\mu(\limsup_k B_k) = 1$.

Υπόδειξη. Θέτουμε $A = \limsup_k A_k$ και $B = \liminf_k B_k$. Τότε, $\mu(X \setminus (A \cap B)) = 0$. Δείχνουμε ότι $A \cap B \subseteq \limsup_k (A_k \cap B_k)$, οπότε $\mu(\limsup_k (A_k \cap B_k) \geqslant \mu(A \cap B) = 1$ και έπεται το ζητούμενο.

Έστω $x \in A \cap B$. Υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $x \in B_k$ για κάθε $k \geqslant k_0$. Επίσης, αφού $x \in \limsup_k A_k$, το σύνολο $J = \{k \in \mathbb{N} : x \in A_k\}$ είναι άπειρο, άρα και το σύνολο $J_1 = \{k \geqslant k_0 : x \in A_k\}$ είναι άπειρο. Για κάθε $k \in J_1$ έχουμε $x \in A_k \cap B_k$, και αφού το J_1 είναι άπειρο συμπεραίνουμε ότι $x \in \limsup_k (A_k \cap B_k)$.

Αν $\mu(\limsup_k A_k) = 1$ και $\mu(\limsup_k B_k) = 1$ δεν έπεται ότι $\mu(\limsup_k (A_k \cap B_k)) = 1$. Ένα παράδειγμα είναι να θεωρήσουμε το $X = [0,1]$ με το μέτρο Lebesgue και να θέσουμε

- $A_k = [0, 1/2]$ αν k άρτιος και $A_k = (1/2, 1]$ αν k περιττός,
- $B_k = [0, 1/2]$ αν k περιττός και $B_k = (1/2, 1]$ αν k άρτιος.

Παρατηρήστε ότι $A_k \cap B_k = \emptyset$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

12.3. (α) Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι κάθε κλειστό υποσύνολο του X είναι G_δ σύνολο και κάθε ανοικτό υποσύνολο του X είναι F_σ σύνολο.

(β) Δώστε παράδειγμα G_δ-συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$ που δεν είναι F_σ-σύνολο.

(γ) Δώστε παράδειγμα συνόλου Borel $A \subseteq \mathbb{R}$ που δεν είναι G_δ-σύνολο ούτε F_σ-σύνολο.

(δ) Έστω A και B κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι το $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ δεν είναι απαραίτητα κλειστό. Αποδείξτε όμως ότι είναι πάντα F_σ-σύνολο.

Υπόδειξη. (α) Για κάθε $A \subseteq X$, αν ορίσουμε $U_n = \{x \in X : \mathrm{dist}(x, A) < 1/n\}$ τότε τα σύνολα U_n είναι ανοικτά και $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \overline{A}$. Αν το A υποτεθεί κλειστό, τότε έχουμε $A = \overline{A}$, άρα έχουμε γράψει το A ως αριθμήσιμη τομή ανοικτών συνόλων.

Το συμπλήρωμα ενός G_δ-συνόλου είναι F_σ-σύνολο, οπότε προκύπτει τώρα άμεσα ότι κάθε ανοικτό σύνολο είναι F_σ-σύνολο.

(β) Το $\mathbb{Q}$ είναι F_σ-σύνολο (αφού είναι αριθμήσιμο και τα μονοσύνολα είναι κλειστά σύνολα) αλλά δεν είναι G_δ-σύνολο. Αν ήταν, τότε θα υπήρχαν ανοικτά σύνολα $G_n \subseteq \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\mathbb{Q} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$. Θεωρώντας μια αρίθμηση $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $\mathbb{Q}$ και τα ανοικτά πυκνά σύνολα $V_n = \mathbb{R} \setminus \{q_n\}$ θα είχαμε

$$\emptyset = \mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \right),$$

το οποίο είναι άτοπο από το θεώρημα Baire. Τώρα, το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ μας δίνει παράδειγμα G_δ-συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$ που δεν είναι F_σ-σύνολο.

(γ) Θεωρούμε τα σύνολα $B = \mathbb{Q} \cap (-\infty, 0]$ και $C = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (0, \infty)$. Παρατηρήστε ότι το B είναι F_σ-σύνολο ως αριθμήσιμη ένωση μονοσυνόλων και το C είναι G_δ-σύνολο διότι γράφεται στη μορφή $C = \bigcap_{\mathbb{Q} \cap (0,\infty)} ((0, \infty) \setminus \{q\})$. Ειδικότερα, τα B και C είναι Borel σύνολα. Ορίζουμε

$$A = B \cup C = (\mathbb{Q} \cap (-\infty, 0]) \cup ((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (0, \infty)).$$

Το A είναι Borel σύνολο ως ένωση δύο Borel συνόλων.

Τώρα, παρατηρούμε τα εξής:

- Το B δεν είναι G_δ-σύνολο. Αν ήταν, τότε θα υπήρχαν ανοικτά σύνολα $G_n \subseteq \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Θέτοντας $U_n = G_n \cap (-\infty, 0]$ θα είχαμε $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ και κάθε U_n θα ήταν ανοικτό και πυκνό στον πλήρη μετρικό χώρο $(-\infty, 0]$ αφού $U_n \supseteq B$ και το B είναι πυκνό στο $(-\infty, 0]$. Θεωρώντας μια αρίθμηση $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ του B και τα ανοικτά πυκνά σύνολα $V_n = (-\infty, 0] \setminus \{q_n\}$ θα είχαμε
$$\varnothing = B \cap ((-\infty, 0] \setminus B) = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n\right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n\right),$$
το οποίο είναι άτοπο από το θεώρημα Baire.

- Το C δεν είναι F_σ-σύνολο. Αν ήταν, τότε το $\mathbb{R} \setminus C = \mathbb{Q} \cup (-\infty, 0]$ θα ήταν G_δ-σύνολο, άρα και η τομή του με το G_δ-σύνολο $[1, \infty)$, δηλαδή το $\mathbb{Q} \cap [1, \infty)$ θα ήταν G_δ-σύνολο. Αυτό οδηγεί σε άτοπο όπως πριν.

- Το A δεν είναι G_δ-σύνολο. Αν ήταν, τότε επειδή το $(-\infty, 0]$ είναι G_δ-σύνολο, θα είχαμε ότι το $B = A \cap (-\infty, 0]$ είναι G_δ-σύνολο.

- Ομοίως, το A δεν είναι F_σ-σύνολο. Αν ήταν, τότε επειδή το $[0, \infty)$ είναι κλειστό σύνολο, θα είχαμε ότι το $C = A \cap [0, \infty)$ είναι F_σ-σύνολο.

(δ) Δείχνουμε πρώτα ότι αν το A είναι συμπαγές και το B κλειστό, τότε το $A + B$ είναι κλειστό. Έστω (x_n) ακολουθία στο $A + B$ με $x_n \to x \in \mathbb{R}$. Τότε, κάθε x_n γράφεται στη μορφή $x_n = a_n + b_n$, όπου $a_n \in A$ και $b_n \in B$. Αφού το A είναι συμπαγές, υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε $a_{k_n} \to a \in A$. Τότε, $b_{k_n} = x_{k_n} - a_{k_n} \to x - a$. Αφού το B είναι κλειστό, έχουμε $x - a \in B$. Άρα, $x = a + (x - a) \in A + B$. Έπεται ότι το $A + B$ είναι κλειστό.

Υποθέτουμε τώρα ότι τα A, B είναι κλειστά. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $A_n \cap [-n, n]$. Το A_n είναι συμπαγές, άρα το $A_n + B$ είναι κλειστό από την προηγούμενη παρατήρηση. Έπεται ότι το
$$A + B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n + B)$$
είναι F_σ-σύνολο ως αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων.

Το επόμενο παράδειγμα δείχνει ότι το $A + B$ δεν είναι απαραίτητα κλειστό. Ορίζουμε $A = \mathbb{Z}$ και $B = \sqrt{2}\mathbb{Z}$. Τα A, B είναι κλειστά (εξηγήστε γιατί). Όμως, το $A + B = \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z} = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ δεν είναι κλειστό. Θα δείξουμε ότι είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι η ακολουθία (α_n) με $\alpha_n = (\sqrt{2} - 1)^n$ είναι στο $A + B$ και $\alpha_n \to 0$. Έστω $x > 0$ και έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ με $0 < \alpha_{n_0} < \varepsilon$ και μετά $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ με $m\alpha_{n_0} \leqslant x < (m+1)\alpha_{n_0}$. Τότε, $0 \leqslant x - m\alpha_{n_0} < \alpha_{n_0} < \varepsilon$. Αν $x < 0$ δουλεύοντας με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε πάλι $m \in \mathbb{Z}$ ώστε $|x - m\alpha_{n_0}| < \varepsilon$. Αφού $m\alpha_{n_0} \in \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z} = A + B$, έπεται ότι $\overline{A + B} = \mathbb{R}$.

12.4. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $\mathcal{D}$ οικογένεια μέτρων στην $\mathcal{A}$ με την εξής ιδιότητα: αν $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{D}$ τότε υπάρχει $\mu_3 \in \mathcal{D}$ τέτοιο ώστε $\mu_3 \geqslant \max\{\mu_1, \mu_2\}$. Ορίζουμε
$$\nu(A) = \sup\{\mu(A) : \mu \in \mathcal{D}\}, \qquad A \in \mathcal{A}.$$
Αποδείξτε ότι το ν είναι μέτρο στην $\mathcal{A}$.

Υπόδειξη. Από τον ορισμό του ν ελέγχουμε εύκολα ότι $\nu(\emptyset) = 0$ και ότι το ν είναι μονότονο: αν $A, B \in \mathcal{A}$ και $A \subseteq B$ τότε $\mu(A) \leqslant \mu(B)\nu(B)$ για κάθε $\mu \in \mathcal{D}$, άρα

$$\nu(A) = \sup\{\mu(A) : \mu \in \mathcal{D}\} \leqslant \nu(B).$$

Έστω $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων στην $\mathcal{A}$. Για κάθε $\mu \in \mathcal{D}$ έχουμε

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n),$$

και παίρνοντας supremum ως προς $\mu \in \mathcal{D}$ βλέπουμε ότι

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sup\left\{\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) : \mu \in \mathcal{D}\right\} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n).$$

Για την αντίστροφη ανισότητα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty$. Τότε, λόγω μονοτονίας του ν, έχουμε $\nu(A_n) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Σταθεροποιούμε $N \in \mathbb{N}$ και για τυχόν $\epsilon > 0$ βρίσκουμε $\mu_n \in \mathcal{D}$, $1 \leqslant n \leqslant N$, ώστε $\mu_n(A_n) > \nu(A_n) - \epsilon/N$. Από την υπόθεση της άσκησης έπεται ότι υπάρχει $\mu \in \mathcal{D}$ τέτοιο ώστε $\mu \geqslant \max\{\mu_1, \ldots, \mu_N\}$. Τότε,

$$\sum_{n=1}^{N} \nu(A_n) - \epsilon < \sum_{n=1}^{N} \mu_n(A_n) \leqslant \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) \leqslant \nu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) \leqslant \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Αφού το $\epsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $\sum_{n=1}^{N} \nu(A_n) \leqslant \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$, και αφήνοντας το $N \to \infty$ παίρνουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \nu(A_n) \leqslant \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Αφού το ν είναι αριθμήσιμα προσθετικό, είναι μέτρο στην $\mathcal{A}$.

12.5. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ πλήρης χώρος μέτρου και $A, B, N \subseteq X$. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν $\mu(N) = 0$ και $A \cup N \in \mathcal{A}$ τότε $A \in \mathcal{A}$.

(β) Αν $A \in \mathcal{A}$ και $\mu(A \triangle B) = 0$ τότε $B \in \mathcal{A}$ και $\mu(A) = \mu(B)$.

Υπόδειξη. (α) Έχουμε $N \setminus A \subseteq N$ και $\mu(N) = 0$. Αφού ο $(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι πλήρης χώρος μέτρου, έπεται ότι $N \setminus A \in \mathcal{A}$. Τότε, $A = (A \cup N) \setminus (N \setminus A) \in \mathcal{A}$.

(β) Έχουμε $A \setminus B, B \setminus A \subseteq A \triangle B$ και $\mu(A \triangle B) = 0$. Αφού ο $(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι πλήρης χώρος μέτρου, έπεται ότι $A \setminus B, B \setminus A \in \mathcal{A}$ και $\mu(A \setminus B) = \mu(B \setminus A) = 0$. Αφού $A \in \mathcal{A}$, έχουμε $A \cup B = A \cup (B \setminus A) \in \mathcal{A}$ και συνεπώς $B = (A \cup B) \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{A}$. Τέλος,

$$\mu(A) \leqslant \mu(A \cup B) = \mu(B) + \mu(A \setminus B) = \mu(B)$$

και όμοια $\mu(B) \leqslant \mu(A)$. Άρα, $\mu(A) = \mu(B)$.

12.6. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου με $\mu(X) < \infty$. Έστω $(A_i)_{i\in I}$ οικογένεια ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}$ με $\mu(A_i) > 0$ για κάθε $i \in I$. Αποδείξτε ότι το I είναι το πολύ άπειρο αριθμήσιμο.

Υπόδειξη. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $I_k = \{i \in I : \mu(A_i) \geqslant 1/k\}$. Αφού $\mu(A_i) > 0$ για κάθε $i \in I$, έχουμε $I = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ (πράγματι, για κάθε $i \in I$ υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\mu(A_i) \geqslant 1/k$, και τότε $i \in I_k$). Παρατηρούμε τώρα ότι αφού τα A_i είναι ξένα, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ο πληθάριθμος $|I_k|$ του I_k ικανοποιεί την

$$\frac{1}{k} \cdot |I_k| \leqslant \sum_{i \in I_k} \mu(A_i) = \mu\left(\bigcup_{i \in I_k} A_i\right) \leqslant \mu(X) < \infty.$$

Άρα, όλα τα I_k είναι πεπερασμένα και έπεται ότι το I είναι το πολύ άπειρο αριθμήσιμο, ως αριθμήσιμη ένωση πεπερασμένων συνόλων.

12.7. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου τέτοιος ώστε για κάθε $\varnothing \neq E \in \mathcal{A}$ ισχύει $0 < \mu(E) < \infty$. Για κάθε $x \in X$ ορίζουμε

$$f(x) = \inf\{\mu(E) : E \in \mathcal{A}, x \in E\}.$$

Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in X$ υπάρχει μοναδικό σύνολο $A_x \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $x \in A_x$ και $\mu(A_x) = f(x)$. Αποδείξτε επίσης ότι αν $x, y \in X$ τότε είτε $A_x = A_y$ ή $A_x \cap A_y = \varnothing$.

Υπόδειξη. Έστω $x \in X$. Από τον ορισμό της f, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $A_n \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $x \in A_n$ και $\mu(A_n) < f(x) + \frac{1}{n}$. Αν θέσουμε $A_x = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, τότε $A_x \in \mathcal{A}$, $x \in A_x$ και $f(x) \leqslant \mu(A_x) \leqslant \mu(A_n) < f(x) + 1/n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $\mu(A_x) = f(x)$. Έστω ότι υπάρχει $B_x \neq A_x$ στην $\mathcal{A}$ με $x \in B_x$ και $\mu(B_x) = f(x)$. Παρατηρούμε ότι $A_x \cap B_x \in \mathcal{A}$, $x \in A_x \cap B_x$ και $A_x \cap B_x \subseteq A_x$, άρα

$$f(x) \leqslant \mu(A_x \cap B_x) \leqslant \mu(A_x) = f(x).$$

Άρα, $\mu(A_x \cap B_x) = \mu(A_x)$ και (αφού $\mu(A_x) < \infty$) έπεται ότι $\mu(A_x \setminus B_x) = \mu(A_x) - \mu(A_x \cap B_x) = 0$. Όμως τότε $A_x \setminus B_x = \varnothing$ από την υπόθεση. Όμοια, $B_x \setminus A_x = \varnothing$, άρα $A_x = B_x$ το οποίο είναι άτοπο.

Έστω $x \neq y$ στο X. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν $x \in A_y$ τότε $x \in A_x \cap A_y$. Έχουμε $f(x) \leqslant \mu(A_x \cap A_y) \leqslant \mu(A_x) = f(x)$. Δηλαδή, $\mu(A_x \cap A_y) = \mu(A_x)$. Έπεται ότι $\mu(A_x \setminus A_y) = \mu(A_x) - \mu(A_x \cap A_y) = 0$. Όμως τότε $A_x \setminus A_y = \varnothing$ από την υπόθεση. Όμοια, $A_y \setminus A_x = \varnothing$, άρα $A_x = A_y$.

- Αν $x \notin A_y$ τότε $x \in A_x \setminus A_y$. Έχουμε $f(x) \leqslant \mu(A_x \setminus A_y) \leqslant \mu(A_x) = f(x)$. Δηλαδή, $\mu(A_x \setminus A_y) = \mu(A_x)$. Έπεται ότι $\mu(A_x \cap A_y) = \mu(A_x) - \mu(A_x \setminus A_y) = 0$. Όμως τότε $A_x \cap A_y = \varnothing$ από την υπόθεση.

12.8. Έστω μ ένα μέτρο στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ με την ιδιότητα ότι $\mu(I) < \infty$ για κάθε φραγμένο διάστημα $I \subset \mathbb{R}$. Ορίζουμε

$$F(x) = \begin{cases} \mu((0,x]) & , \text{ αν } x > 0 \\ 0 & , \text{ αν } x = 0 \\ -\mu((x,0]) & , \text{ αν } x < 0. \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι η F είναι αύξουσα και συνεχής από δεξιά.

Υπόδειξη. Έστω $x < y$ στο $\mathbb{R}$. Αν $0 < x < y$ τότε $(0,x] \subset (0,y]$, άρα $F(x) = \mu((0,x]) \leqslant \mu((0,y]) = F(y)$. Αν $x < y < 0$ τότε $(x,0] \supset (y,0]$, άρα $\mu((x,0]) \geqslant \mu((y,0])$ και έπεται ότι $F(x) = -\mu((x,0]) \leqslant -\mu((y,0]) = F(y)$. Τέλος, αν $x \leqslant 0 \leqslant y$ τότε $F(x) = -\mu((x,0]) = 0 \leqslant \mu((0,y]) = F(y)$. Από τα παραπάνω έπεται ότι η F είναι αύξουσα.

(β) Αφού η F είναι αύξουσα, για να ελέγξουμε τη συνέχεια από δεξιά στο $x \in \mathbb{R}$ αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε φθίνουσα ακολουθία $x_n \to x$ ισχύει $F(x_n) \to F(x)$. Μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε ότι $x_n < 0$ αν $x < 0$ και $x_n \leqslant x + 1$ αν $x \geqslant 0$. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

- Αν $x < 0$ τότε $(x_n, 0] \subseteq (x, 0]$, η ακολουθία $((x_n, 0])_{n=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα και $\bigcup_{n=1}^{\infty}(x_n, 0] = (x, 0]$ λόγω της $x_n \to x$. Από τη συνέχεια του μέτρου, $F(x_n) = -\mu((x_n, 0]) \to -\mu((x, 0]) = F(x)$.
- Αν $x > 0$ τότε $(0, x] \subseteq (0, x_n]$, η ακολουθία $((0, x_n])_{n=1}^{\infty}$ είναι φθίνουσα και $\bigcap_{n=1}^{\infty}(0, x_n] = (0, x]$ λόγω της $x_n \to x$. Επίσης, $\mu((0, x_n]) \leqslant \mu((0, x+1])$ για κάθε n και $\mu((0, x+1]) < \infty$ από την υπόθεση. Από τη συνέχεια του μέτρου, $F(x_n) = \mu((0, x_n]) \to \mu((0, x]) = F(x)$.
- Αν $x = 0$, τότε η ακολουθία $((0, x_n])_{n=1}^{\infty}$ είναι πάλι φθίνουσα και $\bigcap_{n=1}^{\infty}[0, x_n) = \varnothing$. Όπως στη δεύτερη περίπτωση, $F(x_n) \to \mu(\varnothing) = 0 = F(0)$.

Έπεται ότι η F είναι συνεχής από δεξιά.

12.9. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ ακολουθία ξένων ανά δύο υποσυνόλων του X τέτοια ώστε $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Αποδείξτε ότι η οικογένεια συνόλων

$$\mathcal{S} = \left\{ \bigcup_{k \in A} E_k : A \subseteq \mathbb{N} \right\}$$

είναι σ-άλγεβρα στο X.

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι ισχύουν τα εξής:

(α) Από την υπόθεση έχουμε ότι

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k,$$

άρα $X \in \mathcal{S}$.

(β) Αν $F = \bigcup_{k \in A} E_k \in \mathcal{S}$, όπου $A \subseteq \mathbb{N}$, τότε

$$X \setminus F = \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k \right) \setminus \left(\bigcup_{k \in A} E_k \right) = \bigcup_{k \in \mathbb{N} \setminus A} E_k,$$

άρα $X \setminus F \in \mathcal{S}$.

(γ) Αν $F_n = \bigcup_{k \in A_n} E_k \in \mathcal{S}$, όπου $A_n \subseteq \mathbb{N}$, και αν θέσουμε $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ τότε έχουμε

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k \in A_n} E_k \right) = \bigcup_{k \in A} E_k,$$

άρα $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{S}$.

Από τα (α)–(γ) έπεται ότι η οικογένεια $\mathcal{S}$ είναι σ-άλγεβρα.

12.10. Αποδείξτε ότι η σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ των Borel υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ είναι αναλλοίωτη ως προς μεταφορές και διαστολές. Δηλαδή, αν $B \subseteq \mathbb{R}$ είναι ένα Borel σύνολο, τότε τα

$$t + B := \{t + x : x \in B\} \quad \text{και} \quad tB := \{tx : x \in B\}$$

είναι Borel σύνολα.

Υπόδειξη. Έστω $t \neq 0$. Θεωρούμε τις οικογένειες υποσυνόλων του $\mathbb{R}$

$$\mathcal{A}_t = \{B \subseteq \mathbb{R} : t + B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}\}.$$

και

$$C_t = \{B \subseteq \mathbb{R} : tB \in \mathcal{B}(\mathbb{R}\}.$$

Αποδεικνύουμε ότι οι $\mathcal{A}_t$ και C_t είναι σ-άλγεβρες. Για παράδειγμα, για την $\mathcal{A}_t$ παρατηρούμε ότι:

- $t + \mathbb{R} = \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, άρα $\mathbb{R} \in \mathcal{A}_t$.
- Αν $B \in \mathcal{A}_t$ τότε $t + B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, συνεπώς $t + (\mathbb{R} \setminus B) = \mathbb{R} \setminus (t + B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, άρα $\mathbb{R} \setminus B \in \mathcal{A}_t$.
- Αν $B_n \in \mathcal{A}_t$, $n \geqslant 1$, τότε $t+B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, συνεπώς $t+\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}(t+B_n) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, άρα $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}_t$.

Εντελώς ανάλογα βλέπουμε ότι η C_t είναι σ-άλγεβρα. Θεωρούμε τώρα την οικογένεια

$$\Delta = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$$

των φραγμένων ανοικτών διαστημάτων του $\mathbb{R}$. Αν $(a, b) \in \Delta$ τότε $t + (a, b) = (t + a, t + b) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ και $t(a, b) = (ta, tb) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ αν $t > 0$, ενώ $t(a, b) = (tb, ta) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ αν $t < 0$. Άρα, $\Delta \subseteq \mathcal{A}_t$ και $\Delta \subseteq C_t$. Αφού $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\Delta)$ έπεται ότι $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{A}_t$ και $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq C_t$, δηλαδή το ζητούμενο.

Η περίπτωση $t = 0$ είναι πολύ απλούστερη: για κάθε $\varnothing \neq B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ έχουμε $0 + B = B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ και $0B = \{0\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Η περίπτωση $B = \varnothing$ είναι ακόμα πιο απλή, αφού $0 + \varnothing = 0\varnothing = \varnothing \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

12.11. (α) Έστω X μη κενό σύνολο και $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}_{n+1} \subseteq \cdots$ μια αύξουσα ακολουθία αλγεβρών στο X. Αποδείξτε ότι η οικογένεια $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ είναι άλγεβρα στο X.

(β) Έστω X μη κενό σύνολο και $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}_{n+1} \subseteq \cdots$ μια αύξουσα ακολουθία σ-αλγεβρών στο X. Είναι απαραίτητα σωστό ότι η οικογένεια $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ είναι σ-άλγεβρα στο X;

Υπόδειξη. Θέτουμε $\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$. Παρατηρούμε ότι ισχύουν τα εξής:

(i) Από την υπόθεση έχουμε ότι $X \in \mathcal{A}_n$ (και μάλιστα) για κάθε $n \geqslant 1$, άρα $X \in \mathcal{A}$.

(ii) Αν $F \in \mathcal{A}$, τότε υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $F \in \mathcal{A}_m$, και αφού η $\mathcal{A}_m$ είναι άλγεβρα έχουμε $X \setminus F \in \mathcal{A}_m$, άρα $X \setminus F = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n = \mathcal{A}$.

(iii) Αν $F_1, \ldots, F_k \in \mathcal{A}$ τότε υπάρχουν $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ ώστε $F_j \in \mathcal{A}_{n_j}$ για κάθε $j = 1, \ldots, k$. Αν θέσουμε $N = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$ τότε $\mathcal{A}_{n_j} \subseteq \mathcal{A}_N$ από την υπόθεση, άρα $F_j \in \mathcal{A}_N$ για κάθε $j = 1, \ldots, k$. Αφού η $\mathcal{A}_N$ είναι άλγεβρα, έπεται ότι $F_1 \cup \cdots \cup F_k \in \mathcal{A}_N$, άρα $F_1 \cup \cdots \cup F_k \in \mathcal{A}$.

Από τα (i)–(iii) έπεται ότι η οικογένεια $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα.

