



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Θεμελιώδη Θέματα Επιστήμης Υπολογιστών 2025-26
1η σειρά γραπτών ασκήσεων
(αυτόματα – τυπικές γλώσσες – γραμματικές
λογική – υπολογισιμότητα – πολυπλοκότητα)

Άσκηση 1. Κατασκευάστε DFA, κανονική παράσταση και κανονική γραμματική για κάθε μία από τις παρακάτω γλώσσες με αλφάβητο $\{0, 1\}$:

- (α) Το υποσύνολο συμβολοσειρών που έχουν στην 1η και στην προτελευταία θέση 1 (π.χ. 11, 10, 110, κ.λπ.).
- (β) Το υποσύνολο συμβολοσειρών που αναπαριστούν δυαδικούς αριθμούς (αγνοώντας αρχικά μηδενικά) που διαιρούνται από το 7.
- (γ) Το υποσύνολο συμβολοσειρών που δεν περιέχουν '11' και με πλήθος '0' που είναι πολλαπλάσιο του 3.

Άσκηση 2.

- (α) Σχεδιάστε NFA_{ε} που να αποδέχεται τις συμβολοσειρές από το αλφάβητο $\Sigma = \{a, b\}$ που είναι της μορφής $R = (a + b)^*(abb + ba^*b)(a + bb)^*$.
- (β) Μετατρέψτε το NFA_{ε} του ερωτ. (α) σε DFA.
- (γ) Ελαχιστοποιήστε το DFA του ερωτ. (β) ή αποδείξτε ότι είναι ελάχιστο.

Άσκηση 3.

- (α) Σχεδιάστε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που να δέχεται ως είσοδο μια αλληλουχία DNA, έστω S (δηλαδή μια συμβολοσειρά από το αλφάβητο $\Sigma = \{A, C, G, T\}$) και μια συμβολοσειρά-πρότυπο $s \in \Sigma^*$ και να απαντάει αν η s περιέχεται στην S .

Ο αλγόριθμός σας θα πρέπει να δημιουργεί ένα κατάλληλο DFA, με τρόπο αντίστοιχο με αυτόν που φαίνεται στη διαφάνεια 21. Περιγράψτε αναλυτικά σε ψευδοκώδικα τα βήματα του αλγορίθμου.

Σημείωση: Ο αλγόριθμός σας θα πρέπει να κατασκευάζει το DFA “κατευθείαν”, χωρίς χρήση της μεθόδου της διαφάνειας 38 (κατασκευή NFA πρώτα).

- (β) [Προαιρετικό - bonus] Υλοποιήστε τον αλγόριθμο σε γλώσσα της επιλογής σας και ελέγξτε τη λειτουργία του με κατάλληλες εισόδους.

Σημείωση: Θεωρήστε ότι η S μπορεί να περιέχει έως και 10^6 σύμβολα, ενώ η s μπορεί να περιέχει έως 100 σύμβολα.

Άσκηση 4. Κανονική παράσταση για ισορροπημένες διεργασίες με περιορισμένο βάθος.

Δίνεται το αλφάβητο: $\Sigma = \{a, b, c\}$

Θεωρούμε ότι το γράμμα a παριστά ένα *άνοιγμα διεργασίας*, το b ένα *κλείσιμο διεργασίας*, και το c μια *παράλληλη ενέργεια* που δεν επηρεάζει το “βάθος ανοίγματος”.

Να γραφεί κανονική παράσταση και να σχεδιαστεί DFA ή NFA για τη γλώσσα όλων των συμβολοσειρών που ικανοποιούν τις εξής ιδιότητες:

- Κάθε συμβολοσειρά περιέχει ίσο πλήθος a και b (όλες οι διεργασίες που ανοίγουν κλείνουν).
- Κανένα πρόθεμα του string δεν έχει περισσότερα b από a — δηλαδή δεν “κλείνει” κάτι που δεν έχει ανοίξει.
- Κανένα πρόθεμα δεν έχει περισσότερα από τέσσερα a περισσότερα από b — δηλαδή το μέγιστο επιτρεπόμενο βάθος φωλιάσματος είναι 4.
- Το σύμβολο c μπορεί να εμφανίζεται οπουδήποτε, χωρίς να αλλάζει το βάθος (δηλαδή αγνοείται όσον αφορά την ισορροπία $a-b$).

Κάθε συμβολοσειρά αντιπροσωπεύει μια σωστά ισορροπημένη ακολουθία “ενεργειών” με βάθος έως 4.

Υπόδειξη: αν σας διευκολύνει, μπορείτε να σχεδιάσετε πρώτα το αυτόματο και να φτιάξετε την κανονική παράσταση από αυτό.

Άσκηση 5. Αποδείξτε ότι η γλώσσα που ορίζεται όπως στην προηγούμενη άσκηση, αλλά χωρίς τον τρίτο περιορισμό (δηλ. στο πρόθεμα μπορούν να υπάρχουν οσαδήποτε περισσότερα “ a ” από ότι “ b ”) δεν είναι κανονική. Περιγράψτε κατάλληλο αυτόματο και γραμματική για την γλώσσα αυτή. Τι εκφράζει αυτή η γλώσσα;

Άσκηση 6. Είναι κανονικές οι παρακάτω γλώσσες; Αν μια γλώσσα δεν είναι κανονική, να το αποδείξετε χρησιμοποιώντας είτε το Λήμμα Άντλησης είτε κάποια ιδιότητα κλειστότητας είτε συνδυασμό τους. Αν μια γλώσσα είναι κανονική, να γράψετε κανονική γραμματική ή να σχεδιάσετε NFA/DFA.

(α) Η γλώσσα $L_1 = \{(a^n b^3)^2 : n \in N^*\}$

(β) $L_2 = \{a^n b^m c^k : n, m, k \in N^* \text{ τέτοιοι ώστε } n \neq m \text{ και } n \neq k\}$

(γ) $L_3 = \{a^n \mid n \text{ είναι τέλειο τετράγωνο}\}$

(δ) $L_4 = \{0^n \mid n \text{ είναι πρώτος αριθμός}\}$

(ε) $L_5 = \{a^i b^j \mid \gcd(i, j) = 1\}$

Άσκηση 7. Δείξτε ότι οι παρακάτω γλώσσες είναι κανονικές:

(α) $L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ δεν περιέχει 'aaa'}\}$

(β) $L_2 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ έχει πλήθος από 1 που δίνει υπόλοιπο 2 σε mod 5}\}$

(γ) $L_3 = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w \text{ δεν περιέχει ποτέ δύο διαδοχικά } b \text{ και κάθε } c \text{ ακολουθείται από } a\}$

Άσκηση 8.

(α) Περιγράψτε σε (σχεδόν) φυσική γλώσσα τη γλώσσα που παράγει καθεμιά από τις παρακάτω γραμματικές:

$G_1 : S \rightarrow 0S0 \mid A, A \rightarrow 1A0 \mid 10.$

$G_2 : S \rightarrow aaSbbb \mid aaacbb.$

(β) Να διατυπώσετε “κομπές” γραμματικές για τις παρακάτω γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα:

$L_1 = \{0^i 2^j x \mid x \in \{1, 2\}^*, j \geq 0, i > 3j + 2|x|\}.$

$L_2 = \{a^{2i} b^{i+2} c^{3j+1} d^j \mid i > 0, j \geq 0\}$

Προθεσμία υποβολής και οδηγίες. Οι απαντήσεις θα πρέπει να υποβληθούν έως τις 16/11/2025, αποκλειστικά σε ηλεκτρονική μορφή, στο Helios (φροντίστε το τελικό αρχείο να είναι μεγέθους <5MB συνολικά).

Συνιστάται *θερμά* να αφιερώσετε ικανό χρόνο για να λύσετε τις ασκήσεις μόνοι σας προτού καταφύγετε σε οποιαδήποτε *θεμιτή* βοήθεια (διαδίκτυο, βιβλιογραφία, συζήτηση με συμφοιτητ(ρι)ες σας). Σε κάθε περίπτωση, οι απαντήσεις θα πρέπει να είναι *αυστηρά* ατομικές.

Για να βαθμολογηθείτε θα πρέπει να παρουσιάσετε σύντομα τις λύσεις σας σε ημέρα και ώρα που θα ανακοινωθεί αργότερα.

Για απορίες / διευκρινίσεις: στείλτε μήνυμα στη διεύθυνση focs@corelab.ntua.gr.