(β) Δεν είναι απαραίτητα σωστό. Θεωρούμε το σύνολο $X = \mathbb{N}$ και τις εξής οικογένειες υποσυνόλων του $\mathbb{N}$:

$$\mathcal{A}_n = \{B \subseteq \mathbb{N} : B \subseteq \{1, \ldots, n\}\ \text{ ή;}\ \mathbb{N} \setminus B \subseteq \mathbb{N}\}.$$

Είναι σαφές ότι $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}_{n+1} \subseteq \cdots$ και μπορείτε να ελέγξετε ότι κάθε $\mathcal{A}_n$ είναι σ-άλγεβρα. Οι δύο πρώτες ιδιότητες ελέγχονται άμεσα και για την τρίτη θεωρήστε $B_k \in \mathcal{A}_n$, $k \geqslant 1$ και διακρίνετε δύο περιπτώσεις: αν όλα τα $B_k \subseteq \{1, \ldots, n\}$ τότε $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \subseteq \{1, \ldots, n\}$, ενώ αν υπάρχει m ώστε $\mathbb{N} \setminus B_m \subseteq \{1, \ldots n\}$ τότε $\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right)^c = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k^c \subseteq B_m^c \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Και στις δύο περιπτώσεις έπεται ότι $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{A}_n$.

Τώρα, παρατηρήστε ότι

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n = \{B \subseteq \mathbb{N} : B \ \text{πεπερασμένο ή} \ \mathbb{N} \setminus B \ \text{πεπερασμένο}\}.$$

Αυτή όμως η οικογένεια, ας την πούμε $\mathcal{A}$, δεν είναι σ-άλγεβρα. Το σύνολο $\{2n : n \in \mathbb{N}\}$ δεν ανήκει στην $\mathcal{A}$, είναι όμως αριθμήσιμη ένωση μονοσυνόλων και όλα τα μονοσύνολα φυσικών ανήκουν στην $\mathcal{A}$.

12.12. Έστω X μη κενό σύνολο και $\mathcal{E}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X. Η $\mathcal{E}$ λέγεται *στοιχειώδης οικογένεια* αν ικανοποιεί τα εξής: (α) $\varnothing \in \mathcal{E}$, (β) αν $E, F \in \mathcal{E}$ τότε $E \cap F \in \mathcal{E}$, και (γ) αν $E \in \mathcal{E}$ τότε το $E^c := X \setminus E$ είναι πεπερασμένη ένωση ξένων ανά δύο στοιχείων της $\mathcal{E}$.

Αποδείξτε ότι αν $\mathcal{E}$ είναι μια στοιχειώδης οικογένεια τότε η οικογένεια

$$\mathcal{A} = \{E_1 \cup \cdots \cup E_k : k \in \mathbb{N}, E_i \in \mathcal{E} \ \text{ξένα ανά δύο}\}$$

των πεπερασμένων ξένων ενώσεων στοιχείων της $\mathcal{E}$ είναι άλγεβρα στο X.

*Υπόδειξη.*Θα δώσουμε την απόδειξη σε βήματα.
Βήμα 1. Αν $A, B \in \mathcal{E}$,τότε $A \setminus B \in \mathcal{A}$. Γράφουμε

$$A \setminus B = A \cap B^c = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} F_i\right)$$

με τα $F_i \in \mathcal{E}$ ξένα ανά δύο, και παρατηρούμε ότι

$$A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} F_i\right) = \bigcup_{i=1}^{k} (A \cap F_i) \in \mathcal{A}$$

διότι τα $A \cap F_i$ ανήκουν στην $\mathcal{E}$ από το (β) του ορισμού, και είναι ξένα ανά δύο.

Βήμα 2. Αν $A, B \in \mathcal{E}$ τότε $A \cup B \in \mathcal{A}$. Πράγματι, αν γράψουμε $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$ τότε το πρώτο σύνολο $A \setminus B$ ανήκει στην $\mathcal{A}$ (από το Βήμα 1) άρα γράφεται ως

$$A \setminus B = \bigcup_{i=1}^{s} G_i$$

με τα $G_i \in \mathcal{E}$ ξένα ανά δύο. Από την άλλη πλευρά, $B \in \mathcal{E}$ και συνεπώς

$$A \cup B = \left(\bigcup_{i=1}^{s} G_i\right) \cup B$$

που είναι μια ξένη ένωση στοιχείων της $\mathcal{E}$, διότι επιπλέον $G_i \subseteq A \setminus B$.

Βήμα 3. Αν $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{E}$ τότε $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$ (για οποιονδήποτε $n \in \mathbb{N}$). Το δείχνουμε με επαγωγή. Η περίπτωση $n = 2$ καλύφθηκε στο Βήμα 2. Υποθέτουμε λοιπόν ότι ο ισχυρισμός αληθεύει για $n-1$ σύνολα. Τότε μπορούμε να γράψουμε

$$\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i = \bigcup_{j=1}^{s} G_i$$

με τα G_i ξένα ανά δύο στοιχεία της $\mathcal{E}$ (από την επαγωγική υπόθεση). Επομένως,

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{j=1}^{s} (G_j \setminus A_n) \cup A_n.$$

Τώρα, με βάση το Βήμα 1, έχουμε $(G_j \setminus A_n) \in \mathcal{A}$ για κάθε j, συνεπώς μπορούμε να γράψουμε

$$G_j \setminus A_n = \bigcup_{k=1}^{t_j} F_{j,k}$$

για $j = 1, 2, \ldots, s$, όπου τα $F_{j,k}$ είναι ξένα ανά δύο στοιχεία της $\mathcal{E}$), άρα

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \left(\bigcup_{j=1}^{s} \bigcup_{k=1}^{t_j} F_{j,k} \right) \cup A_n \in \mathcal{A}.$$

Βήμα 4. Αν $E_1, \ldots, E_k \in \mathcal{A}$, τότε $\bigcup_{i=1}^{k} E_i \in \mathcal{A}$. Πράγματι, γράφουμε

$$E_i = \bigcup_{j=1}^{t_i} F_{i,j}$$

με τα $F_{i,j}$ ξένα ανά δύο στοιχεία της $\mathcal{E}$, και βλέπουμε ότι

$$\bigcup_{i=1}^{k} E_i = \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{j=1}^{t_i} F_{i,j}$$

το οποίο είναι πεπερασμένη ένωση στοιχείων της $\mathcal{E}$, άρα ανήκει στην $\mathcal{A}$ από το Βήμα 3.

Βήμα 5. Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε $A^c \in \mathcal{A}$. Αν γράψουμε $A = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$, με τα E_i ξένα ανά δύο στοιχεία της $\mathcal{E}$, τότε $A^c = \bigcap_{i=1}^{n} E_i^c$. Αφού η $\mathcal{E}$ είναι στοιχειώδης οικογένεια, έχουμε $E_i^c = \bigcup_{j=1}^{k_i} F_{ij}$ (όπου τα $F_{ij} \in \mathcal{E}$, $1 \leqslant j \leqslant k_i$ είναι ξένα), οπότε

$$A^c = \bigcap_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{k_i} F_{i,j} = \bigcup \left\{ F_{1,j_1} \cap \cdots \cap F_{n,j_n}, 1 \leqslant j_i \leqslant k_i, 1 \leqslant i \leqslant n \right\},$$

το οποίο είναι πεπερασμένη ένωση τομών στοιχείων της $\mathcal{E}$, άρα στοιχείο της $\mathcal{A}$ (από το (β) του ορισμού της $\mathcal{E}$ και το Βήμα 3).

Συνδυάζοντας τα παραπάνω με το γεγονός ότι η $\mathcal{A}$ είναι (προφανώς) μη κενή, συμπεραίνουμε ότι είναι άλγεβρα.

12.13. (α) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου με $0 < \mu(X) < \infty$. Αποδείξτε ότι

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k \right) \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} \mu(A_k) \right)^{1/n}$$

και

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \right) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mu(A_i \cap A_j)$$

για κάθε $A_1,\ldots,A_n\in\mathcal{A}$.

(β) Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος πιθανότητας και $A_1,\ldots,A_n\in\mathcal{A}$ τέτοια ώστε $\sum_{k=1}^n\mu(A_k)>n-1$. Αποδείξτε ότι

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right)>0.$$

Υπόδειξη. (α) Για κάθε $k=1,\ldots,n$ έχουμε $\bigcap_{k=1}^n A_k\subseteq A_k$, άρα $\mu\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right)\leqslant\mu(A_k)$. Πολλαπλασιάζοντας αυτές τις ανισότητες παίρνουμε

$$\left[\mu\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right)\right]^n\leqslant\prod_{k=1}^n\mu(A_k),$$

άρα

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right)\leqslant\left(\prod_{k=1}^n\mu(A_k)\right)^{1/n}.$$

Αποδεικνύουμε τη δεύτερη ανισότητα με επαγωγή ως προς n. Για $n=2$ θεωρούμε $A,B\in\mathcal{A}$ και ζητάμε να ισχύει η ανισότητα

$$\mu(A\cup B)\geqslant\mu(A)+\mu(B)-\mu(A\cap B).$$

Όμως,

$$\mu(A\cup B)+\mu(A\cap B)=[\mu(A)+\mu(B\setminus A)]+\mu(A\cap B)=\mu(A)+[\mu(B\setminus A)+\mu(B\cap A)]=\mu(A)+\mu(B),$$

δηλαδή η ανισότητα ισχύει ως ισότητα. Για το επαγωγικό βήμα, έστω $A_1,\ldots,A_n,A_{n+1}\in\mathcal{A}$. Χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση για 2 και n σύνολα και την υποπροσθετικότητα του μέτρου, γράφουμε

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n+1}A_k\right)&=\mu\left(\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right)\cup A_{n+1}\right)=\mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right)+\mu(A_{n+1})-\mu\left(\bigcup_{k=1}^n(A_k\cap A_{n+1})\right)\\&\geqslant\sum_{k=1}^n\mu(A_k)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\mu(A_i\cap A_j)+\mu(A_{n+1})-\mu\left(\bigcup_{k=1}^n(A_k\cap A_{n+1})\right)\\&\geqslant\sum_{k=1}^{n+1}\mu(A_k)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\mu(A_i\cap A_j)-\sum_{k=1}^n\mu(A_k\cap A_{n+1})\\&=\sum_{k=1}^{n+1}\mu(A_k)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}\mu(A_i\cap A_j).\end{aligned}$$

(β) Παρατηρούμε ότι

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k^c\right)\leqslant\sum_{k=1}^n\mu(A_k^c)=\sum_{k=1}^n(1-\mu(A_k))=n-\sum_{k=1}^n\mu(A_k)<n-(n-1)=1.$$

Συνεπώς,

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right)=1-\mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k^c\right)>0.$$

12.14. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ ένας χώρος μέτρου. Υποθέτουμε ότι το μ είναι σ-πεπερασμένο και $\mu(X)=\infty$.

Αποδείξτε ότι για κάθε $r > 0$ υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $r < \mu(A) < \infty$.

Υπόδειξη. Το μ είναι σ-πεπερασμένο, άρα υπάρχει ακολουθία $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων της $\mathcal{A}$ με $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ και $\mu(A_n) < \infty$ για κάθε $n \geqslant 1$. Αν ορίσουμε $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ τότε η $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα, έχουμε $\mu(B_n) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) < \infty$ για κάθε $n \geqslant 1$ και $A_n \subseteq B_n$ το οποίο μας δίνει ότι $X = \bigcup_{n=1}^{\infty}$ αφού $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Από τα παραπάνω και από τη συνέχεια του μέτρου έχουμε

$$\infty = \mu(X) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n).$$

Έστω τώρα $r > 0$. Από την προηγούμενη ισότητα υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $r < \mu(B_m) < \infty$. Θέτοντας $A = B_m$ έχουμε το ζητούμενο.

12.15. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $\{\mu_n\}$ μια αύξουσα ακολουθία μέτρων στον $(X, \mathcal{A})$, δηλαδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $A \in \mathcal{A}$ ισχύει $\mu_n(A) \leqslant \mu_{n+1}(A)$. Για $A \in \mathcal{A}$ ορίζουμε

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(A).$$

Αποδείξτε ότι το μ είναι ένα μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$.

Υπόδειξη. Αφού η $\{\mu_n\}$ είναι αύξουσα, το $\mu(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(A)$ υπάρχει (και ενδεχομένως είναι άπειρο) για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Επίσης, $\mu(A) \geqslant \mu_n(A)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Δείχνουμε ότι το μ είναι μέτρο:

(i) Από τον ορισμό του μ έχουμε $\mu(\varnothing) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(\varnothing) = 0$, αφού $\mu_n(\varnothing) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Έστω $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ ακολουθία ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}$. Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} \mu(A_k) &= \sum_{k=1}^{N} \lim_{n\to\infty} \mu_n(A_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \mu_n(A_k) = \lim_{n\to\infty} \mu_n\Big(\bigcup_{k=1}^{N} A_k\Big)\\ &\leqslant \lim_{n\to\infty} \mu_n\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big).\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \leqslant \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big).$$

Για την αντίστροφη ανισότητα παρατηρήστε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu_n\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(A_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Άρα,

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu_n\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

12.16. Έστω μ ένα μέτρο στην $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ τέτοιο ώστε $\mu(B) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ για κάθε $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ και $0 < \mu(\mathbb{R}) < \infty$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i}.$$

Υπόδειξη. Έστω $n = \mu(\mathbb{R})$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$F(x) = \mu((-\infty, x]), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Παρατηρήστε ότι η F είναι αύξουσα και συνεχής από δεξιά. Για κάθε $1 \leqslant s \leqslant n$ ορίζουμε

$$x_s =: \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geqslant s\}.$$

Δείξτε ότι $-\infty < x_1 \leqslant x_2 \cdots \leqslant x_n < \infty$ για κάθε s και ότι

$$\mu((-\infty, x]) = F(x) = \sum_{s=1}^{n} \delta_{x_s}((-\infty, x])$$

για κάθε $x \notin \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Έστω $\Delta = \{(-\infty, x] : x \notin \{x_1, \ldots, x_n\}\}$. Αποδείξτε ότι $\sigma(\Delta) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ και χρησιμοποιώντας το θεώρημα μοναδικότητας συμπεράνατε ότι

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i}.$$

12.17. Έστω $E \subset \mathbb{R}^k$ με $\lambda^*(E) < \infty$. Αποδείξτε ότι το E είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν υπάρχουν ακολουθία $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ ξένων ανά δύο συμπαγών συνόλων και $N \subset \mathbb{R}^k$ με $\lambda(N) = 0$ τέτοια ώστε

$$E = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right) \cup N.$$

Υπόδειξη. Έστω ότι το E είναι μετρήσιμο. Έχουμε $\lambda(E) = \lambda^*(E) < \infty$. Μπορούμε να βρούμε συμπαγές $K_1 \subseteq E$ τέτοιο ώστε $\lambda(E \setminus K_1) < 1$. Επαγωγικά, έστω ότι έχουμε ορίσει ξένα ανά δύο συμπαγή σύνολα $K_1, \ldots, K_n \subseteq E$ ώστε $\lambda\left(E \setminus (K_1 \cup \cdots \cup K_n)\right) < \frac{1}{n}$. Μπορούμε πάλι να βρούμε συμπαγές $K_{n+1} \subseteq E \setminus (K_1 \cup \cdots \cup K_n)$ τέτοιο ώστε

$$\lambda\left(E \setminus (K_1 \cup \cdots \cup K_n \cup K_{n+1})\right) = \lambda\left((E \setminus (K_1 \cup \cdots \cup K_n)) \setminus K_{n+1}\right) < \frac{1}{n+1}.$$

Έτσι ορίζεται ακολουθία $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ συμπαγών υποσυνόλων του E τέτοια ώστε για το $N = E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ να ισχύει

$$\lambda(N) = \lambda\left(E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right) \leqslant \lambda\left(E \setminus (K_1 \cup \cdots \cup K_n)\right) < \frac{1}{n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή $\lambda(N) = 0$.

Η αντίστροφη κατεύθυνση είναι άμεση: αν υπάρχουν ακολουθία $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ ξένων ανά δύο συμπαγών συνόλων και $N \subset \mathbb{R}^k$ με $\lambda(N) = 0$ τέτοια ώστε $E = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right) \cup N$, τότε το E είναι Lebesgue μετρήσιμο ως αριθμήσιμη ένωση Lebesgue μετρήσιμων συνόλων.

12.18. Έστω $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{R}^k$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν ξένα ανά δύο Lebesgue μετρήσιμα σύνολα E_n τέτοια ώστε $A_n \subseteq E_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι

$$\lambda^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n).$$

Υπόδειξη. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $1 \leqslant n \leqslant k$ έχουμε $A_{k+1} \cap E_{k+1} = A_{k+1}$, $A_n \cap E_{k+1} = \emptyset$, $E_{k+1}^c \cap A_{k+1} = \emptyset$ και $E_{k+1}^c \cap A_n = A_n$. Συνεπώς, $E_{k+1} \cap \left(\bigcup_{n=1}^{k+1} A_n\right) = A_{k+1}$ και $E_{k+1}^c \cap \left(\bigcup_{n=1}^{k+1} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{k} A_n$. Άρα,

$$\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{k+1} A_n\right) = \lambda^*\left(E_{k+1} \cap \left(\bigcup_{n=1}^{k+1} A_n\right)\right) + \lambda^*\left(E_{k+1}^c \cap \left(\bigcup_{n=1}^{k+1} A_n\right)\right) = \lambda^*(A_{k+1}) + \lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right).$$

Επαγωγικά, για κάθε $N \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\sum_{n=1}^{N} \lambda^*(A_n) = \lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) \leqslant \lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Αφήνοντας το $N \to \infty$ παίρνουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n) \leqslant \lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Η αντίστροφη ανισότητα ισχύει από την αριθμήσιμη υποπροσθετικότητα του λ^*.

12.19. (α) Αποδείξτε ότι για κάθε $A, B \subseteq \mathbb{R}^k$ ισχύει ότι

$$\lambda^*(A \cup B) + \lambda^*(A \cap B) \leqslant \lambda^*(A) + \lambda^*(B).$$

(β) Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^k$ τέτοιο ώστε $E \cap K \neq \emptyset$ για κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$ με $\lambda(K) > 0$. Αποδείξτε ότι $\lambda^*(E) = \infty$.

Υπόδειξη. (α) Παρατηρούμε αρχικά ότι αν E, F είναι Lebesgue μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}^k$ τότε

$$\lambda(E \cup F) + \lambda(E \cap F) = \lambda(E) + \lambda(F \setminus E) + \lambda(E \cap F) = \lambda(E) + \lambda(F).$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lambda^*(A) < \infty$ και $\lambda^*(B) < \infty$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν G_δ-σύνολα $E, F \subseteq \mathbb{R}^k$ τέτοια ώστε $A \subseteq E$, $B \subseteq F$ και $\lambda^*(A) = \lambda(E)$, $\lambda^*(B) = \lambda(F)$. Έχουμε $A \cup B \subseteq E \cup F$ και $A \cap B \subseteq E \cap F$, άρα

$$\lambda^*(A \cup B) + \lambda^*(A \cap B) \leqslant \lambda(E \cup F) + \lambda(E \cap F) = \lambda(E) + \lambda(F) = \lambda^*(A) + \lambda^*(B).$$

(β) Έστω ότι $\lambda^*(E) < \infty$. Υπάρχει G_δ-σύνολο $G \subseteq \mathbb{R}^k$ τέτοιο ώστε $E \subseteq G$ και $\lambda(G) = \lambda^*(E)$. Αφού $\lambda(G) < \infty$, έχουμε $\lambda(\mathbb{R}^k \setminus G) = +\infty$. Άρα, υπάρχει συμπαγές $K \subseteq \mathbb{R}^k \setminus G$ με $\lambda(K) > 0$. Όμως, $K \cap E = \emptyset$, το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση.

12.20. (α) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^k$. Αποδείξτε ότι το A είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο $E \subseteq \mathbb{R}^k$ τέτοιο ώστε $\lambda^*(A \triangle E) < \varepsilon$.

(β) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^k$. Αποδείξτε ότι το A είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν για κάθε $E \subseteq A$ και για κάθε $F \subseteq A^c$ ισχύει ότι

$$\lambda^*(E \cup F) = \lambda^*(E) + \lambda^*(F).$$

Υπόδειξη. (α) Αν το A είναι Lebesgue μετρήσιμο, για κάθε $\varepsilon > 0$ θεωρούμε το $E = A$ το οποίο είναι Lebesgue μετρήσιμο και προφανώς ικανοποιεί την $\lambda(A \triangle E) = \lambda(\emptyset) = 0 < \varepsilon$.

Αντίστροφα, έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο $E \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda^*(A \triangle E) < \varepsilon$. Για κάθε $k \geqslant 1$ μπορούμε να βρούμε Lebesgue μετρήσιμο $E_k \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\lambda(E \triangle E_k) < \frac{1}{k^2}$.

Ορίζουμε

$$E = \liminf_n E_k = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k.$$

Το E είναι Lebesgue μετρήσιμο και ικανοποιεί τα εξής:

- Για κάθε $n \geqslant 1$ και $k \geqslant n$ έχουμε $\lambda\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k \setminus A\right) \leqslant \lambda(E_k \setminus A) \leqslant \lambda(A \triangle E_k) < \frac{1}{k^2}$, άρα $\lambda\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k \setminus A\right) = 0$. Έπεται ότι

$$\lambda(E \setminus A) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k \setminus A\right) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\Big(\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k \setminus A\Big)\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\lambda\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k \setminus A\right) = 0.$$

  Δηλαδή, $\lambda(E \setminus A) = 0$.

- Για κάθε $n \geqslant 1$ έχουμε $A \setminus E \subseteq A \setminus \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k = \bigcup_{k=n}^{\infty}(A \setminus E_k)$, άρα $\lambda(A \setminus E) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \lambda(A \setminus E_k) < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Όμως, $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 0$, άρα $\lambda(A \setminus E) = 0$.

Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε $\lambda(A \triangle E) = \lambda(A \setminus E) + \lambda(E \setminus A) = 0$.

(β) Έστω ότι το A είναι μετρήσιμο. Αν $E \subseteq A$ και για $F \subseteq A^c$ τότε

$$\lambda^*(E \cup F) = \lambda^*((E \cup F) \cap A) + \lambda^*((E \cup F) \cap A^c) = \lambda^*(E) + \lambda^*(F),$$

διότι $(E \cup F) \cap A = E$ και $(E \cup F) \cap A^c = F$.

Αντίστροφα, για τυχόν $X \subseteq \mathbb{R}^k$ θέτουμε $E = X \cap A \subseteq A$ και $F = X \cap A^c \subseteq A^c$ και εφαρμόζοντας την υπόθεση παίρνουμε

$$\lambda^*(X) = \lambda^*((X \cap A) \cup (X \cap A^c)) = \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*(X \cap A^c),$$

το οποίο σημαίνει, από τον ορισμό του Καραθεοδωρή, ότι το A είναι Lebesgue μετρήσιμο.

12.21. Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής.

(α) Υπάρχει αρίθμηση $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $\mathbb{Q}$ τέτοια ώστε

$$\mathbb{R} \neq \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(q_n - \frac{1}{n}, q_n + \frac{1}{n}\right).$$

(β) Αν $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$ με $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) = \infty$, τότε

$$\sum_{\substack{k,n=1 \\ k\neq n}}^{\infty} \lambda(E_k \cap E_n) = \infty.$$

Υπόδειξη. (α) Μπορούμε να ορίσουμε αρίθμηση των ρητών για την οποία $\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(q_n - \frac{1}{n}, q_n + \frac{1}{n}\right)\right) < \infty$. Αυτό προφανώς αποδεικνύει το ζητούμενο. Θεωρούμε μία 1-1 και επί συνάρτηση από το $M := \{k^2 : k \in \mathbb{N}\}$ στο $\mathbb{Q} \setminus [0,1]$ και μία 1-1 και επί συνάρτηση από το $\mathbb{N} \setminus M$ στο $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Συνδυάζοντάς τις, έχουμε μια αρίθμηση $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $\mathbb{Q}$ με την ιδιότητα: $n = k^2$ αν και μόνο αν $|q_n| > 1$. Παρατηρήστε ότι $\bigcup\limits_{n\notin M}\left(q_n - \frac{1}{n}, q_n + \frac{1}{n}\right) \subseteq [-1, 2]$, άρα $\lambda\left(\bigcup_{n\notin M}\left(q_n - \frac{1}{n}, q_n + \frac{1}{n}\right)\right) \leqslant 3$. Επίσης, $\sum_{n\in M} \lambda\left(\left(q_n - \frac{1}{n}, q_n + \frac{1}{n}\right)\right) \leqslant$

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k^2}<4$. Άρα,

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(q_n-\frac{1}{n},q_n+\frac{1}{n}\right)\right)\leqslant\lambda\left(\bigcup_{n\notin M}\left(q_n-\frac{1}{n},q_n+\frac{1}{n}\right)\right)+\sum_{n\in M}\lambda\left(\left(q_n-\frac{1}{n},q_n+\frac{1}{n}\right)\right)<\infty.$$

(β) Έστω $N\in\mathbb{N}$. Γράφουμε

$$\sum_{\substack{k,n=1\\k\neq n}}^{N}\chi_{E_k\cap E_n}=\sum_{\substack{k,n=1\\k\neq n}}^{N}\chi_{E_k}\chi_{E_n}=\sum_{k,n=1}^{N}\chi_{E_k}\chi_{E_n}-\sum_{k=1}^{n}\chi_{E_k}^2=\left(\sum_{k=1}^{N}\chi_{E_k}\right)^2-\sum_{k=1}^{N}\chi_{E_k}.$$

Αν θέσουμε $g_N=\sum_{k=1}^{N}\chi_{E_k}$, ολοκληρώνοντας την προηγούμενη ανισότητα παίρνουμε

$$\sum_{\substack{k,n=1\\k\neq n}}^{N}\lambda(E_k\cap E_n)=\int_{[0,1]}\left(\sum_{\substack{k,n=1\\k\neq n}}^{N}\chi_{E_k\cap E_n}\right)d\lambda\geqslant\int_{[0,1]}g_N^2-\int_{[0,1]}g_N\,d\lambda.$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε $\int_{[0,1]}g_N^2\geqslant\left(\int_{[0,1]}g_N\,d\lambda\right)^2$, άρα τελικά

$$\sum_{\substack{k,n=1\\k\neq n}}^{N}\lambda(E_k\cap E_n)\geqslant\left(\int_{[0,1]}g_N d\lambda\right)^2-\int_{[0,1]}g_N d\lambda=\left(\int_{[0,1]}g_N d\lambda\right)\cdot\left(\int_{[0,1]}g_N d\lambda-1\right).$$

Όμως, $\sum_{\substack{k,n=1\\k\neq n}}^{\infty}\lambda(E_k\cap E_n)\geqslant\sum_{\substack{k,n=1\\k\neq n}}^{N}\lambda(E_k\cap E_n)$ για κάθε $N\in\mathbb{N}$ και $\int_{[0,1]}g_N d\lambda=\sum_{k=1}^{N}\lambda(E_k)\to\infty$ από την υπόθεση. Άρα, αφήνοντας το $N\to\infty$ στην προηγούμενη ανισότητα παίρνουμε

$$\sum_{\substack{k,n=1\\k\neq n}}^{\infty}\lambda(E_k\cap E_n)\geqslant\lim_{N\to\infty}\sum_{\substack{k,n=1\\k\neq n}}^{N}\lambda(E_k\cap E_n)=+\infty.$$

12.22. Έστω $E\subseteq\mathbb{R}^k$. Για κάθε $n\geqslant 1$ ορίζουμε $U_n=\left\{x\in\mathbb{R}^d:\mathrm{dist}(x,E)<\frac{1}{n}\right\}$.

(α) Αποδείξτε ότι αν το E είναι συμπαγές τότε $\lambda(U_n)\to\lambda(E)$.

(β) Δώστε παραδείγματα που να δείχνουν ότι το συμπέρασμα του (α) δεν ισχύει αν το E είναι κλειστό και μη φραγμένο ή αν το E είναι ανοικτό και φραγμένο.

Υπόδειξη. (α) Έστω $E\subset\mathbb{R}^k$ συμπαγές, άρα φραγμένο. Υπάρχει $M>0$ τέτοιος ώστε $\|x\|_2\leqslant M$ για κάθε $x\in E$ και τότε $\|x\|_2\leqslant M+1$ για κάθε $x\in U_1$. Δηλαδή, το U_1 είναι φραγμένο και ειδικότερα $\lambda(U_1)<\infty$. Η ακολουθία $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι φθίνουσα και $\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n=\overline{E}=E$ διότι το E είναι συμπαγές, άρα κλειστό. Λόγω συνέχειας του μέτρου συμπεραίνουμε ότι $\lambda(U_n)\to\lambda(E)$.

(β) Αν θεωρήσουμε το $\mathbb{Z}$ ως υποσύνολο του $\mathbb{R}$, ή γενικότερα το $\mathbb{Z}^k$ ως υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$, παίρνουμε ένα κλειστό σύνολο E με μέτρο $\lambda(E)=0$ και την ιδιότητα ότι $\lambda(U_n)=\infty$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$: Το U_n είναι άπειρη αριθμήσιμη ένωση από ξένες ανά δύο ανοικτές μπάλες ακτίνας $1/n$ στον $\mathbb{R}^k$, άρα έχει άπειρο μέτρο (εξηγήστε τις λεπτομέρειες).

Αν θεωρήσουμε ένα ανοικτό πυκνό $E\subset[0,1]$ με $\lambda(E)<1/2$ και $\lambda(\partial(E))>1/2$ (δείτε την επόμενη άσκηση) τότε το E είναι ανοικτό και φραγμένο. Όπως στο (α) βλέπουμε ότι για τα σύνολα $U_n=\left\{x\in\mathbb{R}^d:\mathrm{dist}(x,E)<\frac{1}{n}\right\}$ ισχύει $\lambda(U_n)\to\lambda(\overline{E})=1>\lambda(E)$.

12.23. (α) Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon \in (0,1)$ υπάρχει ανοικτό πυκνό $U \subset [0,1]$ με $\lambda(U) < \varepsilon$ και $\lambda(\partial(U)) > 1-\varepsilon$, όπου $\partial(U)$ είναι το σύνορο του U.

(β) Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ Lebesgue κλειστών μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$ τέτοια ώστε όλα τα A_n να έχουν κενό εσωτερικό και η ένωσή τους να έχει μέτρο 1.

Υπόδειξη. (α) Έστω $D = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ μια αρίθμηση των ρητών του $(0,1)$. Ορίζουμε

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(q_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}\right) \cap (0,1).$$

Το U είναι ανοικτό και πυκνό στο $[0,1]$, αφού $[0,1] \supseteq \overline{U} \supseteq \overline{D} = [0,1]$. Επίσης, $\lambda(U) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon}{2^{n+2}} = \varepsilon 2 < \varepsilon$ και

$$\lambda(\partial(U)) = \lambda(\overline{U} \setminus U^{\circ}) = \lambda([0,1] \setminus U) = 1 - \lambda(U) > 1 - \varepsilon.$$

(β) Για κάθε $n \geqslant 2$ θεωρούμε το ανοικτό σύνολο U_n που ορίζεται όπως στο (α) με $\varepsilon = 1/n$. Κατόπιν θέτουμε $A_n = [0,1] \setminus U_n$. Κάθε A_n είναι κλειστό και έχει κενό εσωτερικό γιατί δεν περιέχει ρητούς εκτός από τους 0 και 1. Επίσης, $\lambda(A_n) > 1 - 1/n$. Συνεπώς, $\lambda\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geqslant \lambda(A_n) > 1 - 1/n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $\lambda\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geqslant 1$. Αφού $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq [0,1]$ έχουμε επίσης $\lambda\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant 1$ και έπεται το ζητούμενο.

12.24. Στο $[0,1]$ θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας $x \sim y$ αν και μόνο αν $x - y \in \mathbb{Q}$ και στη συνέχεια ορίζουμε $N \subset [0,1]$ που περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο από κάθε κλάση ισοδυναμίας. Ορίζουμε επίσης $T = [0,1] \setminus N$. Αποδείξτε ότι $\lambda^*(T) = 1$ και συμπεράνατε ότι

$$\lambda^*(N) + \lambda^*(T) > \lambda^*(N \cup T).$$

Υπόδειξη. Έστω ότι $\lambda^*(T) < 1$. Υπάρχει μετρήσιμο $A \supseteq T$ με $\lambda(A) = \lambda^*(T) < 1$. Τότε το $B = [0,1] \setminus A$ είναι μετρήσιμο και $\lambda(B) > 0$. Από το λήμμα του Steinhaus, το $B - B$ περιέχει διάστημα. Όμως $B \subseteq N$, άρα $B - B \subseteq N - N$. Αυτό οδηγεί σε άτοπο, διότι το $N - N$ δεν περιέχει διάστημα.

Έχουμε $N \cup T = [0,1]$ και το N δεν είναι μετρήσιμο, άρα $\lambda^*(N) > 0$. Έπεται ότι

$$\lambda^*(N) + \lambda^*(T) > \lambda^*(T) = 1 = \lambda([0,1]) = \lambda^*(N \cup T).$$

12.25. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Για κάθε $E \subseteq X$ ορίζουμε

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu(A) \mid A \in \mathcal{A},\ E \subseteq A\}.$$

Γνωρίζουμε ότι το μ^* είναι εξωτερικό μέτρο στο X. Έστω $\overline{\mu}$ το μέτρο που επάγεται από το μ^* στη σ-άλγεβρα $\mathcal{A}_{\mu^*}$ των μ^*-μετρήσιμων συνόλων. Αν το αρχικό μέτρο μ είναι σ–πεπερασμένο, αποδείξτε ότι ο $(X, \mathcal{A}_{\mu^*}, \overline{\mu})$ είναι η πλήρωση του $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Υπόδειξη. (α) Αποδεικνύουμε την σ–υποπροσθετικότητα του μ^*. Έστω $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία υποσυνόλων του X. Αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση $\mu^*(E_n) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε n βρίσκουμε $A_n \in \mathcal{A}$ ώστε $E_n \subseteq A_n$ και $\mu(A_n) < \mu^*(E_n) + \varepsilon/2^n$. Τότε, $\cup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, και

$$\mu^*(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) \le \mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, βλέπουμε ότι $\mu^*(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$.

(β) Έστω $(X, \tilde{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ η πλήρωση του μ. Δείξτε διαδοχικά τα εξής:

- Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε $\mu^*(A) = \mu(A)$.
- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_{\mu_*}$. Θα χρειαστείτε την εξής παρατήρηση: αν $E \subseteq X$ με $\mu^*(E) < \infty$, τότε υπάρχουν $F_n \in \mathcal{A}$ ώστε $F_n \supseteq E$ για κάθε n και $\mu(F_n) < \mu^*(E) + \frac{1}{n}$. Συνεπώς, $F = \cap_{n=1}^{\infty} F_n \supseteq E$ και $\mu(F) = \mu^*(E)$. Χρησιμοποιώντας αυτήν την παρατήρηση μπορούμε να γράψουμε
$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \leq \mu(F \cap A) + \mu(F \cap A^c) = \mu(F) = \mu^*(E)$$
για κάθε $A \in \mathcal{A}$.
- Αν $A, F \in \mathcal{A}$, $\mu(F) = 0$ και $B \subseteq F$, τότε $A \cup B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$. Δηλαδή, $\tilde{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{A}_{\mu^*}$.
- Αν $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ και $\overline{\mu}(A) = \mu^*(A) < \infty$, τότε $A \in \tilde{\mathcal{A}}$. Θα βοηθήσει η παρατήρηση του προηγούμενου βήματος.
- Αν το μ είναι σ–πεπερασμένο τότε $\mathcal{A}_{\mu^*} \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$.

12.26. Έστω μ ένα πεπερασμένο μέτρο στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$ και έστω μ^* το εξωτερικό μέτρο που επάγεται από το μ στο $\mathcal{P}(X)$. Υποθέτουμε ότι $\mu^*(E) = \mu^*(X)$ για κάποιο $E \subseteq X$ (αυτό δεν σημαίνει αναγκαστικά ότι $E \in \mathcal{A}$).

(α) Αποδείξτε ότι αν $A, B \in \mathcal{A}$ και $A \cap E = B \cap E$, τότε $\mu(A) = \mu(B)$.

(β) Θέτουμε $\mathcal{A}_E = \{A \cap E : A \in \mathcal{A}\}$, και ορίζουμε $\nu : \mathcal{A}_E \to [0, \infty]$ με $\nu(A \cap E) = \mu(A)$. Αποδείξτε ότι η $\mathcal{A}_E$ είναι σ-άλγεβρα στο E και ότι το ν είναι (καλά ορισμένο) μέτρο στην $\mathcal{A}_E$.

Υπόδειξη. (α) Έστω $A, B \in \mathcal{A}$ με $A \cap E = B \cap E$. Παρατηρούμε ότι, από τις $A \supseteq E \cap A$ και $X \cap A^c \supseteq E \cap A^c$,
$$\infty > \mu(X) = \mu(A) + \mu(X \cap A^c) \geqslant \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) = \mu^*(E) = \mu(X),$$
άρα $\mu(A) = \mu^*(E \cap A)$ και $\mu(X \cap A^c) = \mu^*(E \cap A^c)$. Ομοίως, $\mu(B) = \mu^*(E \cap B)$ και $\mu(X \cap B^c) = \mu^*(E \cap B^c)$. Αφού $\mu^*(E \cap A) = \mu^*(E \cap B)$, έπεται ότι $\mu(B) = \mu(A)$.

(β) Εύκολα ελέγχουμε ότι η $\mathcal{A}_E$ είναι σ-άλγεβρα. Από το (α) η ν είναι καλά ορισμένη: αν $C \in \mathcal{A}_E$ και $C = A \cap E = B \cap E$ για κάποια $A, B \in \mathcal{A}$ τότε $\mu(A) = \mu(B)$ και η τιμή $\nu(C)$ δεν εξαρτάται από την αναπαράσταση του C που θα θεωρήσουμε ($A \cap E$ ή $B \cap E$). Γράφοντας $\varnothing = \varnothing \cap E$ έχουμε $\nu(\varnothing) = \mu(\varnothing) = 0$.

Έστω τώρα $C_k = A_k \cap E$, ξένα ανά δύο, με $A_k \in \mathcal{A}$. Τότε, για κάθε $k \neq s$ έχουμε $(A_k \cap A_s) \cap E = (A_k \cap E) \cap (A_s \cap E) = C_k \cap C_s = \varnothing = \varnothing \cap E$, άρα $\mu(A_k \cap A_s) = \mu(\varnothing) = 0$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε
$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) + \mu(A_{n+1}) - \mu\left(A_n \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)\right) \\ &\geqslant \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) + \mu(A_{n+1}) - \sum_{k=1}^{n} \mu(A_{n+1} \cap A_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) + \mu(A_{n+1}).\end{aligned}$$
Επαγωγικά, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$, και αφού η αντίστροφη ανισότητα ισχύει κιαυτή, τελικά $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$. Αφήνοντας το $n \to \infty$ παίρνουμε $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$.

Τώρα,

$$\begin{aligned}\nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k\right) &= \nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(A_k \cap E)\right) = \nu\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \cap E\right)\\ &= \nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k \cap E) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(C_k).\end{aligned}$$

Άρα, η ν είναι μέτρο στην $\mathcal{A}_E$.

12.27. Έστω $X \neq \emptyset$. Ένα εξωτερικό μέτρο $\varphi : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ λέγεται *κανονικό* αν για κάθε $A \subseteq X$ υπάρχει φ-μετρήσιμο $B \supseteq A$ τέτοιο ώστε $\varphi(B) = \varphi(A)$.

Αποδείξτε ότι αν φ είναι ένα κανονικό εξωτερικό μέτρο στο X και $\varphi(X) < \infty$ τότε ένα σύνολο $B \subseteq X$ είναι φ-μετρήσιμο αν και μόνο αν

$$\varphi(X) = \varphi(B) + \varphi(X \setminus B).$$

Υπόδειξη. Έστω $B \subseteq X$ τέτοιο ώστε $\varphi(X) = \varphi(B) + \varphi(B^c)$. Θα δείξουμε ότι, για κάθε $A \subseteq X$ ισχύει η ανισότητα

$$\varphi(A \cap B) + \varphi(A \cap B^c) \leqslant \varphi(A).$$

Από την υποπροσθετικότητα του φ έχουμε και την αντίστροφη ανισότητα, άρα ισχύει ισότητα και αφού το $A \subseteq X$ είναι τυχόν συμπεραίνουμε ότι το B είναι φ-μετρήσιμο.

Το φ είναι κανονικό, άρα υπάρχουν φ-μετρήσιμα σύνολα C_1, D_2 τέτοια ώστε $B \subseteq C_1$, $X \setminus D_2$ και $\varphi(C_1) = \varphi(B)$, $\varphi(D_2) = \varphi(B^c)$. Θέτοντας $C_2 = D_2^c$ έχουμε $C_2 \subseteq B$ και

$$\varphi(C_2) = \varphi(X) - \varphi(D_2) = \varphi(X) - \varphi(B^c) = \varphi(B).$$

Σε αυτό το σημείο χρησιμοποιήσαμε την υπόθεση για το B. Συνεπώς, έχουμε βρει φ-μετρήσιμα σύνολο C_1, C_2 τέτοια ώστε $C_2 \subseteq B \subseteq C_1$ και

$$\varphi(C_2) = \varphi(B) = \varphi(C_1).$$

Έστω τώρα $A \subseteq X$. Αφού $A \cap B \subseteq A \cap C_1$ και $A \cap B^c \subseteq A \cap C_2^c$, έχουμε

$$\begin{aligned}\varphi(A \cap B) + \varphi(A \cap B^c) &\leqslant \varphi(A \cap C_1) + \varphi(A \cap C_2^c) \leqslant \varphi(A \cap C_1) + \varphi(A \cap C_1^c \cap C_2^c) + \varphi(A \cap C_1 \cap C_2^c)\\ &= \varphi(A \cap C_1) + \varphi(A \cap C_1^c) + \varphi(A \cap C_1 \cap C_2^c) \leqslant \varphi(A \cap C_1) + \varphi(A \cap C_1^c) + \varphi(C_1 \cap C_2^c)\\ &= \varphi(A) + \varphi(C_1) - \varphi(C_2) = \varphi(A).\end{aligned}$$

Η αντίστροφη κατεύθυνση προκύπτει άμεσα: αν το B είναι φ-μετρήσιμο τότε, για $A = X$, έχουμε

$$\varphi(X) = \varphi(X \cap B) + \varphi(X \cap B^c) = \varphi(B) + \varphi(X \setminus B).$$

12.28. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Ένα σύνολο $A \in \mathcal{A}$ λέγεται *άτομο* αν $\mu(A) > 0$ και για κάθε $B \in \mathcal{A}$ με $B \subseteq A$ ισχύει ότι $\mu(B) = 0$ ή $\mu(A \setminus B) = 0$.

(α) Αποδείξτε ότι αν το $A \in \mathcal{A}$ είναι άτομο τότε κάθε σύνολο $B \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $B \subseteq A$ και $\mu(B) > 0$ είναι επίσης άτομο.

(β) Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι το μ είναι σ-πεπερασμένο, αποδείξτε ότι υπάρχει $X_0 \subseteq X$ τέτοιο ώστε το X_0 να είναι αριθμήσιμη ένωση ξένων ανά δύο ατόμων του $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και το $X \setminus X_0$ να μην περιέχει άτομα.

Υπόδειξη. (α) Έστω $A \in \mathcal{A}$ άτομο και $B \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $B \subseteq A$ και $\mu(B) > 0$. Αν υποθέσουμε ότι το B δεν είναι άτομο, τότε υπάρχει $C \in \mathcal{A}$ με $C \subseteq B$ ώστε $\mu(C) > 0$ και $\mu(B \setminus C) > 0$. Όμως τότε, $C \subseteq A$, $\mu(C) > 0$ και $A \setminus C \supseteq B \setminus C$ άρα $\mu(A \setminus C) > 0$. Καταλήγουμε έτσι σε άτοπο: αφού το A είναι άτομο θα έπρεπε να έχουμε $\mu(C) = 0$ ή $\mu(A \setminus C) = 0$.

(β) Παρατηρούμε αρχικά ότι αρκεί να δείξουμε το ζητούμενο για πεπερασμένα μέτρα. Πράγματι, έστω $M := (X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου. Γράφουμε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, όπου τα $B_n \in \mathcal{A}$ είναι ξένα ανά δύο και $\mu(B_n) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε τις σ-άλγεβρες $\mathcal{A}_n = \{A \in \mathcal{A} : A \subseteq B_n\}$. Οι χώροι $M_n := \left(B_n, \mathcal{A}_n, \mu\big|_{\mathcal{A}_n}\right)$ είναι χώροι πεπερασμένου μέτρου. Αν υποθέσουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για χώρους πεπερασμένου μέτρου, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $X_n \subseteq B_n$ που είναι αριθμήσιμη ένωση ξένων ανά δύο ατόμων του M_n ώστε $B_n = X_n \cup Y_n$ και το Y_n δεν περιέχει άτομα του M_n. Παρατηρούμε ότι κάθε άτομο του M_n ανήκει στην $\mathcal{A}$ και ικανοποιεί τον ορισμό του ατόμου στον M.

Ορίζουμε $X_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. Από τα προηγούμενα, παίρνοντας υπόψιν και το γεγονός ότι τα B_n είναι ξένα, το X_0 είναι αριθμήσιμη ένωση ατόμων του M. Μένει να δείξουμε ότι το $X \setminus X_0$ δεν περιέχει άτομα. Έστω $A \subseteq X \setminus X_0$ άτομο. Γράφουμε $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cap B_n)$. Αφού $\mu(A) > 0$, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $\mu(A \cap B_m) > 0$. Αφού $A \cap B_m \subseteq A$, από το (α) έχουμε ότι το $A \cap B_m$ είναι άτομο στον M, άρα είναι άτομο και στον M_m. Όμως,

$$A \cap B_m \subseteq (X \setminus X_0) \cap B_m \subseteq (X \setminus X_m) \cap B_m = B_m \setminus X_m = Y_m,$$

και έχουμε άτοπο διότι το Y_m δεν περιέχει άτομα του M_m.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι ο $(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι χώρος πεπερασμένου μέτρου. Στην Άσκηση 2.18 αποδείξαμε το εξής: Για κάθε οικογένεια $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ υπάρχει αριθμήσιμη υποοικογένεια $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ ώστε:

(i) Αν $A \in \mathcal{F}$, τότε $\mu(A) > 0$.

(ii) Τα στοιχεία της $\mathcal{F}$ είναι ξένα ανά δύο.

(iii) Αν $F = \bigcup \mathcal{F}$, το $X \setminus F$ δεν περιέχει κανένα στοιχείο της $\mathcal{E}$ γνήσια θετικού μ-μέτρου.

Εφαρμόζοντας το παραπάνω για την οικογένεια $\mathcal{E}$ των ατόμων του $(X, \mathcal{A}, \mu)$ βρίσκουμε αριθμήσιμη υποοικογένεια $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ ξένων ανά δύο ατόμων ώστε, αν θέσουμε $X_0 = \bigcup \mathcal{F}$, το $X \setminus X_0$ να μην περιέχει κανένα στοιχείο της $\mathcal{E}$ γνήσια θετικού μ-μέτρου, δηλαδή να μην περιέχει άτομα. Αυτό είναι ακριβώς το ζητούμενο.

12.29. Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Ένα εξωτερικό μέτρο φ στο $\mathcal{P}(X)$ λέγεται *μετρικό εξωτερικό μέτρο* αν ικανοποιεί το εξής: αν $E_1, E_2 \subseteq X$ και $\mathrm{dist}(E_1, E_2) > 0$, τότε $\varphi(E_1 \cup E_2) = \varphi(E_1) + \varphi(E_2)$. Αποδείξτε ότι, τότε, κάθε $B \in \mathcal{B}(X)$ είναι φ-μετρήσιμο. Συνεπώς, ο περιορισμός του φ στην $\mathcal{B}(X)$ είναι μέτρο.

Υπόδειξη. Η οικογένεια $\mathcal{A}$ των φ-μετρήσιμων συνόλων είναι σ-άλγεβρα, συνεπώς για να δείξουμε ότι $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{A}$ αρκεί να δείξουμε ότι κάθε κλειστό σύνολο $F \subseteq X$ ανήκει στην $\mathcal{A}$. Θεωρούμε $A \subseteq X$ με $\varphi(A) < \infty$ και θα δείξουμε ότι

$$\varphi(A \cap F) + \varphi(A \cap F^c) \leqslant \varphi(A).$$

Για κάθε $n \geqslant 1$ ορίζουμε $B_n = \{x \in A \setminus F : \mathrm{dist}(x, F) \geqslant 1/n\}$. Η (B_n) είναι αύξουσα ακολουθία συνόλων και αφού το F είναι κλειστό έχουμε $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = A \setminus F$.

Για κάθε $n \geqslant 1$ έχουμε $\mathrm{dist}(B_n, F) \geqslant 1/n$, οπότε εφαρμόζοντας την υπόθεση παίρνουμε

$$\varphi(A) \geqslant \varphi((A \cap F) \cup B_n) = \varphi(A \cap F) + \varphi(B_n).$$

Θα δείξουμε ότι $\varphi(B_n) \to \varphi(A \setminus F)$ και έτσι θα έχουμε ότι

$$\varphi(A) \geqslant \varphi(A \cap F) + \lim_{n\to\infty} \varphi(B_n) = \varphi(A \cap F) + \varphi(A \setminus F).$$

Για κάθε $n \geqslant 1$ ορίζουμε $C_n = B_{n+1} \setminus B_n$. Παρατηρούμε ότι αν $x \in C_{n+1}$ και $d(x, y) < \frac{1}{n(n+1)}$ τότε

$$\mathrm{dist}(y, F) \leqslant d(x, y) + \mathrm{dist}(x, F) < \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n},$$

δηλαδή $y \notin F_n$. Έπεται ότι $\mathrm{dist}(C_{n+1}, B_n) \geqslant \frac{1}{n(n+1)}$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\varphi(B_{2m+1}) &\geqslant \varphi(C_{2m} \cup B_{2m-1}) = \varphi(C_{2m}) + \varphi(B_{2m-1})\\ &\geqslant \varphi(C_{2m}) + \varphi(C_{2m-2} \cup B_{2m-3}) \geqslant \cdots \geqslant \sum_{k=1}^{m} \varphi(C_{2k}).\end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο ελέγχουμε ότι

$$\varphi(B_{2m}) \geqslant \sum_{k=1}^{m} \varphi(C_{2m-1}).$$

Αφού $\varphi(B_n) \leqslant \varphi(A) < \infty$ για κάθε n, συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(C_{2k}) < \infty \quad \text{και} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(C_{2k-1}) < \infty.$$

Από την υποπροσθετικότητα του φ έχουμε

$$\varphi(A \setminus F) \leqslant \varphi(B_n) + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(C_k) \longrightarrow 0$$

καθώς το $n \to \infty$. Συνεπώς,

$$\varphi(A \setminus F) \leqslant \liminf \varphi(B_n) \leqslant \limsup \varphi(B_n) \leqslant \varphi(A \setminus F),$$

δηλαδή $\varphi(B_n) \to \varphi(A \setminus F)$, και έπεται το ζητούμενο.

12.30. Για κάθε $E \subseteq \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$J_*(E) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{N} \ell(I_j) : E \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} I_j, I_j \ \text{κλειστά διαστήματα}, N \in \mathbb{N} \right\}.$$

(α) Αποδείξτε ότι $J_*(E) = J_*(\overline{E})$.

(β) Αποδείξτε ότι $\lambda^*(E) \leqslant J_*(E)$ και δώστε παράδειγμα συνόλου E για το οποίο $\lambda^*(E) < J_*(E)$.

Υπόδειξη. (α) Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι αν $I_1, \ldots, I_N$ είναι κλειστά διαστήματα και $\overline{E} \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} I_j$

τότε (προφανώς) $E \subseteq \bigcup_{j=1}^N I_j$, ενώ αν $E \subseteq \bigcup_{j=1}^N I_j$ τότε $\overline{E} \subseteq \overline{\bigcup_{j=1}^N I_j} = \bigcup_{j=1}^N \overline{I_j} = \bigcup_{j=1}^N I_j$. Άρα,

$$\left\{\sum_{j=1}^N \ell(I_j) : E \subseteq \bigcup_{j=1}^N I_j, I_j \text{ κλειστά διαστήματα}\right\} = \left\{\sum_{j=1}^N \ell(I_j) : \overline{E} \subseteq \bigcup_{j=1}^N I_j, I_j \text{ κλειστά διαστήματα}\right\}$$

και έπεται από τον ορισμό ότι $J_*(E) = J_*(\overline{E})$.

(β) Παρατηρούμε ότι κάθε πεπερασμένη ένωση κλειστών διαστημάτων είναι Borel σύνολο, άρα

$$\begin{aligned}\lambda^*(E) = \inf\{\lambda(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), E \subseteq B\} &\leqslant \inf\left\{\lambda\left(\bigcup_{j=1}^N I_j\right) : E \subseteq \bigcup_{j=1}^N I_j, I_j \text{ κλειστά διαστήματα}, N \in \mathbb{N}\right\}\\ &\leqslant \inf\left\{\sum_{j=1}^N \ell(I_j) : E \subseteq \bigcup_{j=1}^N I_j, I_j \text{ κλειστά διαστήματα}, N \in \mathbb{N}\right\} = J_*(E).\end{aligned}$$

Για το παράδειγμα θεωρούμε το σύνολο $E = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Το E είναι αριθμήσιμο σύνολο, άρα $\lambda^*(E) = 0$. Από την άλλη πλευρά, $\overline{E} = [0,1]$ και από το (α) έχουμε $J_*(E) = J_*([0,1])$. Όμως, αν $[0,1] \subseteq\subseteq \bigcup_{j=1}^N I_j$ τότε

$$\sum_{j=1}^N \ell(I_j) = \sum_{j=1}^N \lambda(I_j) \geqslant \lambda\left(\bigcup_{j=1}^N I_j\right) \geqslant \lambda([0,1]) = 1,$$

απ' όπου έπεται (θεωρώντας την κάλυψη $[0,1] \subseteq I_1 := [0,1]$) ότι

$$\inf\left\{\sum_{j=1}^N \ell(I_j) : E \subseteq \bigcup_{j=1}^N I_j, I_j \text{ κλειστά διαστήματα}, N \in \mathbb{N}\right\} = 1,$$

δηλαδή $J_*([0,1]) = 1$. Έτσι έχουμε δείξει ότι $\lambda^*(E) = 0 < 1 = J_*(E)$.

12.31. Έστω $A \subset [0,1]$. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς:

(α) Αν το A είναι ανοικτό τότε $\lambda(A) = \lambda(\overline{A})$.

(β) Αν $\lambda(A^\circ) = \lambda(\overline{A})$ τότε το A είναι μετρήσιμο.

Υπόδειξη. (α) Έστω $0 < \varepsilon < 1$. Γράφουμε $\mathbb{Q} \cap (0,1) = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ και για κάθε $n \geqslant 1$ θεωρούμε το ανοικτό διάστημα $J_n = \left(q_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right) \cap (0,1)$. Θεωρούμε το ανοικτό σύνολο $A = \bigcup_{n=1}^\infty I_n$. Τότε, $A \subset [0,1]$ και

$$\lambda(A) \leqslant \sum_{n=1}^\infty \lambda(I_n) \leqslant \sum_{n=1}^\infty \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

Όμως, $A \supseteq \mathbb{Q} \cap (0,1)$, άρα $\overline{A} = [0,1]$. Συνεπώς,

$$\lambda(A) \leqslant \varepsilon < 1 = \lambda(\overline{A}).$$

(β) Τα $A^\circ, \overline{A}$ είναι Lebesgue μετρήσιμα (ως ανοικτό και κλειστό σύνολο αντίστοιχα) και $A^\circ \subseteq \overline{A} \subset [0,1]$. Συνεπώς,

$$\lambda(\overline{A} \setminus A^\circ) = \lambda(\overline{A}) - \lambda(A^\circ) = 0$$

από την υπόθεση. Παρατηρούμε ότι $A \setminus A^\circ \subseteq \overline{A} \setminus A^\circ$, άρα το $A \setminus A^\circ$ είναι επίσης μετρήσιμο σύνολο, από την πληρότητα του μέτρου Lebesgue. Έπεται τώρα ότι το $A = A^\circ \cup (A \setminus A^\circ)$ είναι κι αυτό μετρήσιμο σύνολο.

12.32. Έστω C το σύνολο του Cantor. Αποδείξτε ότι $C+C=[0,2]$ και εξετάστε αν το $C\cap\mathbb{Q}$ είναι πυκνό στο C.

Υπόδειξη. Έστω $z\in[0,2]$. Τότε,
$$\frac{z}{2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\epsilon_k}{3^k},\qquad \epsilon_k\in\{0,1,2\}.$$
Ορίζουμε $(a_k,b_k)=(0,0),(2,0)$ ή $(2,2)$ αν $\epsilon_k=0,1$ ή 2 αντίστοιχα, και θεωρούμε τους
$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{3^k}\quad\text{και}\quad y=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{3^k}.$$
Τότε, $x,y\in C$ και
$$\frac{x+y}{2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k+b_k}{2}\cdot\frac{1}{3^k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\epsilon_k}{3^k}=\frac{z}{2},$$
δηλαδή $z=x+y\in C+C$. Ο άλλος εγκλεισμός, $C+C\subseteq[0,2]$, είναι άμεσος αφού $C\subseteq[0,1]$.

Έστω $x\in C$. Υπάρχουν $a_k\in\{0,2\}$ ώστε $x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{3^k}$. Για κάθε $n\geqslant 1$ ορίζουμε $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{3^k}$. Είναι φανερό ότι $x_n\in\mathbb{Q}$. Θέτοντας $a_k'=a_k$ αν $1\leqslant k\leqslant n$ και $a_k'=0$ αν $k>n$, έχουμε $x_n=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k'}{3^k}$ και $a_k'\in\{0,2\}$ για κάθε $k\geqslant 1$, απ' όπου φαίνεται ότι $x_n\in C$. Έχουμε λοιπόν $x_n\in C\cap\mathbb{Q}$ και
$$|x-x_n|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{a_k}{3^k}\right|\leqslant 2\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{3^k}=\frac{1}{3^n}\longrightarrow 0.$$
Άρα, $x\in\overline{C\cap\mathbb{Q}}$. Δηλαδή, το $C\cap\mathbb{Q}$ είναι πυκνό στο C.

12.33. Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(E)<\infty$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με
$$g(x)=\lambda((x+E)\cap E)$$
είναι συνεχής και $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$.

Υπόδειξη. Αποδεικνύουμε πρώτα τη συνέχεια της g στο 0. Θεωρούμε αρχικά την περίπτωση μιας πεπερασμένης ένωσης $F=\bigcup_{k=1}^{m}(a_k,b_k)$ ξένων ανά δύο φραγμένων ανοικτών διαστημάτων. Παρατηρούμε ότι
$$(x+F)\cap F=\left(\bigcup_{k=1}^{m}(a_k+x,b_k+x)\right)\cap\left(\bigcup_{k=1}^{m}(a_k,b_k)\right)\supseteq\bigcup_{k=1}^{m}((a_k+x,b_k+x)\cap(a_k,b_k))$$
για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Συνεπώς,
$$\begin{aligned}\lambda(F)&=\sum_{k=1}^{m}(b_k-a_k)=\lim_{t\to0}\sum_{k=1}^{m}(\min\{b_k,t+b_k\}-\max\{a_k,t+a_k\})=\lim_{t\to0}\sum_{k=1}^{m}\lambda((a_k,b_k)\cap(t+a_k,t+b_k))\\&=\lim_{t\to0}\lambda\left(\bigcup_{k=1}^{m}((a_k+x,b_k+x)\cap(a_k,b_k))\right)\leqslant\liminf_{t\to0}\lambda((t+F)\cap F)\leqslant\limsup_{t\to0}\lambda((t+F)\cap F)\\&\leqslant\lambda(F),\end{aligned}$$
δηλαδή
$$\lim_{t\to0}\lambda((t+F)\cap F)=\lambda(F).$$

Έστω τώρα K συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και βρίσκουμε F όπως παραπάνω ώστε $K \subset F$ και $\lambda(F \setminus K) < \varepsilon/3$. Θέτουμε $B = F \setminus K$. Τότε,

$$\begin{aligned}\lambda(K) &\leqslant \lambda(F) = \lim_{t\to 0}\lambda((t+F)\cap F) = \lim_{t\to 0}\lambda([(t+K)\cap K]\cup[(t+K)\cap B]\cup[(t+B)\cap K]\cup[(t+B)\cap B])\\ &= \lim_{t\to 0}\Big(\lambda((t+K)\cap K) + \lambda((t+K)\cap B) + \lambda((t+B)\cap K) + \lambda((t+B)\cap B)\Big)\\ &\leqslant \liminf_{t\to 0}\lambda((t+K)\cap K) + 3\cdot\varepsilon/3 \leqslant \limsup_{t\to 0}\lambda((t+K)\cap K) + \varepsilon\\ &\leqslant \lambda(K) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι

$$\lim_{t\to 0}\lambda((t+K)\cap K) = \lambda(K).$$

Τέλος, έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(E) < \infty$. Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και συμπαγές K όπως παραπάνω ώστε $K \subset E$ και $\lambda(E \setminus K) < \varepsilon/3$. Τότε,

$$\begin{aligned}\lambda(E) &\leqslant \lambda(K) + \varepsilon = \lim_{t\to 0}\lambda((t+K)\cap K) + \varepsilon \leqslant \liminf_{t\to 0}\lambda((t+E)\cap E) + \varepsilon \leqslant \limsup_{t\to 0}\lambda((t+E)\cap E) + \varepsilon\\ &\leqslant \lambda(E) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $\lim\limits_{t\to 0}\lambda((t+E)\cap E) = \lambda(E)$. Δηλαδή, η g είναι συνεχής στο 0.

Παρατηρούμε τώρα ότι, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned}|g(x)-g(y)| &= |\lambda((x+E)\cap E) - \lambda((y+E)\cap E)| = |\lambda([(x+E)\setminus(y+E)]\cap E) - \lambda([(y+E)\setminus(x+E)]\cap E)|\\ &\leqslant \lambda((x+E)\setminus(y+E)) + \lambda((y+E)\setminus(x+E)) = \lambda((x-y+E)\setminus E) + \lambda((y-x+E)\setminus E)\\ &= \lambda(x-y+E) - \lambda((x-y+E)\cap E) + \lambda(y-x+E) - \lambda((y-x+E)\cap E)\\ &= 2\lambda(E) - g(x-y) - g(y-x).\end{aligned}$$

Από τη συνέχεια της g στο 0 έπεται ότι

$$\lim_{x\to y}|g(x)-g(y)| = 2\lambda(E) - 2g(0) = 0,$$

άρα η g είναι συνεχής στο y για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

Για το δεύτερο ερώτημα, θεωρούμε E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(E) < \infty$ και τυχόν $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε φραγμένο μετρήσιμο $F \subseteq E$ ώστε $\lambda(E) < \lambda(F) + \varepsilon$. Παρατηρούμε ότι, αφού το F είναι φραγμένο, υπάρχει $x_0 > 0$ ώστε για κάθε $x > x_0$ να ισχύει $(x+F)\cap F = \emptyset$. Θέτουμε $B = E \setminus F$. Τότε, για κάθε $x > x_0$ έχουμε

$$\begin{aligned}g(x) &= \lambda((x+E)\cap E) = \lambda((t+F)\cap F) + \lambda((t+F)\cap B) + \lambda((t+B)\cap F) + \lambda((t+B)\cap B)\\ &\leqslant \lambda((t+F)\cap F) + \lambda(B) + \lambda(t+B) + \lambda((B) = 3\lambda(B) < 3\varepsilon.\end{aligned}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

12.34. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(E) > 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν ξένα σύνολα E_1, E_2 τέτοια ώστε $E = E_1 \cup E_2$ και $\lambda(E) = \lambda^*(E_1) = \lambda^*(E_2)$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο $D = \left\{\frac{m}{3^n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$. Παρατηρήστε ότι $D - D = D$. Ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο $\mathbb{R}$ ως εξής:

$$x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in D.$$

Η $\sim$ χωρίζει το $\mathbb{R}$ σε κλάσεις ισοδυναμίας, και εφαρμόζοντας το αξίωμα της επιλογής βρίσκουμε ένα σύνολο N το οποίο περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο από κάθε κλάση ισοδυναμίας. Τα σύνολα $x + N$, $x \in D$ είναι ξένα ανά δύο (εξηγήστε γιατί, χρησιμοποιώντας την $D - D = D$) και $\mathbb{R} = \bigcup_{x\in D}(x + N)$.

Χωρίζουμε τώρα το D στα ξένα υποσύνολα $D_1 = \left\{\frac{2m}{3^n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$ και $D_2 = \left\{\frac{2m+1}{3^n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$. Παρατηρήστε ότι

$$D_2 - D_2 = D_1 - D_1 = D_2.$$

Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με $0 < \lambda(E) < \infty$. Θεωρούμε τα σύνολα

$$E_1 = E \cap \left(\bigcup_{x\in D_1}(x + N)\right) \quad \text{και} \quad E_2 = E \cap \left(\bigcup_{x\in D_2}(x + N)\right).$$

Τότε, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ και $E = E_1 \cup E_2$.

Υποθέτουμε ότι $\lambda^*(E_1) < \lambda(E)$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Μπορούμε να βρούμε Lebesgue μετρήσιμο σύνολο F τέτοιο ώστε $E_1 \subseteq F \subseteq E$ και $\lambda(F) = \lambda^*(E_1) < \lambda(E)$. Τότε, $\lambda(E \setminus F) > 0$ και από το λήμμα του Steinhaus υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος ώστε

$$\begin{aligned}(-\delta, \delta) \subseteq (E \setminus F) - (E \setminus F) \subseteq E_2 - E_2 &\subseteq \bigcup_{x,y\in D_2}[(x + N) - (y + N)] = \bigcup_{x,y\in D_2}[(x - y) + N - N] \\ &= \bigcup_{z\in D_2}[z + N - N].\end{aligned}$$

Επιλέγουμε n αρκετά μεγάλο ώστε $\frac{1}{3^n} \in (-\delta, \delta)$. Τότε, υπάρχουν $z \in D_2$ και $x, y \in N$ ώστε $\frac{1}{3^n} = z + x - y$. Αφού $z \in D_2$ έχουμε $\frac{1}{3^n} - z \neq 0$. Επίσης, $\frac{1}{3^n} - z \in D$, άρα $x \sim y$. Δηλαδή, $x, y \in N$, $x \neq y$ και $x \sim y$, το οποίο είναι άτοπο από τον ορισμό του N.

Ομοίως, αν υποθέσουμε ότι $\lambda^*(E_2) < \lambda(E)$ τότε μπορούμε να βρούμε Lebesgue μετρήσιμο σύνολο F τέτοιο ώστε $E_2 \subseteq F \subseteq E$ και $\lambda(F) = \lambda^*(E_2) < \lambda(E)$. Τότε, $\lambda(E \setminus F) > 0$ και από το λήμμα του Steinhaus υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος ώστε

$$\begin{aligned}(-\delta, \delta) \subseteq (E \setminus F) - (E \setminus F) \subseteq E_1 - E_1 &\subseteq \bigcup_{x,y\in D_1}[(x + N) - (y + N)] = \bigcup_{x,y\in D_1}[(x - y) + N - N] \\ &= \bigcup_{z\in D_2}[z + N - N].\end{aligned}$$

Αυτό οδηγεί, όπως έχουμε δει, σε άτοπο.

12.35. Θεωρούμε το σύνολο $A := \left\{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_k}{k!} \mid \delta_k = 0 \ \text{ ή } \ 1\right\}$. Αποδείξτε ότι το A είναι κλειστό σύνολο με κενό εσωτερικό και μέτρο $\lambda(A) = 0$.

Εξετάστε αν υπάρχει φυσικός αριθμός s τέτοιος ώστε το σύνολο

$$s \cdot A := A + A + \cdots + A = \{y_1 + \cdots + y_s \mid y_i \in A\}$$

να έχει θετικό μέτρο.

Υπόδειξη. Για κάθε $n \geqslant 1$ ορίζουμε $C_n = \left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{\delta_k}{k!} \mid \delta_k = 0 \ \text{ ή } \ 1\right\}$. Παρατηρήστε ότι το C_n έχει πληθάριθμο

$|C_n| \leqslant 2^n$. Ορίζουμε επίσης

$$A_n = \bigcup_{x \in C_n} \left(x + \left[0, \tfrac{2}{(n+1)!}\right] \right).$$

Έστω $n \geqslant 1$. Παρατηρούμε ότι αν $y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_k}{k!} \in A$ τότε $x = \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta_k}{k!} \in C_n$ και

$$0 \leqslant y - x = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\delta_k}{k!} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \frac{2}{(n+1)!},$$

δηλαδή $y \in A_n$. Έπεται ότι

$$\lambda(A) \leqslant \lambda(A_n) \leqslant 2^n \frac{2}{(n+1)!} \longrightarrow 0$$

καθώς $n \to \infty$ (το γεγονός ότι το όριο ισούται με 0 προκύπτει εύκολα με το κριτήριο του λόγου). Έπεται ότι $\lambda(A) = 0$. Είναι τώρα προφανές ότι το A έχει κενό εσωτερικό.

Θα δείξουμε επίσης ότι το A είναι κλειστό. Έστω $x_m = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_{m,k}}{k!} \in A$ και ας υποθέσουμε ότι $x_m \to x \in \mathbb{R}$. Δείχνουμε αρχικά ότι, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, η ακολουθία $(\delta_{m,k})_m$ είναι τελικά σταθερή. Έστω ότι αυτό δεν ισχύει και έστω k_0 ο μικρότερος φυσικός για τον οποίο υπάρχουν $s_1 < s_2 < \cdots < s_m < \cdots$ με την ιδιότητα $|\delta_{s_{m+1},k_0} - \delta_{s_m,k_0}| = 1$ για κάθε m. Υπάρχει m_0 τέτοιος ώστε για κάθε $1 \leqslant k < k_0$ η ακολουθία $(\delta_{s_m,k})_{m=m_0}^{\infty}$ να είναι σταθερή. Τότε, για κάθε $m \geqslant m_0$ έχουμε

$$|x_{s_{m+1}} - x_{s_m}| \geqslant \frac{|\delta_{s_{m+1},k_0} - \delta_{s_m,k_0}|}{k_0!} - \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{k!} > \frac{1}{k_0!} - \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{k!} =: \delta_{k_0}.$$

Παρατηρήστε ότι

$$\delta_{k_0} > \frac{1}{k_0!} - \frac{2}{(k_0+1)!} \geqslant 0.$$

Αυτό οδηγεί σε άτοπο, αφού είχαμε υποθέσει ότι η (x_m) είναι συγκλίνουσα, άρα και βασική.

Είδαμε ότι για κάθε $k \geqslant 1$ υπάρχουν $\delta_k \in \{0,1\}$ και $m_k \geqslant 1$ ώστε $\delta_{m,k} = \delta_k$ για κάθε $m \geqslant m_k$. Θα δείξουμε ότι $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_k}{k!}$, άρα $x \in A$. Θεωρούμε $\varepsilon > 0$ και βρίσκουμε k_0 τέτοιον ώστε $\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \varepsilon$. Αν θέσουμε $M = \max\{m_1, \ldots, m_{k_0}\}$ τότε για κάθε $m > M$ έχουμε $\delta_{m,k} = \delta_k$ για κάθε $k = 1, \ldots, k_0$, άρα

$$|x_m - x| = \left| \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{\delta_{m,k} - \delta_k}{k!} \right| \leqslant \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \varepsilon,$$

και το ζητούμενο έπεται (από τον ορισμό του ορίου ακολουθίας).

Δείχνουμε τώρα ότι για κάθε $s \in \mathbb{N}$ το σύνολο $s \cdot A$ είναι κλειστό. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f_s : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ με $f_s(x_1, x_2, \ldots, x_s) = x_1 + x_2 + \cdots + x_s$. Το A είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$, άρα το $A \times A \times \cdots \times A$ (s-φορές) είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^s$. Όμως, $s \cdot A = f_s(A \times A \times \cdots \times A)$, άρα το $s \cdot A$ είναι συμπαγές και ειδικότερα είναι κλειστό.

Για κάθε $n \geqslant 1$ ορίζουμε $D_n = C_n + \cdots + C_n$. Παρατηρήστε ότι $|D_n| \leqslant 2^{ns}$ και

$$s \cdot A_n \subseteq \bigcup_{x \in D_n} \left(x + \left[0, \tfrac{2s}{(n+1)!}\right] \right).$$

Συνεπώς,

$$\lambda(s \cdot A) \leqslant \lambda(s \cdot A_n) \leqslant 2^{ns} \frac{2s}{(n+1)!} \longrightarrow 0$$

καθώς $n \to \infty$ (πάλι από το κριτήριο του λόγου). Αυτό αποδεικνύει ότι $\lambda(s \cdot A) = 0$ για κάθε $s \in \mathbb{N}$.

12.36. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $A \in \mathcal{A}$. Αποδείξτε ότι κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f : A \to [0, \infty]$ γράφεται στη μορφή $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_{A_n}$, όπου $0 \leqslant a_n < \infty$ και $A_n \in \mathcal{A}$.

Υπόδειξη. Υπάρχει αύξουσα ακολουθία απλών μετρήσιμων συναρτήσεων s_m με $s_m \geqslant 0$ και $s_m \to f$. Ορίζουμε $g_1 = s_1$ και $g_k = s_k - s_{k-1}$ για $k \geqslant 2$. Τότε, $g_k \geqslant 0$, οι g_k είναι απλές μετρήσιμες, και $\sum_{k=1}^{m} g_k = s_m \to f$, άρα $f = \sum_{k=1}^{\infty} g_k$.

Γράφουμε $g_1 = \sum_{n=0}^{t_1} a_n \chi_{A_n}$ και για κάθε $k \geqslant 2$ γράφουμε $g_k = \sum_{n=t_{k-1}}^{t_k} a_n \chi_{A_n}$, όπου $0 \leqslant a_n < \infty$, $A_n \in \mathcal{A}$. Τότε,

$$\sum_{n=0}^{t_m} a_n \chi_{A_n} = \sum_{k=1}^{m} g_k = s_m \to f.$$

Η ακολουθία $G_N := \sum_{n=0}^{N} a_n \chi_{A_n}$ είναι μια αύξουσα ακολουθία απλών μετρήσιμων συναρτήσεων και για την υπακολουθία (G_{t_m}) έχουμε $G_{t_m} = s_m \to f$. Έπεται ότι $G_N \to f$, άρα $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_{A_n}$.

12.37. (α) Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in E$.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f(0) = 0$ και υπάρχει η $f'(0)$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ αν $x \neq 0$ και $g(0) = 0$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη.

Υπόδειξη. (α) Αν $\lambda(E) = 0$ μπορούμε να θεωρήσουμε τη σταθερή συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$, $f(x) \equiv 1$, η οποία είναι ολοκληρώσιμη. Αν $\lambda(E) > 0$ τότε μπορούμε να γράψουμε $E = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$, όπου $E_n = E \cap \{x : n \leqslant |x| < n+1\}$ για $n \geqslant 1$ και $E_0 = E \cap \{x : |x| < 1\}$. Τα E_n είναι Lebesgue μετρήσιμα, ξένα, και $0 \leqslant \lambda(E_n) \leqslant 2$.

Για κάθε $n \geqslant 0$ ορίζουμε $\alpha_n = 1$ αν $\lambda(E_n) = 0$ και $\alpha_n = \frac{1}{\lambda(E_n)} \cdot \frac{1}{2^n}$ αν $\lambda(E_n) > 0$. Παρατηρήστε ότι $\alpha_n \lambda(E_n) \leqslant 1/2^n$ για κάθε $n \geqslant 0$. Στη συνέχεια θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \chi_{E_n}.$$

Η f είναι καλά ορισμένη, μετρήσιμη και παίρνει παντού γνήσια θετικές τιμές. Τέλος, από το θεώρημα Beppo Levi,

$$\int_E f\, d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \lambda(E_n) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2,$$

άρα η f είναι ολοκληρώσιμη.

(β) Αφού υπάρχει η $f'(0)$ και $f(0) = 0$, μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε αν $0 < |x| < \delta$ τότε $|f(x)/x - f'(0)| \leqslant 1$, δηλαδή $|g(x)| = |f(x)/x| \leqslant 1 + |f'(0)|$ στο $(-\delta, 0) \cup (0, \delta)$. Για $|x| \geqslant \delta$ έχουμε $|g(x)| = |f(x)/x| \leqslant |f(x)|/\delta$. Αφού $g(0) = 0$, συμπεραίνουμε ότι

$$|g| \leqslant (1 + |f'(0)|)\chi_{(-\delta,\delta)} + \frac{1}{\delta}|f|\chi_{\{x:|x|\geqslant\delta\}}.$$

Αφού η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη, έπεται ότι

$$\int |g|\, d\lambda \leqslant (1 + |f'(0)|) \cdot 2\delta + \frac{1}{\delta} \int_{\{x:|x|\geqslant\delta\}} |f|\, d\lambda \leqslant (1 + |f'(0)|) \cdot 2\delta + \frac{1}{\delta} \int_{\mathbb{R}} |f|\, d\lambda < \infty,$$

άρα η g είναι ολοκληρώσιμη.

12.38. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$g(x)=\int_{[x,x+1]} f\,d\lambda.$$

Αποδείξτε ότι η g είναι συνεχής και $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$.

Υπόδειξη. Έστω $\epsilon>0$. Η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη, άρα υπάρχει $0<\delta<1$ τέτοιο ώστε: για κάθε μετρήσιμο $E\subset\mathbb{R}$ με $\lambda(E)<\delta$ ισχύει $\int_E |f|d\lambda<\epsilon$ (βασική άσκηση-παρατήρηση: απόλυτη συνέχεια του ολοκληρώματος). Επίσης, υπάρχει $M>0$ τέτοιος ώστε $\int_{[M,\infty)}|f|d\lambda<\epsilon$ (βασική άσκηση, συνέπεια του θεωρήματος μονότονης σύγκλισης).

Έστω $x<y\in\mathbb{R}$ με $|y-x|<\delta/2$. Τότε,

$$|g(x)-g(y)|=\left|\int_{[x,x+1]} fd\lambda-\int_{[y,y+1]} fd\lambda\right|=\left|\int_{[x,y)} fd\lambda-\int_{(x+1,y+1]} fd\lambda\right|\leqslant\int_{[x,y)\cup(x+1,y+1]}|f|d\lambda<\epsilon,$$

αφού $\lambda([x,y)\cup(x+1,y+1])=2(y-x)<\delta$. Αυτό αποδεικνύει ότι η g είναι συνεχής. Για τον δεύτερο ισχυρισμό, παρατηρούμε ότι, για κάθε $x>M$,

$$|g(x)|\leqslant\int_{[x,x+1]}|f|d\lambda\leqslant\int_{[M,\infty)}|f|d\lambda<\epsilon.$$

12.39. Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $0<\lambda(E)<\infty$ και $f:E\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M>0$ τέτοιος ώστε

$$\left|\frac{1}{\lambda(A)}\int_A f\,d\lambda\right|\leqslant M$$

για κάθε μετρήσιμο $A\subseteq E$ με $\lambda(A)>0$. Αποδείξτε ότι $|f(x)|\leqslant M$ σχεδόν παντού στο E.

Υπόδειξη. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ θεωρούμε το σύνολο $B_n=\{x\in E:|f(x)|>M+1/n\}$. Θα δείξουμε ότι $\lambda(B_n)=0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Τότε, για το σύνολο $B=\{x\in E:|f(x)|>M\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$ θα έχουμε $\lambda(B)=0$, άρα $|f(x)|\leqslant M$ σχεδόν παντού στο E.

Γράφουμε το $B_n=B_{n,1}\cup B_{n,2}$, όπου $B_{n,1}=\{x\in E:f(x)>M+1/n\}$ και $B_{n,2}=\{x\in E:-f(x)>M+1/n\}$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\lambda(B_{n,1})=\lambda(B_{n,2})=0$. Παρατηρούμε ότι

$$\left(M+\frac{1}{n}\right)\lambda(B_{n,1})\leqslant\left|\int_{B_{n,1}} f\,d\lambda\right|\leqslant M\lambda(B_{n,1})$$

από την υπόθεση (για $A=B_{n,1}$) συνεπώς $\lambda(B_{n,1})=0$. Με τον ίδιο τρόπο ελέγχουμε ότι $\lambda(B_{n,2})=0$.

12.40. (α) Έστω G ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι

$$\lambda(G)=\sup\left\{\int_{\mathbb{R}} f\,d\lambda:0\leqslant f\leqslant\chi_G,f\ \text{συνεχής}\right\}.$$

(β) Έστω F κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι

$$\lambda(F)=\inf\left\{\int_{\mathbb{R}} f\,d\lambda:f\geqslant\chi_F,f\ \text{συνεχής}\right\}.$$

Υπόδειξη. (α) Έστω G ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Θεωρούμε τις $f_n(x)=\left(\frac{d(x,G^c)}{1+d(x,G^c)}\right)^{1/n}$, $n\in\mathbb{N}$. Κάθε f_n

είναι συνεχής. Παρατηρούμε ότι $f_n \equiv 1$ στο G^c και ότι, αφού το G^c είναι κλειστό, $d(x,G^c) > 0$ για κάθε $x \in G$, άρα $0 < \frac{d(x,G^c)}{1+d(x,G^c)} < 1$ για κάθε $x \in G$. Άρα, $0 \leqslant f_n \leqslant \chi_G$ και $f_n \leqslant f_{n+1}$ με $f_n(x) \to \chi_G(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης,

$$\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda \to \int_{\mathbb{R}} \chi_G d\lambda = \lambda(G),$$

άρα

$$\lambda(G) \geqslant \sup\left\{\int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda : 0 \leqslant f \leqslant \chi_G, f \text{ συνεχής}\right\}.$$

Η αντίστροφη ανισότητα είναι απλή, αφού για κάθε συνεχή f με $0 \leqslant f \leqslant \chi_G$ ισχύει $\int f d\lambda \leqslant \int \chi_G d\lambda = \lambda(G)$.

(β) Έστω F κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Για κάθε f συνεχή με $f \geqslant \chi_F$ έχουμε $\int f d\lambda \geqslant \int \chi_F d\lambda = \lambda(F)$, άρα

$$\lambda(F) \leqslant \inf\left\{\int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda : f \geqslant \chi_F, f \text{ συνεχής}\right\}.$$

Για την αντίστροφη ανισότητα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lambda(F) < \infty$. Για τυχόν $\epsilon > 0$ βρίσκουμε ανοικτό $G \supseteq F$ με $\lambda(G) < \lambda(F) + \epsilon$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{d(x,G^c)}{d(x,G^c)+d(x,F)}$, η οποία είναι καλά ορισμένη γιατί $G^c \cap F = \varnothing$ και μη αρνητική. Για $x \in F$ έχουμε $g(x) = 1$, άρα $\chi_F \leqslant g$. Επίσης,

$$\int_{\mathbb{R}} g d\lambda = \int_G g d\lambda + \int_{G^c} g d\lambda = \int_G g d\lambda \leqslant \int_G 1\, d\lambda = \lambda(G) < \lambda(F) + \epsilon.$$

Έπεται ότι

$$\inf\left\{\int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda : f \geqslant \chi_F, f \text{ συνεχής}\right\} < \lambda(F) + \epsilon,$$

και αφού το $\epsilon > 0$ ήταν τυχόν, έχουμε το ζητούμενο.

12.41. (α) Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(A) < \infty$, και $f : A \to [0,\infty)$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $G : (0,\infty) \to [0,\infty)$ με

$$G(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} k\varepsilon \cdot \lambda(\{x \in A : k\varepsilon \leqslant f(x) < (k+1)\varepsilon\}).$$

Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} G(\varepsilon) = \int_A f\, d\lambda$.

(β) Έστω B μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(B) < \infty$, και $g : B \to [0,\infty)$ μετρήσιμη συνάρτηση. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $B_n := \{x \in B : |g(x)| \geqslant n\}$. Αποδείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n) < \infty$.

Υπόδειξη. (α) Έστω $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε τη μετρήσιμη συνάρτηση

$$g_\varepsilon := \sum_{k=0}^{\infty} k\varepsilon \cdot \chi\chi_{\{x\in A: k\varepsilon \leqslant f < (k+1)\varepsilon\}}.$$

Παρατηρούμε ότι $g_\varepsilon \leqslant f$, άρα $G(\varepsilon) = \int_A g_\varepsilon d\lambda$. Επίσης,

$$\begin{aligned}\left|\int_A f\,d\lambda - \int_A g_\varepsilon d\lambda\right| &\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\{x\in A: k\varepsilon\leqslant f<(k+1)\varepsilon\}} |f - g_\varepsilon|\,d\lambda \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \lambda(\{x \in A : k\varepsilon \leqslant f < (k+1)\varepsilon\})\varepsilon \leqslant \varepsilon\lambda(A),\end{aligned}$$

το οποίο αποδεικνύει ότι $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} G(\varepsilon) = \int_A f\,d\lambda$.

(β) Υποθέτουμε αρχικά ότι $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n) < \infty$. Τότε,

$$\int_B |g|\,d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\{n\leqslant|g|<n+1\}} |g|\,d\lambda \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\lambda(B_n \setminus B_{n+1}) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)[\lambda(B_n) - \lambda(B_{n+1})].$$

Παρατηρούμε ότι $\lambda(B_0) = \lambda(B) < \infty$ και για κάθε $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{N}(n+1)[\lambda(B_n) - \lambda(B_{n+1})] = \sum_{n=0}^{N} \lambda(B_n) - (N+1)\lambda(B_{N+1}) \leqslant \sum_{n=0}^{N} \lambda(B_n) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(B_n).$$

Έπεται ότι

$$\int_B |g|\,d\lambda = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N}(n+1)[\lambda(B_n) - \lambda(B_{n+1})] \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(B_n) < \infty,$$

άρα η g είναι ολοκληρώσιμη. Για την αντίστροφη κατεύθυνση υποθέτουμε ότι $\int_B |g|\,d\lambda < \infty$ και γράφουμε

$$\int_B |g|\,d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\{n\leqslant|g|<n+1\}} |g|\,d\lambda \geqslant \sum_{n=0}^{\infty} n\lambda(B_n \setminus B_{n+1}) = \sum_{n=0}^{\infty} n[\lambda(B_n) - \lambda(B_{n+1})].$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{N} n[\lambda(B_n) - \lambda(B_{n+1})] = \sum_{n=1}^{N} \lambda(B_n) - N\lambda(B_{N+1}).$$

Από γνωστή άσκηση (συνέπεια του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης) έχουμε $(N+1)\lambda(B_{N+1}) \to 0$, άρα και $N\lambda(B_{N+1}) \to 0$. Από τα παραπάνω έπεται ότι

$$\sum_{n=1}^{N} \lambda(B_n) \leqslant \int_B |g|\,d\lambda + N\lambda(B_{N+1}),$$

και αφήνοντας το $N \to \infty$ παίρνουμε $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n) \leqslant \int_B |g|\,d\lambda$.

12.42. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι για κάθε $t > 0$ η συνάρτηση $g_t(x) = f(tx)$ είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}} g_t\,d\lambda = \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} f\,d\lambda.$$

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f(n^2 x)$ συγκλίνει

λ-σχεδόν παντού.

(γ) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο, με $\lambda(A) < \infty$. Αποδείξτε ότι σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ το σύνολο $D(x) = \{n \in \mathbb{N} : n^2 x \in A\}$ είναι πεπερασμένο.

Υπόδειξη. (α) Ακολουθήστε τη γνωστή διαδικασία. Αρκεί να επαληθεύσουμε το ζητούμενο στην περίπτωση που $f = \chi_A$ για κάποιο Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(A) < \infty$. Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}} g_t\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \chi_A(tx)\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{\frac{1}{t}A}(x) d\lambda(x) = \lambda\left(\frac{1}{t}A\right) = \frac{1}{t}\lambda(A) = \frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}} \chi_A d\lambda = \frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}} g\, d\lambda.$$

(β) Θεωρούμε την $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f(n^2 x)|$. Από το θεώρημα Beppo Levi και το (α),

$$\int_{\mathbb{R}} |g| d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |f(n^2 x)| d\lambda(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right) \int_{\mathbb{R}} |f| d\lambda < \infty,$$

αφού η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει και η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη. Άρα, η g είναι ολοκληρώσιμη και, ειδικότερα, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n^2 x)|$ συγκλίνει λ-σχεδόν παντού. Έπεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f(n^2 x)$ συγκλίνει λ-σχεδόν παντού.

(γ) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο, με $\lambda(A) < \infty$. Εφαρμόζοντας το (β) για την ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f = \chi_A$ βλέπουμε ότι σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $|D(x)| = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_A(n^2 x) < \infty$, όπου $|D(x)|$ ο πληθάριθμος του $D(x) = \{n \in \mathbb{N} : n^2 x \in A\}$. Δηλαδή, σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ το σύνολο $D(x)$ είναι πεπερασμένο.

12.43. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και έστω f_n, f ολοκληρώσιμες συναρτήσεις με $\int_X |f_n - f|\, d\mu \to 0$. Υποθέτουμε επίσης ότι $A_n, A \in \mathcal{A}$ και $\mu(A_n \triangle A) \to 0$. Αποδείξτε ότι

$$\int_{A_n} f_n d\mu \to \int_A f d\mu.$$

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\Big|\int_{A_n} f_n\, d\mu - \int_A f\, d\mu\Big| &= \Big|\int_{A_n} f_n\, d\mu - \int_{A_n} f\, d\mu + \int_{A_n} f\, d\mu - \int_A f\, d\mu\Big| \\
&\leqslant \Big|\int_{A_n} f_n\, d\mu - \int_{A_n} f\, d\mu\Big| + \Big|\int_{A_n} f\, d\mu - \int_A f\, d\mu\Big| \\
&= \Big|\int_{A_n} (f_n - f)\, d\mu\Big| + \Big|\int_{A_n \cap A} f\, d\mu + \int_{A_n \setminus A} f\, d\mu - \int_{A \setminus A_n} f\, d\mu - \int_{A \cap A_n} f\, d\mu\Big| \\
&\leqslant \int_{A_n} |f_n - f|\, d\mu + \Big|\int_{A_n \setminus A} f\, d\mu\Big| + \Big|\int_{A \setminus A_n} f\, d\mu\Big| \\
&\leqslant \int |f_n - f|\, d\mu + \int_{A_n \setminus A} |f|\, d\mu + \int_{A \setminus A_n} |f|\, d\mu \\
&= \int |f_n - f|\, d\mu + \int_{A_n \triangle A} |f|\, d\mu.
\end{aligned}$$

Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη και $\mu(A_n \triangle A) \to 0$, από βασική άσκηση 2.4 έχουμε $\int_{A_n \triangle A} |f|\, d\mu \to 0$, και από την υπόθεση έχουμε $\int |f_n - f|\, d\mu \to 0$. Έπεται το ζητούμενο.

12.44. Υπολογίστε, με πλήρη αιτιολόγηση, τα όρια

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]}\frac{\ln(x+n)}{n}e^{-x}\cos x\,d\lambda(x)$$

και

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,\infty)}\frac{1}{(1+x/n)^n x^{1/n}}\,d\lambda(x).$$

Υπόδειξη. (α) Θέτουμε $f_n(x)=\frac{\ln(x+n)}{n}e^{-x}\cos x$, $x\in[0,1]$. Παρατηρούμε ότι $\frac{\ln(x+n)}{n}\leqslant\frac{x+n-1}{n}\leqslant 1$ για κάθε $x\in[0,1]$, συνεπώς

$$|f_n(x)|\leqslant|\cos x|e^{-x}\leqslant g(x):=e^{-x}$$

στο $[0,1]$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Επίσης, για κάθε $x\in[0,1]$ έχουμε $\frac{\ln(x+n)}{n}\to 0$ όταν $n\to\infty$, απ¨ όπου έπεται ότι $f_n(x)\to 0$. Η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$, άρα εφαρμόζεται το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης και παίρνουμε

$$\int_{[0,1]}\frac{\ln(x+n)}{n}e^{-x}\cos x\,d\lambda(x)\longrightarrow 0.$$

(β) Θέτουμε $f_n(x)=\frac{1}{(1+x/n)^n x^{1/n}}$, $x\in(0,\infty)$. Παρατηρούμε ότι:

- Για $x\in(0,1]$ και $n\geqslant 2$ έχουμε $|f_n(x)|\leqslant\frac{1}{x^{1/n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{x}}$ και $f_n(x)\to e^{-x}$ όταν $n\to\infty$, διότι $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\to e^x$ και $x^{1/n}\to 1$. Αφού η $1/\sqrt{x}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $(0,1]$, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης παίρνουμε
$$\int_{(0,1]}f_n(x)d\lambda(x)\to\int_{(0,1]}e^{-x}d\lambda(x).$$
- Για $x\in(1,\infty)$ και $n\geqslant 2$ έχουμε $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\geqslant\frac{n(n-1)}{2}\frac{x^2}{n^2}\geqslant\frac{x^2}{4}$ και $x^{1/n}>1$, άρα $|f_n(x)|\leqslant\frac{4}{x^2}$. Επίσης, $f_n(x)\to e^{-x}$ όπως πριν. Αφού η $4/x^2$ είναι ολοκληρώσιμη στο $(1,\infty)$, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης παίρνουμε
$$\int_{(1,\infty)}f_n(x)d\lambda(x)\to\int_{(1,\infty)}e^{-x}d\lambda(x).$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$\int_{[0,\infty)}\frac{1}{(1+x/n)^n x^{1/n}}\,d\lambda(x)\longrightarrow\int_{(0,\infty)}e^{-x}d\lambda(x)=\int_0^\infty e^{-x}dx=1.$$

12.45. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x)=\frac{a_1}{x-c_1}+\frac{a_2}{x-c_2}+\cdots+\frac{a_n}{x-c_n},$$

όπου $a_1,\dots,a_n>0$ και $c_1<c_2<\cdots<c_n$ στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι, για κάθε $t>0$,

$$\lambda(\{x:f(x)>t\})=\lambda(\{x:f(x)<-t\})=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{t}.$$

Υπόδειξη. Έστω $t>0$. Η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(c_1,c_2),\dots,(c_{n-1},c_n)$, $(c_n,+\infty)$ και η εξίσωση $f(x)=t$ έχει ακριβώς n ρίζες $x_1<\cdots<x_n$, ακριβώς μία σε καθένα από αυτά τα

διαστήματα. Δηλαδή,

$$c_1 < x_1 < c_2 < x_2 < c_3 < \cdots < c_{n-1} < x_{n-1} < c_n < x_n < +\infty.$$

Άρα, $\{x : f(x) > t\} = \bigcup_{k=1}^n (c_k, x_k)$ και

$$\lambda(\{x : f(x) > t\}) = \sum_{k=1}^n (x_k - c_k) = \sum_{k=1}^n x_k - \sum_{k=1}^n c_k.$$

Αρκεί λοιπόν να υπολογίσουμε το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης $f(x) = t$. Πολλαπλασιάζοντάς την με $\prod_{k=1}^n (x - c_k)$ παίρνουμε ισοδύναμα την πολυωνυμική εξίσωση

$$t\prod_{k=1}^n (x - c_k) - \sum_{k=1}^n a_k \prod_{j\neq k} (x - c_j) = 0.$$

Το πολυώνυμο στο αριστερό μέλος γράφεται

$$tx^n - \left(t\sum_{k=1}^n c_k + \sum_{k=1}^n a_k \right) x^{k-1} + p(x),$$

όπου $p(x)$ πολυώνυμο βαθμού το πολύ ίσου με $n-2$. Έπεται ότι οι ρίζες του έχουν άθροισμα

$$\sum_{k=1}^n = \frac{1}{t}\left(t\sum_{k=1}^n c_k + \sum_{k=1}^n a_k \right) = \sum_{k=1}^n c_k + \frac{1}{t}\sum_{k=1}^n a_k.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε

$$\lambda(\{x : f(x) > t\}) = \sum_{k=1}^n x_k - \sum_{k=1}^n c_k = \frac{1}{t}\sum_{k=1}^n a_k.$$

Με τον ίδιο τρόπο δουλεύουμε στην περίπτωση $t < 0$.

12.46. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση τέτοια ώστε το σύνολο $D = \{x \in \mathbb{R} : f \text{ ασυνεχής στο } x\}$ να είναι αριθμήσιμο. Δείξτε ότι η f είναι Borel μετρήσιμη.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι Lebesgue μετρήσιμη αν και μόνο αν υπάρχει Borel μετρήσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\lambda(\{f \neq g\}) = 0$.

Υπόδειξη. (α) Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $b \in \mathbb{R}$ το σύνολο $A := \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leqslant b\}$ είναι σύνολο Borel. Γράφουμε

$$A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leqslant b\} = A_1 \cup A_2 := \{x \in \mathbb{R} \setminus D : f(x) \leqslant b\} \cup \{x \in D : f(x) \leqslant b\}.$$

Το A_2 είναι αριθμήσιμο, ως υποσύνολο του αριθμήσιμου συνόλου D, άρα είναι F_σ-σύνολο (αριθμήσιμη ένωση μονοσυνόλων) και συνεπώς σύνολο Borel. Από την υπόθεση, η συνάρτηση $f\big|_{\mathbb{R}\setminus D}$ είναι συνεχής. Άρα, το σύνολο

$$A_1 = \{x \in \mathbb{R} \setminus D : f(x) \leqslant b\} = \{x \in \mathbb{R} \setminus D : f\big|_{\mathbb{R}\setminus D}(x) \leqslant b\}$$

είναι κλειστό στο $\mathbb{R} \setminus D$ και γράφεται ως $A_1 = (\mathbb{R} \setminus D) \cap F$ για κάποιο κλειστό $F \subseteq \mathbb{R}$. Αφού το $\mathbb{R} \setminus D$ είναι G_δ-σύνολο, έπεται ότι το A_1 είναι Borel. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι το $A = A_1 \cup A_2$

είναι σύνολο Borel.

(β) ($\Longleftarrow$) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και Borel μετρήσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\lambda(Z) = 0$ όπου $Z = \{f \neq g\}$. Για κάθε $b \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\{f \leqslant b\} = \{x \in Z : f(x) \leqslant b\} \cup \{x \in \mathbb{R} \setminus Z : f(x) \leqslant b\} = \{x \in Z : f(x) \leqslant b\} \cup \{x \in \mathbb{R} \setminus Z : g(x) \leqslant b\}.$$

Παρατηρούμε ότι $\{x \in Z : f(x) \leqslant b\} \subseteq Z$ και αφού $\lambda(Z) = 0$ έπεται ότι το $\{x \in Z : f(x) \leqslant b\}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο. Επίσης,

$$\{x \in \mathbb{R} \setminus Z : g(x) \leqslant b\} = (\mathbb{R} \setminus Z) \cap \{g \leqslant b\},$$

το οποίο είναι Lebesgue μετρήσιμο σύνολο, αφού το $\mathbb{R} \setminus Z$ είναι Lebesgue μετρήσιμο και το $\{g \leqslant b\}$ είναι σύνολο Borel. Άρα, το $\{f \leqslant b\}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο σύνολο για κάθε $b \in \mathbb{R}$, και συνεπώς η f είναι Lebesgue μετρήσιμη.

($\Longrightarrow$) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε αρχικά ότι $f = \chi_E$ για κάποιο Lebesgue μετρήσιμο σύνολο. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει G_δ-σύνολο B ώστε $E \subseteq B$ και $\lambda(B \setminus E) = 0$. Αν θέσουμε $g = \chi_B$ τότε η g είναι Borel μετρήσιμη και $\{f \neq g\} = B \setminus E$, άρα $\lambda(\{f \neq g\}) = 0$.

Έστω τώρα απλή μετρήσιμη συνάρτηση $f = \sum_{j=1}^m a_j \chi_{E_j}$. Από το προηγούμενο βήμα μπορούμε να βρούμε Borel μετρήσιμες συναρτήσεις g_j ώστε $\lambda(\{\chi_{E_j} \neq g_j\}) = 0$ για κάθε $j = 1, \ldots, m$. Τότε, για την Borel μετρήσιμη συνάρτηση $g = \sum_{j=1}^m a_j g_j$ έχουμε

$$\{f \neq g\} \subseteq \bigcup_{j=1}^m \{\chi_{E_j} \neq g_j\},$$

άρα $\lambda(\{f \neq g\}) = 0$.

Στη συνέχεια θεωρούμε τυχούσα Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $f \geqslant 0$. Υπάρχει ακολουθία απλών μετρήσιμων συναρτήσεων $0 \leqslant s_n \nearrow f$. Από το προηγούμενο βήμα, για κάθε n μπορούμε να βρούμε Borel μετρήσιμη συνάρτηση g_n ώστε $\lambda(Z_n) = 0$, όπου $Z_n = \{s_n \neq g_n\}$. Ορίζουμε $Z = \bigcup_{n=1}^\infty Z_n$. Τότε, $\lambda(Z) = 0$ και $g_n = s_n \nearrow f$ στο $\mathbb{R} \setminus Z$. Ορίζουμε $g := \limsup g_n$. Τότε, η g είναι Borel μετρήσιμη και για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus Z$ έχουμε

$$g(x) = \limsup g_n(x) = \limsup s_n(x) = \lim s_n(x) = f(x).$$

Άρα $\{f \neq g\} \subseteq Z$ και έπεται ότι $\lambda(\{f \neq g\}) = 0$.

Τέλος, αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι τυχούσα μετρήσιμη συνάρτηση, από το προηγούμενο βήμα βρίσκουμε Borel μετρήσιμες συναρτήσεις $g_1, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε $\lambda(\{f^+ \neq g_1\}) = \lambda(\{f^- \neq g_2\}) = 0$ και θέτοντας $g = g_1 - g_2$ έχουμε ότι η g είναι Borel μετρήσιμη και $\{f \neq g\} \subseteq \{f^+ \neq g_1\} \cup \{f^- \neq g_2\}$, απ' όπου έπεται ότι $\lambda(\{f \neq g\}) = 0$.

12.47. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f_n : X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$-μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε

$$\limsup n^2 \mu(\{|f_n| \geqslant 1/n^2\}) < \infty.$$

Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ συγκλίνει μ-σχεδόν για κάθε $x \in X$.

Υπόδειξη. Θέτουμε $\alpha := \limsup n^2 \mu(\{|f_n| \geqslant 1/n^2\}) < \infty$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $n^2 \mu(\{|f_n| \geqslant 1/n^2\}) < \alpha + 1$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Δηλαδή, αν ορίσομε $A_n = \{x : |f_n(x)| \geqslant 1/n^2\}$ τότε $\mu(A_n) < (\alpha + 1)/n^2$ για κάθε

$n \geqslant n_0$. Έπεται ότι

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \mu(A_n) < (\alpha+1) \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Από το λήμμα Borel-Cantelli συμπεραίνουμε ότι

$$\mu\left(\bigcap_{n=n_0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 0$$

. Τώρα, για κάθε $x \notin \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, δηλαδή μ-σχεδόν για κάθε $x \in X$, έχουμε ότι υπάρχει $n_x \geqslant n_0$ τέτοιος ώστε για κάθε $k > n_x$ να έχουμε $x \notin A_k$, δηλαδή για κάθε $k > n_x$ να έχουμε $|f_k(x)| < 1/k^2$, το οποίο σημαίνει ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| < \sum_{k=1}^{n_x} |f_k(x)| + \sum_{k=n_x+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty.$$

Άρα, μ-σχεδόν για κάθε $x \in X$ η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ συγκλίνει (ακριβέστερα, συγκλίνει απολύτως).

12.48. Έστω (a_k) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε $f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ με

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k |x-a_k|}$$

αν $x \notin A := \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ και $f(x) = \infty$ αν $x \in A$. Αποδείξτε ότι

$$\lambda(\{x \in \mathbb{R} : f(x) < 1\}) = \infty.$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο

$$B = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} : |x-a_k| \leqslant 1/2^k\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} [a_k - 1/2^k, a_k + 1/2^k].$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lambda(B) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \lambda([a_k - 1/2^k, a_k + 1/2^k] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2^k} = 2.$$

Συνεπώς, $\lambda(\mathbb{R} \setminus B) = +\infty$. Τώρα, παρατηρούμε ότι αν $x \in \mathbb{R} \setminus B$ τότε $|x-a_k| > 1/2^k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, δηλαδή $\frac{1}{4^k|x-a_k|} < \frac{2^k}{4^k} = \frac{1}{2^k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus B$,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k |x-a_k|} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1,$$

δηλαδή $\mathbb{R} \setminus B \subseteq \{x \in \mathbb{R} : f(x) < 1\}$. Αφού $\lambda(\mathbb{R} \setminus B) = +\infty$, συμπεραίνουμε ότι $\lambda(\{x \in \mathbb{R} : f(x) < 1\}) = \infty$.

12.49. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η δείκτρια συνάρτηση χ_E είναι το κατά σημείο όριο μιας ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων αν και μόνο αν το E είναι ταυτόχρονα G_δ και F_σ σύνολο.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι υπάρχει ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f_n(x) \to \chi_E(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αυτό σημαίνει ότι $E = \{x : \lim f_n(x) = 1\}$ και $E^c = \{x : \lim f_n(x) = 0\}$, και έπεται ότι

$$E = \{x : \lim f_n(x) > 1/2\} \quad \text{και} \quad E^c = \{x : \lim f_n(x) < 1/2\}.$$

Πράγματι, για την πρώτη ισότητα παρατηρούμε ότι αν $x \in E$ τότε $\lim f_n(x) = 1 > 1/2$ και, αντίστροφα, αν $\lim f_n(x) > 1/2$ τότε, αφού $\lim f_n(x) \in \{0,1\}$, αναγκαστικά $\lim f_n(x) = 1$. Η δεύτερη ισότητα εξηγείται με τον ίδιο τρόπο.

Τώρα, παρατηρούμε ότι (εξηγήστε γιατί)

$$E = \{x : \lim f_n(x) > 1/2\} = \bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}\Big\{x : f_n(x) \geqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{m}\Big\}.$$

Από τη συνέχεια των f_n έχουμε ότι όλα τα σύνολα $\left\{x : f_n(x) \geqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{m}\right\}$ είναι κλειστά, άρα το E είναι F_σ-σύνολο ως αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων. Όμοια,

$$E^c = \{x : \lim(-f_n)(x) > -1/2\} = \bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}\Big\{x : -f_n(x) \geqslant -\frac{1}{2} + \frac{1}{m}\Big\}$$

και όπως πριν συμπεραίνουμε ότι το E^c είναι F_σ-σύνολο, άρα το E είναι G_δ-σύνολο.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι το E είναι G_δ και F_σ-σύνολο. Μπορούμε να βρούμε (εξηγήστε γιατί) φθίνουσα ακολουθία $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ ανοικτών συνόλων και αύξουσα ακολουθία $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ κλειστών συνόλων ώστε

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \quad \text{και} \quad E = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Χρησιμοποιώντας το λήμμα του Urysohn ορίζουμε συνεχείς συναρτήσεις ώστε: $0 \leqslant f_n \leqslant 1$, $f_n(x) = 0$ για κάθε $x \in G_n^c$ και $f_n(x) = 1$ για κάθε $x \in F_n$ (παρατηρήστε ότι $F_n \subseteq E \subseteq G_n$, άρα $F_n \cap G_n^c = \emptyset$, δηλαδή τα κλειστά σύνολα F_n και G_n^c είναι ξένα, οπότε όντως εφαρμόζεται το λήμμα του Urysohn). Τώρα δείχνουμε ότι $\lim f_n(x) = \chi_E(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Πράγματι:

1. Αν $x \in E$ τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in F_{n_0}$, άρα $x \in F_n$ για κάθε $n \geqslant n_0$, άρα $f_n(x) = 1$ για κάθε $n \geqslant n_0$, άρα $f_n(x) \to 1 = \chi_E(x)$.

2. Αν $x \notin E$ τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x \notin G_{n_0}$, άρα $x \notin G_n$ για κάθε $n \geqslant n_0$, άρα $f_n(x) = 0$ για κάθε $n \geqslant n_0$, άρα $f_n(x) \to 0 = \chi_E(x)$.

12.50. Υπολογίστε τα

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \frac{1 + nx}{n + x} \cos x \, dx$$

και

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^n (1 + \sqrt{n}|\sin t|)\, dt.$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Υπόδειξη. (α) Ορίζουμε $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \frac{1+nx}{n+x} \cos x \cdot \chi_{[0,n]}(x)$. Τότε,

$$\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \frac{1 + nx}{n + x} \cos x \, dx = \int_0^\infty f_n \, d\lambda.$$

Έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = e^{-x} x \cdot \cos x, \qquad x > 0.$$

Παρατηρούμε ότι $(1-x/n)^n \leqslant e^{-x}$ και $\frac{1+nx}{n+x} \leqslant x+1$ για κάθε $x>0$. Συνεπώς,

$$|f_n(x)| = \left|\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \frac{1+nx}{n+x} \cos x \cdot \chi_{[0,n]}(x)\right| \leqslant e^{-x}(x+1)$$

για κάθε $x>0$. Η $g(x)=e^{-x}(x+1)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,+\infty)$. Συνεπώς, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης και έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \frac{1+nx}{n+x} \cos x\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n d\lambda = I := \int_0^\infty e^{-x} x \cdot \cos x\, dx.$$

Με ολοκλήρωση κατά μέρη βλέπουμε ότι $I=0$.

(β) Η συνάρτηση $t \mapsto (1-t^2)^n(1+\sqrt{n}|\sin t|)$ είναι άρτια, άρα

$$\sqrt{n}\int_{-1}^1 (1-t^2)^n(1+\sqrt{n}|\sin t|)\, dt = 2\sqrt{n}\int_0^1 (1-t^2)^n(1+\sqrt{n}|\sin t|)\, dt.$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $x = t\sqrt{n}$ βλέπουμε ότι

$$2\sqrt{n}\int_0^1 (1-t^2)^n(1+\sqrt{n}|\sin t|)\, dt = 2\int_0^{\sqrt{n}} (1-x^2/n)^n(1+\sqrt{n}|\sin(x/\sqrt{n})|)\, dx.$$

Ορίζουμε $g_n(x) = (1-x^2/n)^n(1+\sqrt{n}|\sin(x/\sqrt{n})|)\chi_{[0,\sqrt{n}]}(x)$. Τότε,

$$2\int_0^{\sqrt{n}} (1-x^2/n)^n(1+\sqrt{n}|\sin(x/\sqrt{n})|)\, dx = \int_0^\infty g_n\, d\lambda.$$

Έχουμε $(1+\sqrt{n}|\sin(x/\sqrt{n})|) \to 1+x$ για κάθε $x>0$, άρα

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = e^{-x^2}(1+q), \qquad x>0.$$

Παρατηρούμε ότι $(1-x^2/n)^n \leqslant e^{-x^2}$ και $1+\sqrt{n}|\sin(x/\sqrt{n})| \leqslant 1+x$ για κάθε $x>0$. Συνεπώς,

$$|g_n(x)| = \left|(1-x^2/n)^n(1+\sqrt{n}|\sin(x/\sqrt{n})|)\chi_{[0,\sqrt{n}]}(x)\right| \leqslant e^{-x^2}(x+1)$$

για κάθε $x>0$. Η $g(x)=e^{-x^2}(x+1)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,+\infty)$. Συνεπώς, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης και έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\int_{-1}^1 (1-t^2)^n(1+\sqrt{n}|\sin t|)\, dt = \lim_{n\to\infty} 2\int_0^\infty g_n d\lambda = J := 2\int_0^\infty e^{-x^2}(x+1)\, dx.$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

βλέπουμε ότι $J = \sqrt{\pi}+1$.

12.51. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου με $0<\mu(X)<\infty$ και $f \in L^1(\mu)$ φραγμένη συνάρτηση τέτοια ώστε

$$\int_X f^2\, d\mu = \int_X f^3\, d\mu = \int_X f^4\, d\mu.$$

Αποδείξτε ότι $f = \chi_A$ για κατάλληλο $A \in \mathcal{A}$.

Υπόδειξη. Αφού $\mu(X) < \infty$ και η f είναι φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση, οι f^2, f^3, f^4 είναι ολοκληρώσιμες. Το ίδιο ισχύει για την $g = f^2(1-f)^2$, η οποία είναι επιπλέον μη αρνητική. Παρατηρούμε ότι

$$\int_X g\,d\mu = \int_X f^2\,d\mu - 2\int_X f^3\,d\mu + \int_X f^4\,d\mu = 0$$

λόγω της υπόθεσης. Έπεται ότι $g(x) = f^2(x)(1-f(x))^2 = 0$ μ-σχεδόν παντού. Θέτουμε $A = \{x \in X : f(x) = 1\}$ και $B = \{x \in X : f(x) = 0\}$. Παρατηρούμε ότι $X \setminus (A \cup B) = \{x \in X : g(x) \neq 0\}$, άρα $\mu(X \setminus (A \cup B)) = 0$. Αφού $f = \chi_A$ στο $A \cup B$, συμπεραίνουμε ότι $f = \chi_A$ μ-σχεδόν παντού. Άρα, $f = \chi_A$ στον $L^1(\mu)$.

12.52. Έστω $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ νετρήσιμη συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: υπάρχει $\alpha > 0$ τέτοιος ώστε

$$\left|\frac{g(t)}{t}\right| \leqslant \alpha$$

για κάθε $t \geqslant 1$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_1^t f(s)g(s)\,d\lambda(s) = 0.$$

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, έχουμε $\lim_{M\to\infty}\int_M^\infty |f(s)|\,d\lambda(s) = 0$ (εξηγήστε γιατί), άρα υπάρχει $M > 1$ ώστε

$$\int_M^\infty |f(s)|\,d\lambda(s) < \frac{\varepsilon}{2\alpha}.$$

Θέτουμε

$$N = \max\left\{M, \frac{2\alpha\|f\|_1 M}{\varepsilon}\right\}.$$

Για κάθε $t > N$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{t}\int_1^t f(s)g(s)\,d\lambda(s)\right| &\leqslant \frac{1}{t}\int_1^t |f(s)g(s)|\,d\lambda(s) \leqslant \frac{\alpha}{t}\int_1^t s|f(s)|\,d\lambda(s)\\
&= \frac{\alpha}{t}\int_1^M s|f(s)|\,d\lambda(s) + \frac{\alpha}{t}\int_M^t s|f(s)|\,d\lambda(s)\\
&\leqslant \frac{\alpha}{t}\int_1^M M|f(s)|\,d\lambda(s) + \alpha\int_M^t \frac{s}{t}|f(s)|\,d\lambda(s)\\
&\leqslant \frac{M\alpha}{t}\int_1^\infty |f(s)|\,d\lambda(s) + \alpha\int_M^t |f(s)|\,d\lambda(s)\\
&\leqslant \frac{M\alpha\|f\|_1}{t} + \alpha\int_M^\infty |f(s)|\,d\lambda(s)\\
&\leqslant \frac{M\alpha\|f\|_1}{N} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Από τον ορισμό του ορίου,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_1^t f(s)g(s)\,d\lambda(s) = 0.$$

12.53. (α) Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+k)$ συγκλίνει σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$. Υπολογίστε το

$$\lim_{t\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f(x+t) + f(x)|\, d\lambda(x).$$

Υπόδειξη. (α) Σταθεροποιούμε $m \in \mathbb{Z}$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\int_m^{m+1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(x+k)| d\lambda(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_m^{m+1} |f(x+k)| d\lambda(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{m+k}^{m+k+1} |f(x)| d\lambda(x) \\ &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} |f(x)| d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} |f|\, d\lambda < \infty\end{aligned}$$

αφού $f \in L^1(\mathbb{R})$. Αυτό σημαίνει ότι η σειρά $\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+k)$ συγκλίνει (και μάλιστα απολύτως) σχεδόν για κάθε $x \in [m, m+1)$. Αφού το $m \in \mathbb{Z}$ ήταν τυχόν, εξαιρώντας ένα σύνολο μέτρου 0 σε κάθε $[m, m+1)$, βλέπουμε ότι η σειρά $\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x_k)$ συγκλίνει απολύτως σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Υποθέτουμε αρχικά ότι $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση που μηδενίζεται έξω από το διάστημα $[-m, m]$. Αν $t > 2m$ τότε έχουμε $g(x+t) = 0$ για κάθε $x \in [-m, m]$. Επίσης, αν $g(x+t) \neq 0$ τότε $x \in [-t-m, -t+m]$ άρα $g(x) = 0$ αφού $-t+m < -m$. Δηλαδή, για κάθε $t > 2m$ έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x+t) + g(x)|\, d\lambda(x) = \int_{[-m,m]} |g(x)|\, d\lambda(x) + \int_{[-t-m,-t+m]} |g(x+t)|\, d\lambda(x) = 2 \int_{\mathbb{R}} |g(x)|\, d\lambda(x).$$

Έστω τώρα $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Είναι φανερό ότι

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x+t) + f(x)|\, d\lambda(x) \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, d\lambda(x) + \int_{\mathbb{R}} |f(x+t)|\, d\lambda(x) = 2\|f\|_1$$

για κάθε $t > 0$. Για τυχόν $\epsilon > 0$ βρίσκουμε συνεχή $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που μηδενίζεται έξω από κάποιο διάστημα $[-m, m]$ ώστε $\|f - g\|_1 \leqslant \epsilon$. Τότε, υπάρχει $t_0 > 0$ ώστε

$$2\|g\|_1 \leqslant \int_{\mathbb{R}} |g(x+t) + g(x)|\, d\lambda(x) + \epsilon$$

για κάθε $t \geqslant t_0$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}2\|f\|_1 \leqslant 2\|g\|_1 + 2\epsilon &\leqslant \int_{\mathbb{R}} |g(x+t) + g(x)|\, d\lambda(x) + 3\epsilon \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(x+t) + f(x)|\, d\lambda(x) + \int_{\mathbb{R}} |g(x+t) - f(x+t)|\, d\lambda(x) + \int_{\mathbb{R}} |g(x) - f(x)|\, d\lambda(x) + 3\epsilon \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(x+t) + f(x)|\, d\lambda(x) + 2\|g - f\|_1 + 3\epsilon \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(x+t) + f(x)|\, d\lambda(x) + 5\epsilon\end{aligned}$$

για κάθε $t \geqslant t_0$ και έπεται ότι

$$\lim_{t\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f(x+t) + f(x)|\, d\lambda(x) = 2\|f\|_1.$$

12.54. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f : X \to \mathbb{R}$ μια $\mathcal{A}$-μετρήσιμη συνάρτηση. Για κάθε $t > 1$

ορίζουμε

$$g(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n\mu(\{t^n\leqslant |f|<t^{n+1}\}).$$

Αποδείξτε ότι

$$\lim_{t\to 1^+} g(t)=\int_X |f|\,d\mu.$$

Υπόδειξη. Για κάθε $t>1$ θεωρούμε τη συνάρτηση $s_t=\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n\chi_{\{t^n\leqslant|f|<t^{n+1}\}}$. Παρατηρήστε ότι $s_t\leqslant |f|$ για κάθε $t>1$ και, από το θεώρημα Beppo Levi,

$$\int_X s_t\,d\mu=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_X t^n\chi_{\{t^n\leqslant|f|<t^{n+1}\}}\,d\mu=\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n\mu(\{t^n\leqslant|f|<t^{n+1}\})=g(t).$$

Γράφοντας $X=\{f=0\}\cup\left(\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}\{t^n\leqslant|f|<t^{n+1}\}\right)$ βλέπουμε ότι

$$\int_X |f|\,d\mu=\int_{\{f=0\}}|f|\,d\mu+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{\{t^n\leqslant|f|<t^{n+1}\}}|f|\,d\mu=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{\{t^n\leqslant|f|<t^{n+1}\}}|f|\,d\mu.$$

Επίσης, για κάθε $n\in\mathbb{Z}$ έχουμε

$$t^n\mu(\{t^n\leqslant|f|<t^{n+1}\})\leqslant\int_{\{t^n\leqslant|f|<t^{n+1}\}}|f|\,d\mu\leqslant t^{n+1}\mu(\{t^n\leqslant|f|<t^{n+1}\}).$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$g(t)\leqslant\int_X|f|\,d\mu\leqslant tg(t)$$

για κάθε $t>1$. Αν $\int_X|f|\,d\mu=\infty$ τότε αυτή η ανισότητα δείχνει ότι $g(t)=\infty$ για κάθε $t>1$, οπότε το ζητούμενο ισχύει κι αυτό.

Υποθέτουμε ότι $\int_X|f|\,d\mu<\infty$ και θεωρούμε τυχούσα ακολουθία $t_m\to 1^+$. Έχουμε $0\leqslant g(t_m)\leqslant\int_X|f|\,d\mu<\infty$ άρα μπορούμε να βρούμε υπακολουθία t_{r_m} ώστε να υπάρχει το $u:=\lim g(t_{r_m})$. Τότε, $u\leqslant\int_X|f|\,d\mu$ και, αφού $t_{r_m}\to 1$, συμπεραίνουμε ότι

$$u=\lim g(t_{r_m})\leqslant\int_X|f|\,d\mu\leqslant\lim(t_{r_m}g(t_{r_m}))=\lim(g(t_{r_m}))=u.$$

Δηλαδή, η $g(t_m)$ έχει υπακολουθία που συγκλίνει στο $\int_X|f|\,d\mu$.

Έπεται ότι $g(t)\to\int_X|f|\,d\mu$ καθώς το $t\to 1$ (θυμηθείτε το συνηθισμένο επιχείρημα: αν αυτό δεν ίσχυε, θα μπορούσαμε να βρούμε $\varepsilon>0$ και $t_m\to 1^+$ ώστε $\left|g(t_m)-\int_X|f|\,d\mu\right|\geqslant\varepsilon$ και, περνώντας σε κατάλληλη υπακολουθία (t_{r_m}) όπως παραπάνω, θα οδηγούμασταν σε άτοπο).

12.55. (α) Έστω $\alpha\in[0,1]$ και $E_1,\dots,E_N$ μετρήσιμα υποσύνολα του $[0,1]$ με $\lambda(E_j)=\alpha$ για κάθε $j=1,\dots,N$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $i\neq j$ ώστε

$$\lambda(E_i\cap E_j)\geqslant\alpha^2-\frac{\alpha}{N}.$$

(β) Έστω $\alpha\in[0,1]$ και $E_1,\dots,E_n,\dots$ μετρήσιμα υποσύνολα του $[0,1]$ με $\lambda(E_n)=\alpha$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

Αποδείξτε ότι, για κάθε $0 < c < 1$ υπάρχουν $n \neq m$ ώστε

$$\lambda(E_n \cap E_m) \geqslant c\alpha^2.$$

Υπόδειξη. (α) Υποθέτουμε ότι $N \geqslant 2$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \sum_{j=1}^N \chi_{E_j}(x)$. Παρατηρήστε ότι

$$\|g\|_1 = \sum_{j=1}^N \int_0^1 \chi_{E_j}\, d\lambda = \sum_{j=1}^N \lambda(E_j) = \alpha N$$

και

$$\begin{aligned}\|g\|_2^2 &= \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^N \chi_{E_j}\right)^2 d\lambda = \sum_{j=1}^N \int_0^1 \chi_{E_j}^2\, d\lambda + \sum_{i\neq j} \int_0^1 \chi_{E_i}\chi_{E_j}\, d\lambda \\ &= \sum_{j=1}^N \int_0^1 \chi_{E_j}\, d\lambda + \sum_{i\neq j} \int_0^1 \chi_{E_i\cap E_j}\, d\lambda = \alpha N + \sum_{i\neq j} \lambda(E_i \cap E_j) \\ &\leqslant \alpha N + N(N-1)\max_{i\neq j} \lambda(E_i \cap E_j).\end{aligned}$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνουμε $\|g\|_1^2 = \|g \cdot \mathbf{1}\|_1^2 \leqslant \|g\|_2^2 \|\mathbf{1}\|_2^2 = \|g\|_2^2$, δηλαδή

$$\alpha^2 N^2 \leqslant \alpha N + N(N-1)\max_{i\neq j} \lambda(E_i \cap E_j).$$

Συνεπώς, υπάρχουν $i \neq j$ ώστε

$$\lambda(E_i \cap E_k) \geqslant \frac{\alpha^2 N - \alpha}{N-1} \geqslant \frac{\alpha^2 N - \alpha}{N} = \alpha^2 - \frac{\alpha}{N}.$$

(β) Αφού $0 < c < 1$, μπορούμε να βρούμε N αρκετά μεγάλο ώστε $\alpha/N \leqslant (1-c)\alpha^2$, δηλαδή $\alpha^2 - \alpha/N \geqslant c\alpha^2$. Εφαρμόζοντας το (α) για τα $E_1, \ldots, E_N$ βρίσκουμε $n \neq m$ στο $\{1, \ldots, N\}$ ώστε

$$\lambda(E_n \cap E_m) \geqslant \alpha^2 - \frac{\alpha}{N} \geqslant c\alpha^2.$$

12.56. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια και αιτιολογήστε τον υπολογισμό τους:

(α) $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty (1 + (x/n))^{-n} \sin(x/n)\, d\lambda(x)$.

(β) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (1 + nx^2)(1 + x^2)^{-n}\, d\lambda(x)$.

Υπόδειξη. (α) Ορίζουμε $f_n(x) = (1 + (x/n))^{-n} \sin(x/n)$, $x \geqslant 0$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $n \geqslant 2$ ισχύει

$$\Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n \geqslant 1 + n \cdot \frac{x}{n} + \binom{n}{2} \cdot \frac{x^2}{n^2} = 1 + x + \frac{n-1}{2n}x^2 \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{4} = \Big(1 + \frac{x}{2}\Big)^2,$$

άρα

$$f_n(x) = |(1 + (x/n))^{-n} \sin(x/n)| \leqslant \frac{1}{(1 + (x/2))^2} |\sin(x/n)| \leqslant g(x) := \frac{1}{(1 + (x/2))^2}.$$

Επίσης,

$$f_n(x) = (1 + (x/n))^{-n} \sin(x/n) \to e^{-x} \cdot 0 = 0$$

καθώς το $n \to \infty$. Η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, \infty)$ (εξηγήστε γιατί), άρα εφαρμόζεται το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης και παίρνουμε

$$\int_0^\infty (1 + (x/n))^{-n} \sin(x/n)\, d\lambda(x) \to 0.$$

(β) Ορίζουμε $g_n(x) = (1 + nx^2)(1 + x^2)^{-n}$. Παρατηρούμε ότι $(1 + x^2)^n] \geqslant 1 + nx^2$ από την ανισότητα Bernoulli, άρα $g_n(x) \leqslant g(x) := 1$ στο $[0, 1]$. Η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$. Παρατηρούμε επίσης ότι, αν $x \in (0, 1]$ και $n \geqslant 2$ τότε

$$(1 + x^2)^n \geqslant 1 + nx^2 + \frac{n(n-1)}{2}x^4 > \frac{n(n-1)}{2}x^4,$$

άρα

$$g_n(x) \leqslant 2\frac{1 + nx^2}{n(n-1)x^4} \to 0$$

καθώς το $n \to \infty$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_0^1 (1 + nx^2)(1 + x^2)^{-n}\, d\lambda(x) \to 0.$$

12.57. Έστω $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις με την ιδιότητα

$$\int_E |f_n|\, d\lambda \leqslant \sqrt{\lambda(E)}$$

για κάθε $n \geqslant 1$ και κάθε μετρήσιμο υποσύνολο E του $[0, 1]$. Αν $f_n \to f$ κατά σημείο, αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και ότι

$$\int_0^1 f_n\, d\lambda \to \int_0^1 f\, d\lambda.$$

Υπόδειξη. Από το λήμμα του Fatou, για κάθε μετρήσιμο υποσύνολο E του $[0, 1]$ έχουμε

$$\int_E |f|\, d\lambda \leqslant \liminf \int_E |f_n|\, d\lambda \leqslant \sqrt{\lambda(E)}.$$

Ειδικότερα,

$$\int_0^1 |f|\, d\lambda \leqslant 1,$$

δηλαδή η f είναι ολοκληρώσιμη. Έστω $\varepsilon \in (0, 1)$. Από το θεώρημα του Egorov υπάρχει μετρήσιμο $E \subseteq [0, 1]$ τέτοιο ώστε $\lambda(E) > 1 - \varepsilon^2/4$ και $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο E. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f_n\, d\lambda - \int_0^1 f\, d\lambda \right| &\leqslant \int_0^1 |f_n - f|\, d\lambda \leqslant \int_E |f_n - f|\, d\lambda + \int_{[0,1]\setminus E} |f_n|\, d\lambda + \int_{[0,1]\setminus E} |f|\, d\lambda \\ &\leqslant \int_E |f_n - f|\, d\lambda + 2\sqrt{\lambda([0, 1] \setminus E)} < \int_E |f_n - f|\, d\lambda + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \int_E |f_n - f|\, d\lambda + \varepsilon. \end{aligned}$$

Αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο E και $\lambda(E) < \infty$, έχουμε

$$\int_E |f_n - f|\, d\lambda \to 0.$$

Έπεται ότι

$$\limsup_n \Big| \int_0^1 f_n\, d\lambda - \int_0^1 f\, d\lambda \Big| \leqslant \varepsilon,$$

και, αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, παίρνουμε το ζητούμενο.

12.58. Έστω $1 < p < \infty$ και $f, g \in L^p(\mathbb{R})$ μη αρνητικές συναρτήσεις οι οποίες ικανοποιούν την

$$\lambda(\{g > \alpha\}) \leqslant \frac{1}{\alpha} \int_{\{g>\alpha\}} f\, d\lambda$$

για κάθε $\alpha > 0$. Αποδείξτε ότι

$$\|g\|_p \leqslant q\, \|f\|_p,$$

όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p.

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\|g\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} g^p\, d\lambda &= \int_0^\infty p\alpha^{p-1} \lambda(\{x : g(x) > \alpha\})\, d\alpha \leqslant \int_0^\infty p\alpha^{p-2} \int_{\{g>\alpha\}} f\, d\lambda\, d\alpha \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x) \int_0^\infty p\alpha^{p-2} \chi_{\{g(x)>\alpha\}}(x,\alpha)\, d\alpha\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \int_0^{g(x)} p\alpha^{p-2}\, d\alpha\, d\lambda(x) \\
&= \frac{p}{p-1} \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x)^{p-1}\, d\lambda(x) \leqslant \frac{p}{p-1} \Big(\int_{\mathbb{R}} f^p\, d\lambda \Big)^{1/p} \Big(\int_{\mathbb{R}} g^{q(p-1)} d\lambda \Big)^{1/q} \\
&= q\|f\|_p \Big(\int_{\mathbb{R}} g^p\, d\lambda \Big)^{1/q} = q\|f\|_p\, \|g\|_q^{p/q}.
\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\|g\|_p \leqslant q\, \|f\|_p,$$

12.59. Έστω $g \in L^2([0,1])$ και $\alpha > 0$ ώστε

$$1 \leqslant \|g\|_2 \leqslant \frac{1}{\alpha} \|g\|_1.$$

Αποδείξτε ότι

$$\lambda(\{x \in [0,1] : |g(x)| \geqslant \alpha/2\}) \geqslant \frac{\alpha^2}{4}.$$

Υπόδειξη. Θέτουμε $A = \{x \in [0,1] : |g(x)| \geqslant \alpha/2\}$. Παρατηρούμε ότι

$$\int_{[0,1]\setminus A} |g|\, d\lambda \leqslant \frac{\alpha}{2} \lambda([0,1] \setminus A) \leqslant \frac{\alpha}{2} \leqslant \frac{1}{2} \|g\|_1$$

διότι $\alpha \leqslant \|g\|_1$ από την υπόθεση. Συνεπώς,

$$\int_A |g|\, d\lambda \geqslant \frac{1}{2} \|g\|_1 \geqslant \frac{1}{2}.$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνουμε

$$\int_A |g|\,d\lambda \leqslant \Big(\int_A |g|^2\,d\lambda\Big)^{1/2}\sqrt{\lambda(A)} \leqslant \|g\|_2\sqrt{\lambda(A)} \leqslant \frac{1}{\alpha}\sqrt{\lambda(A)}.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε

$$\lambda(A) \geqslant \alpha^2\Big(\int_A |g|\,d\lambda\Big)^2 \geqslant \frac{\alpha^2}{4}.$$

12.60. Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, ακολουθία Lebesgue ολοκληρώσιμων συναρτήσεων ώστε $f_n \to 0$ κατά σημείο. Με κάθε μία από τις παρακάτω τρεις συνθήκες, εξετάστε αν ισχύει $\int f_n\,d\lambda \to 0$.

(i) $|f_n| \leqslant 1$ και $\lambda(\{x \in \mathbb{R} : f_n(x) \neq 0\}) \leqslant 1$ για κάθε n.

(ii) $|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{1+x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κάθε n.

(iii) $f_n \geqslant 0$ και $\int f_n\,d\lambda \leqslant 1$ για κάθε n.

Υπόδειξη. (i) Δεν ισχύει. Αν θεωρήσουμε τις $f_n = \chi_{[n,n+1]}$ τότε $|f_n| \leqslant 1$ και $\{x \in \mathbb{R} : f_n(x) \neq 0\} = [n, n+1]$ άρα $\lambda(\{x \in \mathbb{R} : f_n(x) \neq 0\}) = \lambda([n, n+1]) = 1$ για κάθε n. Επίσης, $f_n(x) = \chi_{[n,n+1]}(x) \to 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ διότι $x < n$ για όλους τελικά τους $n \in \mathbb{N}$. Όμως,

$$\int f_n\,d\lambda = \lambda([n, n+1]) = 1 \not\to 0.$$

(ii) Ισχύει. Η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ είναι ολοκληρώσιμη και $|f_n| \leqslant g$ για κάθε n, συνεπώς μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

(iii) Δεν ισχύει. Μπορούμε να θεωρήσουμε το ίδιο παράδειγμα με εκείνο στο (i).

12.61. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Αποδείξτε ότι το μ είναι πεπερασμένο αν και μόνο αν: «$\mu(X) = \sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \infty\}$ και για κάθε ακολουθία (f_n) μη αρνητικών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με $f_n \to 0$ ομοιόμορφα, ισχύει $\int f_n d\mu \to 0$».

Υπόδειξη. ($\Longrightarrow$) Έστω ότι $0 < \mu(X) < \infty$ (αν $\mu(X) = 0$ τότε το ζητούμενο ισχύει τετριμμένα – εξηγήστε γιατί). Αφού $X \in \mathcal{A}$ έχουμε $\mu(X) \in \{\mu(A) : A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \infty\}$ άρα $\mu(X) \leqslant \sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \infty\}$. Από την άλλη πλευρά για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < \infty$ έχουμε $A \subseteq X$ άρα $\mu(A) \leqslant \mu(X)$. Συνεπώς, $\sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \infty\} \leqslant \mu(X)$. Έπεται ότι

$$\mu(X) = \sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \infty\}.$$

Έστω τώρα (f_n) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων με $f_n \to 0$ ομοιόμορφα. Για τυχόν $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n \geqslant n_0$ και κάθε $x \in X$ να ισχύει $|f_n(x)| \leqslant \varepsilon/\mu(X)$. Τότε, για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε

$$\Big|\int f_n\,d\mu\Big| \leqslant \int |f_n|\,d\mu \leqslant \int \frac{\varepsilon}{\mu(X)}\,d\mu = \mu(X)\cdot\frac{\varepsilon}{\mu(X)} = \varepsilon.$$

Έπεται ότι $\int f_n\,d\mu \longrightarrow 0$.

($\Longleftarrow$) Υποθέτουμε ότι $\mu(X) = \infty$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Από την υπόθεση έχουμε

$$\sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \infty\} = \mu(X) = \infty,$$

συνεπώς μπορούμε να βρούμε $A_n \in \mathcal{A}_\backslash$ με $0 < \mu(A_n) = a_n < \infty$ και $a_n \to \infty$. Θεωρούμε τις μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις $f_n = \frac{1}{a_n}\chi_{A_n}$. Τότε $0 \leqslant f_n \leqslant 1/a_n$ και $1/a_n \to 0$, άρα $f_n \to 0$ ομοιόμορφα. Όμως,

$$\int f_n d\mu = \frac{1}{a_n}\int \chi_{A_n} d\mu = \frac{1}{a_n}\mu(A_n) = 1$$

για κάθε n, δηλαδή $\int f_n d\mu \not\to 0$. Αυτό έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση.

12.62. Έστω $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις με τις ακόλουθες ιδιότητες: υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $|g_n(x)| \leqslant M$ για κάθε n και για κάθε $x \in [0,1]$, και

$$\int_E g_n(x)\, d\lambda(x) \longrightarrow 0$$

για κάθε μετρήσιμο $E \subseteq [0,1]$. Αποδείξτε ότι: για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$\int_0^1 f(x)g_n(x)\, d\lambda(x) \longrightarrow 0.$$

Υπόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι $f = \chi_E$ για κάποιο μετρήσιμο $E \subseteq [0,1]$. Τότε,

$$\int_0^1 f(x)g_n(x)\, d\lambda(x) = \int_0^1 \chi_E(x)g_n(x)\, d\lambda(x) = \int_E g_n(x)\, d\lambda(x) \longrightarrow 0$$

από την υπόθεση. Αν $s = \sum_{j=1}^m a_j\chi_{E_j}$ είναι απλή μετρήσιμη συνάρτηση στο $[0,1]$, δηλαδή κάθε E_j είναι μετρήσιμο υποσύνολο του $[0,1]$, τότε από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος και χρησιμοποιώντας το προηγούμενο βήμα έχουμε

$$\int_0^1 s(x)g_n(x)\, d\lambda(x) = \sum_{j=1}^n a_j \int_0^1 \chi_{E_j}(x)g_n(x)\, d\lambda(x) \longrightarrow 0.$$

Έστω τώρα $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ τυχούσα ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Για τυχόν $\varepsilon > 0$ βρίσκουμε απλή μετρήσιμη s ώστε $\int_0^1 |f(x) - s(x)|\, d\lambda(x) \leqslant \varepsilon/M$. Για κάθε $n \geqslant 1$ έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(x)g_n(x)\, d\lambda(x)\right| &\leqslant \int_0^1 |f(x) - s(x)|\,|g_n(x)|\, d\lambda(x) + \left|\int_0^1 s(x)g_n(x)\, d\lambda(x)\right| \\ &\leqslant M\int_0^1 |f(x) - s(x)|\, d\lambda(x) + \left|\int_0^1 s(x)g_n(x)\, d\lambda(x)\right| \\ &\leqslant \varepsilon + \left|\int_0^1 s(x)g_n(x)\, d\lambda(x)\right|.\end{aligned}$$

Αφήνοντας το $n \to \infty$ και χρησιμοποιώντας το προηγούμενο βήμα βλέπουμε ότι

$$\limsup\left|\int_0^1 f(x)g_n(x)\, d\lambda(x)\right| \leqslant \varepsilon,$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται το ζητούμενο.

12.63. Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f_n \to 0$ σχεδόν παντού στο $[0,1]$ και

$$\int_0^1 |f_n|^2 \, d\lambda \leqslant 1$$

για κάθε $n \geqslant 1$. Αποδείξτε ότι

$$\int_0^1 |f_n| \, d\lambda \to 0.$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε τυχόν $\delta \in (0,1)$. Από το θεώρημα Egorov υπάρχει κλειστό $F_\delta \subseteq [0,1]$ τέτοιο ώστε $f_n \to 0$ ομοιόμορφα στο F_δ και για το $E_\delta := [0,1] \setminus F_\delta$ να έχουμε $\lambda(E_\delta) < \delta$. Τότε, για κάθε n έχουμε

$$\int_{E_\delta} |f_n| \, d\lambda = \int_{[0,1]} \chi_{E_\delta} |f_n| \, d\lambda \leqslant \sqrt{\delta} \left(\int_{[0,1]} |f_n|^2 d\lambda \right)^{1/2} \leqslant \sqrt{\delta}$$

και

$$\int_{F_\delta} |f_n| \, d\lambda \longrightarrow 0,$$

άρα

$$\limsup \int_{[0,1]} |f_n| \, d\lambda \leqslant \sqrt{\delta}.$$

Αφήνοντας το $\delta \to 0^+$ έχουμε το ζητούμενο.

12.64. Έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ φραγμένη Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση, η οποία είναι περιοδική με περίοδο 1. Αποδείξτε ότι, για κάθε $f \in L^1(\lambda)$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(nx) \, d\lambda(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f \, d\lambda \cdot \int_0^1 g \, d\lambda.$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε αρχικά την περίπτωση όπου $f = \chi_I$ για κάποιο φραγμένο κλειστό διάστημα $I = [a,b]$. Τότε,

$$\int \chi_I(x) g(nx) \, d\lambda(x) = \int_a^b g(nx) \, d\lambda(x) = \frac{1}{n} \int_{na}^{nb} g(y) \, d\lambda(y) = \frac{1}{n} \int_{na}^{na+k_n} g(y) \, d\lambda(y) + \frac{1}{n} \int_{na+k_n}^{nb} g(y) \, d\lambda(y),$$

όπου $k_n = [nb - na]$. Αφού η g είναι περιοδική με περίοδο 1, έχουμε

$$\frac{1}{n} \int_{na}^{na+k_n} g(y) \, d\lambda(y) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{k_n - 1} \int_{na+k}^{na+k+1} g(y) \, d\lambda(y) = \frac{k_n}{n} \int_0^1 g \, d\lambda.$$

Η g είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ ώστε $|g(x)| \leqslant M$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς,

$$\left| \frac{1}{n} \int_{na+k_n}^{nb} g(y) \, d\lambda(y) \right| \leqslant \frac{1}{n} \int_{na+k_n}^{nb} |g(y)| \, d\lambda(y) \leqslant \frac{M}{n}(nb - na - k_n) = \frac{M}{n}(nb - na - [nb - na]) \leqslant \frac{M}{n} \longrightarrow 0.$$

Επίσης,

$$\frac{k_n}{n} = \frac{[nb - na]}{n} = \frac{[n(b-a)]}{n} \longrightarrow b - a = \lambda(I) = \int_{-\infty}^{\infty} f \, d\lambda.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(nx)\,d\lambda(x) = \int \chi_I(x)g(nx)\,d\lambda(x) \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f\,d\lambda \cdot \int_0^1 g\,d\lambda.$$

Αν $I_1, \dots, I_N$ είναι ξένα ανά δύο φραγμένα κλειστά διαστήματα και $F = I_1 \cup \dots \cup I_N$ τότε για την $f = \chi_F$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \chi_F(x)g(nx)\,d\lambda(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{N} \chi_{I_j}(x)\right) g(nx)\,d\lambda(x) = \sum_{j=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{I_j}(x)g(nx)\,d\lambda(x) \\
&\longrightarrow \sum_{j=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{I_j}\,d\lambda \cdot \int_0^1 g\,d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{N} \chi_{I_j}\right) d\lambda \cdot \int_0^1 g\,d\lambda \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \chi_F\,d\lambda \cdot \int_0^1 g\,d\lambda,
\end{aligned}$$

από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος και το προηγούμενο βήμα.

Έστω τώρα E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(E) < \infty$ και $\varepsilon > 0$. Από την πρώτη αρχή του Littlewood μπορούμε να βρούμε $F = I_1 \cup \dots \cup I_N$ όπως παραπάνω, τέτοιο ώστε $\lambda(E \triangle F) \leqslant \varepsilon$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{-\infty}^{\infty} \chi_E(x)g(nx)\,d\lambda(x) - \int_{-\infty}^{\infty} \chi_E\,d\lambda \cdot \int_0^1 g\,d\lambda \right| \\
&\qquad \int_{-\infty}^{\infty} |\chi_E(x) - \chi_F(x)|\,|g(nx)|\,d\lambda(x) + \left| \int_{-\infty}^{\infty} \chi_F(x)g(nx)\,d\lambda(x) - \int_{-\infty}^{\infty} \chi_F\,d\lambda \cdot \int_0^1 g\,d\lambda \right| \\
&\qquad + \int_{-\infty}^{\infty} |\chi_F - \chi_E|\,d\lambda \cdot \int_0^1 |g|\,d\lambda \\
&\qquad \leqslant M\lambda(F \triangle E) + \left| \int_{-\infty}^{\infty} \chi_F(x)g(nx)\,d\lambda(x) - \int_{-\infty}^{\infty} \chi_F\,d\lambda \cdot \int_0^1 g\,d\lambda \right| + M\lambda(F \triangle E).
\end{aligned}$$

Αφήνοντας το $n \to \infty$ και χρησιμοποιώντας το προηγούμενο βήμα, βλέπουμε ότι

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \chi_E(x)g(nx)\,d\lambda(x) - \int_{-\infty}^{\infty} \chi_E\,d\lambda \cdot \int_0^1 g\,d\lambda \right| \leqslant 2M\varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι

$$\int \chi_E(x)g(nx)\,d\lambda(x) \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \chi_E\,d\lambda \cdot \int_0^1 g\,d\lambda.$$

Τώρα, από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος έπεται ότι για κάθε απλή μετρήσιμη συνάρτηση $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\lambda(\{s \neq 0\}) < \infty$ ισχύει ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(x)g(nx)\,d\lambda(x) \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} s\,d\lambda \cdot \int_0^1 g\,d\lambda.$$

Έστω τώρα $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση και έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε απλή μετρήσιμη συνάρτηση $s:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $\lambda(\{s\neq 0\})<\infty$, τέτοια ώστε $\int |f-s|\,d\lambda\leqslant\varepsilon$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
&\left|\int f(x)g(nx)\,d\lambda(x)-\int_{-\infty}^{\infty} f\,d\lambda\cdot\int_0^1 g\,d\lambda\right|\\
&\qquad\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)-s(x)|\,|g(nx)|\,d\lambda(x)+\left|\int_{-\infty}^{\infty} s(x)g(nx)\,d\lambda(x)-\int_{-\infty}^{\infty} s\,d\lambda\cdot\int_0^1 g\,d\lambda\right|\\
&\qquad+\int_{-\infty}^{\infty}|f-s|\,d\lambda\cdot\int_0^1|g|\,d\lambda\\
&\leqslant M\varepsilon+\left|\int_{-\infty}^{\infty} s(x)g(nx)\,d\lambda(x)-\int_{-\infty}^{\infty} s\,d\lambda\cdot\int_0^1 g\,d\lambda\right|+M\varepsilon.
\end{aligned}$$

Αφήνοντας το $n\to\infty$ και χρησιμοποιώντας το προηγούμενο βήμα, βλέπουμε ότι

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\int f(x)g(nx)\,d\lambda(x)-\int_{-\infty}^{\infty} f\,d\lambda\cdot\int_0^1 g\,d\lambda\right|\leqslant 2M\varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι

$$\int f(x)g(nx)\,d\lambda(x)\longrightarrow\int_{-\infty}^{\infty} f\,d\lambda\cdot\int_0^1 g\,d\lambda.$$

Για τη γενική περίπτωση όπου $f\in L^1(\lambda)$ γράφουμε $f=u+iv$ και εφαρμόζουμε το προηγούμενο αποτέλεσμα για τις u και v.

12.65. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου και $f\in L^1(\mu)$. Υπολογίστε το

$$\lim_{n\to\infty}\int_X n\ln\left(1+\frac{|f|^2}{n^2}\right)d\mu.$$

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι $1+\frac{|f(x)|^2}{n^2}\leqslant\left(1+\frac{|f(x)|}{n}\right)^2$, άρα

$$n\ln\left(1+\frac{|f(x)|^2}{n^2}\right)\leqslant 2n\ln\left(1+\frac{|f(x)|}{n}\right)\leqslant 2|f(x)|,$$

αν χρησιμοποιήσουμε και την $\ln\left(1+\frac{|f(x)|}{n}\right)\leqslant\frac{|f(x)|}{n}$. Δηλαδή, αν θεωρήσουμε τις $g_n(x)=n\ln\left(1+\frac{|f(x)|^2}{n^2}\right)$, έχουμε $|g_n|\leqslant 2|f|$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

Η f είναι ολοκληρώσιμη, άρα $|f(x)|<\infty$ σχεδόν παντού. Συνεπώς,

$$|g_n(x)|=n\ln\left(1+\frac{|f(x)|^2}{n^2}\right)\leqslant n\frac{|f(x)|^2}{n^2}=\frac{|f(x)|^2}{n}\to 0$$

σχεδόν παντού. Δηλαδή, $g_n\to 0$ σχεδόν παντού. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έπεται ότι

$$\int_X n\ln\left(1+\frac{|f(x)|^2}{n^2}\right)d\mu(x)=\int_X g_n(x)d\mu(x)\to 0.$$

12.66. Έστω F κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\lambda(\mathbb{R}\setminus F)<\infty$. Ορίζουμε

$$\delta(x):=\mathrm{dist}(x,F)=\inf\{|x-y|:y\in F\},\qquad x\in\mathbb{R}$$

και θεωρούμε τη συνάρτηση

$$I(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\delta(y)}{|x-y|^2}\, d\lambda(y).$$

Αποδείξτε ότι $I(x) = \infty$ για κάθε $x \notin F$ και $I(x) < \infty$ σχεδόν για κάθε $x \in F$. Θα βοηθήσει να θεωρήσετε το $\int_F I(x)\, d\lambda(x)$.

Υπόδειξη. Έστω $x \notin F$. Το F είναι κλειστό, άρα υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $(x-\epsilon, x+\epsilon) \cap F = \emptyset$. Τότε, για κάθε $y \in (x-\epsilon/2, x+\epsilon/2)$ έχουμε $(y-\epsilon/2, y+\epsilon/2) \subseteq (x-\epsilon, x+\epsilon)$, άρα $(y-\epsilon/2, y+\epsilon/2) \cap F = \emptyset$. Έπεται ότι $\delta(y) \geqslant \epsilon/2$ για κάθε $y \in (x-\epsilon/2, x+\epsilon/2)$. Άρα, για κάθε $0 < t < \epsilon/2$,

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\delta(y)}{|x-y|^2}\, d\lambda(y) \geqslant \int_{x-\epsilon/2}^{x+\epsilon/2} \frac{\delta(y)}{|x-y|^2}\, d\lambda(y) \\ &\geqslant \frac{\epsilon}{2} \int_{x+t}^{x+\epsilon/2} \frac{1}{|x-y|^2}\, d\lambda(y) = \frac{\epsilon}{2} \int_t^{\epsilon/2} \frac{1}{s^2}\, ds = \frac{\epsilon}{2t} - 1 \longrightarrow +\infty \end{aligned}$$

καθώς το $t \to 0^+$. Συνεπώς, $I(x) = +\infty$.

Θα δείξουμε ότι

$$\int_F I(x)\, d\lambda(x) = \int_F \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\delta(y)}{|x-y|^2}\, d\lambda(y) \right) d\lambda(y) = \int_F \left(\int_{\mathbb{R}\setminus F} \frac{\delta(y)}{|x-y|^2}\, d\lambda(y) \right) d\lambda(y) < \infty,$$

απ' όπου έπεται ότι $I(x) < \infty$ σχεδόν για κάθε $x \in F$. Το $G = \mathbb{R} \setminus F$ είναι ανοικτό σύνολο (και έχει πεπερασμένο μέτρο από την υπόθεση), επομένως γράφεται ως ξένη (πεπερασμένη ή άπειρη αριθμήσιμη) ένωση $G = \bigcup_k I_k$ φραγμένων ανοικτών διαστημάτων $I_k = (a_k, b_k)$, όπου $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ και $a_k < b_k$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Tonelli και την αριθμήσιμη προσθετικότητα του ολοκληρώματος, γράφουμε

$$\begin{aligned} \int_F I(x)\, d\lambda(x) &= \int_F \left(\int_{\mathbb{R}\setminus F} \frac{\delta(y)}{|x-y|^2}\, d\lambda(y) \right) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}\setminus F} \int_F \left(\int_F \frac{\delta(y)}{|x-y|^2}\, d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \\ &= \sum_k \int_{I_k} \left(\int_F \frac{\delta(y)}{|x-y|^2}\, d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \leqslant \sum_k \int_{I_k} \left(\int_F \frac{\delta_k(y)}{|x-y|^2}\, d\lambda(x) \right) d\lambda(y), \end{aligned}$$

όπου $\delta_k(y) = \inf\{|y-z| : z \in \mathbb{R} \setminus I_k\} \geqslant \inf\{|y-z| : z \in F\} = \delta(y)$.

Αν $I_k = (a_k, b_k)$ είναι οποιοδήποτε από αυτά τα διαστήματα, τότε

$$\begin{aligned}
\int_{I_k}\left(\int_F \frac{\delta_k(y)}{|x-y|^2}\,d\lambda(x)\right)d\lambda(y) &= \int_{I_k}\left(\int_{\mathbb{R}\setminus I_k} \frac{\delta_k(y)}{|x-y|^2}\,d\lambda(x)\right)d\lambda(y)\\
&= \int_{a_k}^{b_k} \delta_k(y)\left(\int_{-\infty}^{a_k} \frac{1}{(x-y)^2}\,dx + \int_{b_k}^{\infty} \frac{1}{(x-y)^2}\,dx\right)dy\\
&= \int_{a_k}^{b_k} \delta_k(y)\left(\frac{1}{b_k-y} - \frac{1}{a_k-y}\right)dy\\
&= \int_{a_k}^{\frac{a_k+b_k}{2}} (y-a_k)\left(\frac{1}{b_k-y} - \frac{1}{a_k-y}\right)dy + \int_{\frac{a_k+b_k}{2}}^{b_k} (b_k-y)\left(\frac{1}{b_k-y} - \frac{1}{a_k-y}\right)dy\\
&= \int_{a_k}^{\frac{a_k+b_k}{2}} \frac{b_k-a_k}{b_k-y}\,dy + \int_{\frac{a_k+b_k}{2}}^{b_k} \frac{b_k-a_k}{y-a_k}\,dy\\
&= (b_k-a_k)\left[-\ln(b_k-y)\Big|_{a_k}^{\frac{a_k+b_k}{2}} + \ln(y-a_k)\Big|_{\frac{a_k+b_k}{2}}^{b_k}\right]\\
&= (b_k-a_k)\left[\ln(b_k-a_k) - \ln\frac{b_k-a_k}{2} + \ln(b_k-a_k) - \ln\frac{b_k-a_k}{2}\right] = (2\ln 2)\cdot(b_k-a_k)\\
&= (2\ln 2)\cdot\lambda(I_k).
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\int_F I(x)\,d\lambda(x) \leqslant \sum_k \int_{I_k}\left(\int_F \frac{\delta_k(y)}{|x-y|^2}\,d\lambda(x)\right)d\lambda(y) = (2\ln 2)\sum_k \lambda(I_k) = (2\ln 2)\lambda(\mathbb{R}\setminus F) < \infty.$$

12.67. (α) Θεωρούμε το σύνολο $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y < x < y+2\pi\}$. Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x,y) = \sin(x)\cdot\chi_A(x,y)$. Αποδείξτε ότι

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy\right)dx \neq \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx\right)dy.$$

Εξηγήστε γιατί αυτό δεν έρχεται σε αντίθεση με το θεώρημα Fubini.

(β) Έστω B Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(B)=1$. Υπολογίστε το

$$\lambda_2(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (1+x^2)(y-e^x)\in B\}).$$

Υπόδειξη. (α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(x)\chi_A(x,y)dy = \sin(x)\int_{x-2\pi}^{x} dy = 2\pi\sin(x).$$

Η $u(x) = \sin(x)$ δεν είναι ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα δεν υπάρχει το

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy\right)dx.$$

Για κάθε $y \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(x)\chi_A(x,y)dx = \int_{y}^{y+2\pi} \sin(x)dx = 0,$$

άρα

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx \right) dy = 0.$$

Συνεπώς,

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy \right) dx \neq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx \right) dy.$$

Αυτό δεν έρχεται σε αντίθεση με το θεώρημα Fubini, διότι η f δεν είναι ολοκληρώσιμη (αν ήταν, θα υπήρχε και το πρώτο ολοκλήρωμα).

(β) Θέτουμε $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (1+x^2)(y-e^x) \in B\}$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $(x,y) \in C$ αν και μόνο αν $y - e^x \in \frac{1}{1+x^2}B$ δηλαδή αν και μόνο αν $y \in e^x + \frac{1}{1+x^2}B$. Άρα,

$$C_x = e^x + \frac{1}{1+x^2}B, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Από το θεώρημα Fubini για δείκτριες συναρτήσεις,

$$\begin{aligned}\lambda_2(C) &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(C_x)\, d\lambda(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\left(e^x + \frac{1}{1+x^2}B\right) d\lambda(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\left(\frac{1}{1+x^2}B\right) d\lambda(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\lambda(B)\; d\lambda(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, d\lambda(x) = \pi.\end{aligned}$$

12.68. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη και $t > 0$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $\varphi_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$\varphi_t(x) = \frac{1}{2t}\int_{x-t}^{x+t} f(u)\, d\lambda(u)$$

είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη και

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi_t|\, d\lambda \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f|\, d\lambda.$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g_t(x) = \frac{1}{2t}\int_{x-t}^{x+t} |f(u)|\, d\lambda(u).$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Tonelli γράφουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} g_t \, d\lambda &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2t} \int_{x-t}^{x+t} |f(u)| \, d\lambda(u) \, d\lambda(x) \\
&= \frac{1}{2t} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi[x-t, x+t](u) |f(u)| \, d\lambda(u) \right) d\lambda(x) \\
&= \frac{1}{2t} \int_{\mathbb{R}} |f(u)| \left(\int_{\mathbb{R}} \chi[x-t, x+t](u) \, d\lambda(x) \right) d\lambda(u) \\
&= \frac{1}{2t} \int_{\mathbb{R}} |f(u)| \left(\int_{\mathbb{R}} \chi[u-t, u+t](x) \, d\lambda(x) \right) d\lambda(u) \\
&= \frac{1}{2t} \int_{\mathbb{R}} |f(u)| \cdot (2t) \, d\lambda(u) \\
&= \int_{\mathbb{R}} |f(u)| \, d\lambda(u).
\end{aligned}$$

Αφού

$$|\varphi_t(x)| = \left| \frac{1}{2t} \int_{x-t}^{x+t} f(u) \, d\lambda(u) \right| \leqslant \frac{1}{2t} \int_{x-t}^{x+t} |f(u)| \, d\lambda(u) = g_t(x),$$

έπεται ότι η φ_t είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη και

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi_t| \, d\lambda \leqslant \int_{\mathbb{R}} g_t \, d\lambda \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f| \, d\lambda.$$

12.69. Έστω μ και ν μέτρα Borel πιθανότητας στο $\mathbb{R}$. Θέτουμε

$$\rho(A) = (\mu \times \nu)(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \in A\})$$

για κάθε $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Αποδείξτε ότι:

(α) Το ρ είναι καλά ορισμένο μέτρο Borel πιθανότητας στο $\mathbb{R}$.

(β) Για κάθε $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ισχύει

$$\rho(A) = \int_{\mathbb{R}} \nu(A - x) \, d\mu(x).$$

Υπόδειξη. (α) Ισχυριζόμαστε αρχικά ότι αν $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ τότε

$$A_* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \in A\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

Έστω $\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : A_* \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$. Αν $G \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό τότε ελέγχουμε εύκολα ότι το G_* είναι ανοικτό. Πράγματι, αν $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ και $x + y \in G$, τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $(x + y - \varepsilon, x + y + \varepsilon) \subseteq G$. Τότε, αν $(u, v) \in B((x, y), \varepsilon/2)$ έχουμε $|(u+v)-(x+y)| \leqslant |u-x|+|y-v| < \varepsilon/2+\varepsilon/2 = \varepsilon$, άρα $(u, v) \in (x+y-\varepsilon, x+y+\varepsilon) \subseteq G$. Δηλαδή, κάθε $(x, y) \in G_*$ είναι εσωτερικό σημείο του G_*. Αυτό δείχνει ότι η $\mathcal{A}$ περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Μπορούμε επίσης να ελέγξουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα, παρατηρώντας ότι:

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)_* = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n)_* \quad \text{και} \quad (\mathbb{R} \setminus A)_* = \mathbb{R}^2 \setminus A_*$$

για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ και κάθε ακολουθία (A_n) υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Από τα παραπάνω έπεται ότι η $\mathcal{A}$

περιέχει όλα τα Borel ποσύνολα του $\mathbb{R}$, και έτσι έχουμε αποδείξει τον ισχυρισμό.

Το $\mu\times\nu$ ορίζεται στην σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R})=\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, άρα ορίζεται καλά η ποσότητα

$$\rho(A)=(\mu\times\nu)(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y\in A\})$$

για κάθε $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Το γεγονός ότι η ρ είναι μέτρο έπεται από τις $(\varnothing)_*=\varnothing$ και $\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right)_*=\bigcup_{n=1}^\infty (A_n)_*$ σε συνδυασμό με το γεγονός ότι το $\mu\times\nu$ είναι μέτρο.

(β) Για κάθε $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ και $x\in\mathbb{R}$ έχουμε

$$(A_*)_x=\{y\in\mathbb{R} : x+y\in A\}=\{y\in\mathbb{R} : y\in A-x\}=A-x.$$

Από το θεώρημα Fubini για δείκτριες συναρτήσεις συμπεραίνουμε ότι

$$\rho(A)=(\mu\times\nu)(A_*)=\int_{\mathbb{R}}\nu((A_*)_x)\,d\mu(x)=\int_{\mathbb{R}}\nu(A-x)\,d\mu(x).$$

12.70. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ και $(Y,\mathcal{B},\nu)$ χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου. Έστω $f:X\to\mathbb{R}$ μια $\mathcal{A}$-μετρήσιμη συνάρτηση και $g:Y\to\mathbb{R}$ μια $\mathcal{B}$-μετρήσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η $h:X\times Y\to\mathbb{R}$, $h(x,y)=f(x)g(y)$ είναι $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-μετρήσιμη και ότι αν $f\in\mathcal{L}^1(\mu), g\in\mathcal{L}^1(\nu)$ τότε $h\in\mathcal{L}^1(\mu\times\nu)$ και

$$\int_{X\times Y}h\,d(\mu\times\nu)=\left(\int_X f\,d\mu\right)\left(\int_Y g\,d\nu\right).$$

Υπόδειξη. Ορίζουμε $F:X\times Y\to\mathbb{R}$ με $F(x,y)=f(x)$. Παρατηρήστε ότι, για κάθε $b\in\mathbb{R}$,

$$\{(x,y)\in X\times Y : F(x,y)\leqslant b\}=\{(x,y)\in X\times Y : f(x)\leqslant b\}=\{x\in X : f(x)\leqslant b\}\times Y\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$$

διότι $\{x\in X : f(x)\leqslant b\}\in\mathcal{A}$ αφού η f είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη. Άρα, η F είναι $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-μετρήσιμη. Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι η $G:X\times Y\to\mathbb{R}$ με $G(x,y)=g(y)$ είναι $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-μετρήσιμη. Αφού

$$h(x,y)=f(x)g(y)=F(x,y)G(x,y),$$

συμπεραίνουμε ότι η $h=F\cdot G$ είναι $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-μετρήσιμη.

Έστω ότι $f\in\mathcal{L}^1(\mu)$ και $g\in\mathcal{L}^1(\nu)$. Από το θεώρημα Tonelli έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y}|h|\,d(\mu\times\nu)&=\int_X\left(\int_Y|f(x)|\cdot|g(y)|\,d\nu(y)\right)d\mu(x)=\int_X|f(x)|\left(\int_Y|g(y)|\,d\nu(y)\right)d\mu(x)\\&=\left(\int_X|f|\,d\mu\right)\left(\int_Y|g|\,d\nu\right)<\infty.\end{aligned}$$

Άρα, $h\in\mathcal{L}^1(\mu\times\nu)$ και από το θεώρημα Fubini παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y}h\,d(\mu\times\nu)&=\int_X\left(\int_Y f(x)\cdot g(y)\,d\nu(y)\right)d\mu(x)=\int_X f(x)\left(\int_Y g(y)\,d\nu(y)\right)d\mu(x)\\&=\left(\int_X f\,d\mu\right)\left(\int_Y g\,d\nu\right)<\infty.\end{aligned}$$

12.71. Έστω μ και ν δύο σ-πεπερασμένα μέτρα στα Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, τα οποία είναι αναλλοίωτα ως προς μεταφορές (δηλαδή, αν E είναι Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και αν $x \in \mathbb{R}^n$, τότε $\mu(E+x) = \mu(E)$ και $\nu(E+x) = \nu(E)$). Υποθέτουμε επίσης ότι υπάρχει Borel σύνολο $B \subset \mathbb{R}^n$ για το οποίο $0 < \mu(B) = \nu(B) < +\infty$. Δείξτε ότι $\mu \equiv \nu$.

Υπόδειξη. Για κάθε $y \in \mathbb{R}$ και κάθε μη αρνητική Borel μετρήσιμη συνάρτηση f έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}} f(x+y)\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\mu(x).$$

(Επαληθεύουμε αυτή την ισότητα αρχικά για τη δείκτρια συνάρτηση $f = \chi_E$ οποιουδήποτε $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Σε αυτή την περίπτωση η ισότητα παίρνει τη μορφή $\mu(E) = \mu(E-y)$, που ισχύει από την υπόθεση. Στη συνέχεια ελέγχουμε την ισότητα για κάθε μη αρνητική απλή μετρήσιμη συνάρτηση s και, χρησιμοποιώντας το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, για κάθε μη αρνννητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση f.)

Έστω $E, F \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Θεωρώντας την $f_y(x) = \chi_E(x-y)\chi_F(x)$ και χρησιμοποιώντας τον προηγούμενο ισχυρισμό παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_E(x-y)\chi_F(x)\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_E(x)\chi_F(x+y)\, d\mu(x).$$

Έπεται ότι

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_E(x-y)\chi_F(x)\, d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_E(x)\chi_F(x+y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Αφού τα μ και ν είναι σ-πεπερασμένα, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Tonelli και έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_E(x-y)\chi_F(x)\, d\mu(x) \right) d\nu(y) &= \int_{\mathbb{R}} \chi_F(x) \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_E(x-y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \chi_F(x)\nu(x-E)\, d\mu(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \chi_F(x)\nu(-E)\, d\mu(x) = \nu(-E)\mu(F)
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_E(x)\chi_F(x+y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y) &= \int_{\mathbb{R}} \chi_E(x) \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_F(x+y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \chi_E(x)\nu(F-x)\, d\mu(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \chi_E(x)\nu(F)\, d\mu(x) = \nu(F)\mu(E).
\end{aligned}$$

Άρα, για κάθε $E, F \in \mathcal{B}$ ισχύει ότι

$$\nu(-E)\mu(F) = \nu(F)\mu(E).$$

Επιλέγοντας $F = B$ και χρησιμοποιώντας την $0 < \mu(B) = \nu(B) < \infty$ βλέπουμε ότι $\nu(-E) = \mu(E)$ για κάθε $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Επιστρέφοντας στην προηγούμενη ισότητα συμπεραίνουμε ότι, για κάθε $E, F \in \mathcal{B}$,

$$\mu(E)\mu(F) = \nu(F)\mu(E),$$

και θέτοντας $E = B$ παίρνουμε $\mu(F) = \nu(F)$ για κάθε $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, δηλαδή $\mu \equiv \nu$.

12.72. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Για κάθε $t > 0$ ορίζουμε $f_t(x) = tf(tx)$.

Αποδείξτε ότι

$$\lim_{t\to 1}\int_{\mathbb{R}} |f - f_t|\, d\lambda = 0.$$

Υπόδειξη. Παρατηρούμε αρχικά ότι για κάθε $t > 0$ ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}} |f_t|\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} t|f(tx)|\, d\lambda(x) = t\int_{\mathbb{R}} |f(tx)|\, d\lambda(x) = t\cdot\frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}} |f|\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} |f|\, d\lambda.$$

(Επαληθεύουμε τη δεύτερη ισότητα αρχικά για τη δείκτρια συνάρτηση $f = \chi_E$ οποιουδήποτε $E \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(E) < \infty$, στη συνέχεια για κάθε απλή ολοκληρώσιμη συνάρτηση s και, περνώντας στο όριο, για κάθε μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση f.)

Έστω $t_n > 0$ με $t_n \to 1$. Οι συναρτήσεις $g_n := |f - f_{t_n}| - |f_{t_n}|$ είναι ολοκληρώσιμες και $g_n(x) \longrightarrow -|f(x)|$ για κάθε $x \in \{|f| < \infty\}$, δηλαδή λ-σχεδόν παντού. Επίσης,

$$|g_n| = \big|\, |f - f_{t_n}| - |f_{t_n}|\,\big| \leqslant |f|$$

σχεδόν παντού. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}} |f - f_{t_n}|\, d\lambda - \int_{\mathbb{R}} |f_{t_n}|\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} g_n\, d\lambda \longrightarrow -\int_{\mathbb{R}} |f|\, d\lambda.$$

Όμως, είδαμε ότι για κάθε $n \geqslant 1$ ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}} |f_{t_n}|\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} |f|\, d\lambda.$$

Άρα,

$$\int_{\mathbb{R}} |f - f_{t_n}|\, d\lambda \longrightarrow 0$$

και το ζητούμενο έπεται από την αρχή της μεταφοράς.

12.73. Εξετάστε αν η συνάρτηση $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ (με $f(0,0) = 0$) είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[-1,1]\times[-1,1]$.

Υπόδειξη. Από το θεώρημα Tonelli έχουμε

$$\int_{[-1,1]^2} |f(x,y)| d\lambda_2(x,y) = \int_{-1}^{1} |y|\left(\int_{-1}^{1} \frac{|x|}{x^2+y^2} d\lambda(x)\right) d\lambda(y).$$

Για $y \neq 0$ βλέπουμε ότι

$$\int_{-1}^{1} \frac{|x|}{x^2+y^2} d\lambda(x) = 2\int_0^1 \frac{x}{x^2+y^2} d\lambda(x) = \ln(x^2+y^2)\Big|_0^1 = \ln\left(\frac{1+y^2}{y^2}\right).$$

Παρατηρούμε ότι

$$\int_{-1}^{1} \ln\left(\frac{1+y^2}{y^2}\right) d\lambda(y) = 2y\ln\left(\frac{1+y^2}{y^2}\right)\Big|_0^1 + 4\int_0^1 \frac{1}{1+y^2} dy = 2\ln 2 + 4\int_0^1 \frac{1}{1+y^2} dy < \infty.$$

Συνεπώς, η $|f|$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[-1,1]\times[-1,1]$. Έπεται ότι η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[-1,1]\times[-1,1]$.

12.74. Έστω μ μέτρο Borel στον $\mathbb{R}$.

(α) Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη ως προς μ συνάρτηση και $\int_{(-\infty,t)} f\,d\mu = 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι $f = 0$ μ-σχεδόν παντού.

(β) Αν το μ είναι σ-πεπερασμένο, $\mu \neq 0$, και B είναι σύνολο Borel στον $\mathbb{R}$, αποδείξτε ότι: $\lambda(B) = 0$ αν και μόνο αν $\mu(B + y) = 0$ λ-σχεδόν για κάθε $y \in \mathbb{R}$. [*Υπόδειξη.* Για το (β) παρατηρήστε ότι έχει νόημα το $(\mu \times \lambda)(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \in B\})$ και υπολογίστε το.]

Υπόδειξη. (α) Για κάθε διάστημα της μορφής $[t, s)$, όπου $t, s \in \mathbb{R}$ και $t < s$, έχουμε

$$\int_{[t,s)} f\,d\mu = \int_{(-\infty,s)} f\,d\mu - \int_{(-\infty,t)} f\,d\mu = 0 - 0 = 0.$$

Θεωρούμε την οικογένεια συνόλων

$$\mathcal{A} := \left\{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \int_A f\,d\mu = 0\right\}$$

Αποδεικνύουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι κλάση Dynkin. Αρχικά, θέτοντας $f_n = f \cdot \chi_{[-n,n)}$ παρατηρούμε ότι $f_n \to f$ και $|f_n| \leqslant |f|$. Αφού η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης παίρνυμε

$$\int_{\mathbb{R}} f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{[-n,n)} f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} 0 = 0,$$

δηλαδή $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$. Έστω τώρα $A, B \in \mathcal{A}$ με $A \subseteq B$. Τότε, $B \setminus A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ και

$$0 = \int_B f\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_{B\setminus A} f\,d\mu = 0 + \int_{B\setminus A} f\,d\mu = \int_{B\setminus A} f\,d\mu,$$

άρα $B \setminus A \in \mathcal{A}$. Τέλος, έστω $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ αύξουσα ακολουθία συνόλων στην $\mathcal{A}$ και έστω $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Τότε, $g_n := f \cdot \chi_{A_n} \to f \cdot \chi_A$ και $|g_n| \leqslant |f|$, συνεπώς το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης μας δίνει

$$\int_A f\,d\mu = \int_{\mathbb{R}} f \cdot \chi_A\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} 0 = 0,$$

δηλαδή $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Αφού η $\mathcal{A}$ είναι κλάση Dynkin και περιέχει την οικογένεια $\Delta = \{[t, s) : t, s \in \mathbb{R}, t < s\} \cup \{\varnothing\}$, συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{A} \supseteq \delta(\Delta) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Συνεπώς, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ και έχουμε το ζητούμενο.

(β)Ισχυριζόμαστε αρχικά ότι αν $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ τότε

$$B_* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \in B\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

Έστω $\mathcal{A} := \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : B_* \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$. Αν $G \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό τότε ελέγχουμε εύκολα ότι το G_* είναι ανοικτό. Πράγματι, αν $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ και $x - y \in G$, τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $(x - y - \varepsilon, x - y + \varepsilon) \subseteq G$. Τότε, αν $(u, v) \in B((x, y), \varepsilon/2)$ έχουμε $|(u-v)-(x-y)| \leqslant |u-x|+|y-v| < \varepsilon/2+\varepsilon/2 = \varepsilon$, άρα $(u, v) \in (x-y-\varepsilon, x-y+\varepsilon) \subseteq G$. Δηλαδή, κάθε $(x, y) \in G_*$ είναι εσωτερικό σημείο του G_*. Αυτό δείχνει ότι η $\mathcal{A}$ περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Μπορούμε επίσης να ελέγξουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα, παρατηρώντας ότι:

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)_* = \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n)_* \quad \text{και} \quad (\mathbb{R} \setminus B)_* = \mathbb{R}^2 \setminus B_*$$

για κάθε $B \subseteq \mathbb{R}$ και κάθε ακολουθία (B_n) υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Από τα παραπάνω έπεται ότι η $\mathcal{A}$ περιέχει όλα τα Borel ποσύνολα του $\mathbb{R}$, και έτσι έχουμε αποδείξει τον ισχυρισμό.

Το $\mu \times \lambda$ ορίζεται στην σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, άρα ορίζεται καλά η ποσότητα

$$(\mu \times \lambda)(B_*) = (\mu \times \lambda)(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \in B\})$$

για κάθε $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Υπολογίζουμε το $(\mu \times \lambda)(B_*)$ με δύο τρόπους, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fubini για δείκτριες συναρτήσεις. Έχουμε

$$(\mu \times \lambda)(B_*) = \int_{\mathbb{R}} \lambda((B_*)_x)\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(\{y : x - y \in B\})\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(x - B)\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(B)\, d\mu(x)$$

και

$$(\mu \times \lambda)(B_*) = \int_{\mathbb{R}} \mu((B_*)^y)\, d\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}} \mu(\{x : x - y \in B\})\, d\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}} \mu(y + B)\, d\lambda(y),$$

άρα

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda(B)\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \mu(y + B)\, d\lambda(y).$$

Αν $\lambda(B) = 0$ παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}} \mu(y + B)\, d\lambda(y) = 0,$$

άρα $\mu(y + B) = 0$ λ-σχεδόν για κάθε $y \in \mathbb{R}$. Αντίστροφα, αν $\mu(y + B) = 0$ λ-σχεδόν παντού, τότε

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda(B)\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \mu(y + B)\, d\lambda(y) = 0,$$

οπότε αναγκαστικά έχουμε $\lambda(B) = 0$.

12.75. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο, με $\lambda(A) > 0$.

(α) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \chi_A(tx)\chi_A(x)\, d\lambda(x)$$

είναι συνεχής στο $t = 1$.

(β) Αποδείξτε ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε: αν $|t - 1| < \delta$ τότε η ευθεία $y = tx$ τέμνει το $A \times A$ στο $\mathbb{R}^2$.

Υπόδειξη. (α) Έστω $t_n > 0$ με $t_n \to 1$. Θαδείξουμε ότι $f(t_n) \to f(1)$ και το ζητούμενο έπεται από την αρχή της μεταδοράς. Ορίζουμε $f_n(x) = \chi_A(t_n x)\chi_A(x)$. Υποθέτουμε αρχικά ότι το A είναι ανοικτό και $\lambda(A) > 0$. Από τον χαρακτηρισμό των ανοικτών συνόλων μέσω ακολουθιών έπεται ότι αν $x \in A$ τότε τελικά $t_n x \in A$. Έτσι συμπεραίνουμε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$f_n(x) = \chi_A(t_n x)\chi_A(x) = \chi_A(x)$$

τελικά, άρα $f_n \to \chi_A$. Επίσης, $0 \leqslant f_n \leqslant \chi_A$, άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης και παίρνουμε

$$f(t_n) = \int_{\mathbb{R}} \chi_A(tx)\chi_A(x)\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f_n\, d\lambda \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \chi_A\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \chi_A(x)\chi_A(x)\, d\lambda(x) = f(1).$$

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμα σύνολα και $A \subseteq B$ τότε

$$\left|\int_{\mathbb{R}} \chi_B(tx)\chi_B(x)\,d\lambda(x) - \int_{\mathbb{R}} \chi_A(tx)\chi_A(x)\,d\lambda(x)\right| \leqslant \left(1+\frac{1}{t}\right)\lambda(B\setminus A)$$

για κάθε $t > 0$. Πράγματι, θέτοντας $C_t = \frac{1}{t}C$ για κάθε Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}} \chi_B(tx)\chi_B(x)\,d\lambda(x) - \int_{\mathbb{R}} \chi_A(tx)\chi_A(x)\,d\lambda(x)\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}} \chi_{B\cap B_t}(x)\,d\lambda(x) - \int_{\mathbb{R}} \chi_{A\cap A_t}(x)\,d\lambda(x)\right|\\ &= \int_{\mathbb{R}} \chi_{(B\cap B_t)\setminus(A\cap A_t)}(x)\,d\lambda(x) = \lambda((B\cap B_t)\setminus(A\cap A_t)) \leqslant \lambda((B\setminus A)\cup(B_t\setminus A_t))\\ &\leqslant \lambda(B\setminus A) + \lambda(B_t\setminus A_t) = \lambda(B\setminus A) + \lambda((B\setminus A)_t) = \left(1+\frac{1}{t}\right)\lambda(B\setminus A),\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις $A_t \leqslant B_t$, $(B\cap B_t)\setminus(A\cap A_t) \subseteq (B\setminus A)\cup(B_t\setminus A_t)$ και $B_t\setminus A_t = (B\setminus A)_t$.

Μπορούμε τώρα να δείξουμε το ζητούμενο για κάθε Lebesgue μετρήσιμο $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) < \infty$. Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και βρίσκουμε ανοικτό $G \supseteq A$ με $\lambda(G) \leqslant \lambda(A) + \varepsilon$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}} \chi_A(t_nx)\chi_A(x)\,d\lambda(x) - \lambda(A)\right| &\leqslant \left|\int_{\mathbb{R}} \chi_A(t_nx)\chi_A(x)\,d\lambda(x) - \int_{\mathbb{R}} \chi_G(t_nx)\chi_G(x)\,d\lambda(x)\right|\\ &\quad + \left|\int_{\mathbb{R}} \chi_G(t_nx)\chi_G(x)\,d\lambda(x) - \lambda(G)\right| + |\lambda(G)-\lambda(A)|\\ &\leqslant \left(1+\frac{1}{t_n}\right)\lambda(G\setminus A) + \left|\int_{\mathbb{R}} \chi_G(t_nx)\chi_G(x)\,d\lambda(x) - \lambda(G)\right| + |\lambda(G)-\lambda(A)|\\ &\leqslant \left(1+\frac{1}{t_n}\right)\varepsilon + \left|\int_{\mathbb{R}} \chi_G(t_nx)\chi_G(x)\,d\lambda(x) - \lambda(G)\right| + \varepsilon.\end{aligned}$$

Αφήνοντας το $n \to \infty$ και χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα για τα ανοικτά σύνολα, παίρνουμε

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\int_{\mathbb{R}} \chi_A(t_nx)\chi_A(x)\,d\lambda(x) - \lambda(A)\right| \leqslant 3\varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, βλέπουμε ότι

$$f(t_n) = \int_{\mathbb{R}} \chi_A(t_nx)\chi_A(x)\,d\lambda(x) \longrightarrow \lambda(A) = f(1).$$

Αν $\lambda(A) = \infty$ τότε θεωρώντας $B_N \subseteq A$ με $N \leqslant \lambda(B_N) < \infty$, όπου $N \in \mathbb{N}$, βλέπουμε ότι

$$\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} \chi_A(t_nx)\chi_A(x)\,d\lambda(x) \geqslant \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} \chi_{B_N}(t_nx)\chi_{B_N}(x)\,d\lambda(x) = \lambda(B_N) \geqslant N$$

για κάθε $N \in \mathbb{N}$, άρα

$$f(t_n) = \int_{\mathbb{R}} \chi_A(t_nx)\chi_A(x)\,d\lambda(x) \longrightarrow +\infty = \lambda(A) = f(1).$$

(β) Από το (α) έχουμε

$$\lim_{t\to 1}\lambda(A\cap A_t) = \lim_{t\to 1} f(t) = \lambda(A) > 0.$$

Συνεπώς, υπάρχει $0 < \delta 1$ τέτοιο ώστε: αν $|t-1| < \delta$ τότε $\lambda(A\cap A_t) > 0$. Ειδικότερα, για κάθε t με $|t-1| < \delta$ έχουμε $A \cap \frac{1}{t}A = A\cap A_t \neq \varnothing$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν $x, y \in A$ ώστε $x = \frac{1}{t}y$. Δηλαδή, για το $(x,y) \in A\times A$ έχουμε $y = tx$. Ισοδύναμα, η ευθεία $y = tx$ τέμνει το $A\times A$ στο $\mathbb{R}^2$.