



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Θεμελιώδη Θέματα Επιστήμης Υπολογιστών 2024-25

1η σειρά γραπτών ασκήσεων

(αυτόματα – τυπικές γλώσσες – γραμματικές
λογική – υπολογισιμότητα – πολυπλοκότητα)

Άσκηση 1. Κατασκευάστε DFA, κανονική παράσταση και κανονική γραμματική για κάθε μία από τις παρακάτω γλώσσες:

- (α) Σύνολο συμβολοσειρών του $\Sigma_1 = \{0, 1\}$ που αποτελούν δυαδικές αναπαραστάσεις ακεραίων δυνάμεων του 8.
- (β) Σύνολο συμβολοσειρών του $\Sigma_2 = \{a, b\}$ που δεν περιέχουν τη συμβολοσειρά 'abba'.
- (γ) Σύνολο συμβολοσειρών του $\Sigma_2 = \{a, b\}$ που έχουν περιττό πλήθος από 'a', καθένα από τα οποία ακολουθείται από τουλάχιστον δύο 'b'.

Άσκηση 2.

- (α) Σχεδιάστε NFA_ϵ που να αποδέχεται τις συμβολοσειρές του $\Sigma_1 = \{0, 1\}$ που είναι της μορφής $((00)^*(11) + 01)^*$.
- (β) Μετατρέψτε το NFA_ϵ του ερωτ. (α) σε DFA.
- (γ) Ελαχιστοποιήστε το DFA του ερωτ. (γ) ή αποδείξτε ότι είναι ελάχιστο.
- (δ) Δώστε μια κανονική γραμματική για τη γλώσσα αυτή.

Άσκηση 3.

(α) Σχεδιάστε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που να δέχεται ως είσοδο μια αλληλουχία DNA, έστω S (δηλαδή μια συμβολοσειρά από το αλφάβητο $\Sigma = \{A, C, G, T\}$) και μια συμβολοσειρά-πρότυπο $s \in \Sigma^*$ και να απαντάει αν η s περιέχεται στην S .

Ο αλγόριθμός σας θα πρέπει να δημιουργεί ένα κατάλληλο DFA, με τρόπο αντίστοιχο με αυτόν που φαίνεται στη διαφάνεια 21. Περιγράψτε αναλυτικά σε ψευδοκώδικα τα βήματα του αλγορίθμου.

Σημείωση: Ο αλγόριθμός σας θα πρέπει να κατασκευάζει το DFA "κατευθείαν", χωρίς χρήση της μεθόδου της διαφάνειας 38 (κατασκευή NFA πρώτα).

(β) [Προαιρετικό - bonus] Υλοποιήστε τον αλγόριθμο σε γλώσσα της επιλογής σας και ελέγξτε τη λειτουργία του με κατάλληλες εισόδους.

Σημείωση: Θεωρήστε ότι η S μπορεί να περιέχει έως και 10^6 σύμβολα, ενώ η s μπορεί να περιέχει έως 100 σύμβολα.

Άσκηση 4. Γράψτε κανονική παράσταση για την παρακάτω γλώσσα. Δικαιολογήστε την ορθότητα της παράστασής σας.

Το σύνολο των string από το αλφάβητο $\Sigma = \{ [,] \}$ με ίσο πλήθος εμφανίσεων «[» και «]», στα οποία δεν υπάρχει πρόθεμα που να περιέχει περισσότερα «]» από ότι «[». Επίσης, κανένα πρόθεμα δεν μπορεί να περιέχει τρία περισσότερα «[» από «]». Τι εκφράζει η γλώσσα αυτή;

Υπόδειξη: αν σας διευκολύνει, μπορείτε να σχεδιάσετε πρώτα αυτόματο και να φτιάξετε την κανονική παράσταση από αυτό.

Άσκηση 5. Αποδείξτε ότι η γλώσσα που ορίζεται όπως στην προηγούμενη άσκηση, αλλά χωρίς τον δεύτερο περιορισμό (δηλ. στο πρόθεμα μπορούν να υπάρχουν οσαδήποτε περισσότερα «[» από ότι «]») δεν είναι κανονική. Περιγράψτε κατάλληλο αυτόματο και γραμματική για την γλώσσα αυτή. Τι εκφράζει αυτή η γλώσσα;

Άσκηση 6.

Είναι κανονικές οι παρακάτω γλώσσες; Αν μια γλώσσα δεν είναι κανονική, να το αποδείξετε χρησιμοποιώντας είτε το Λήμμα Άντλησης είτε κάποια ιδιότητα κλειστότητας είτε συνδυασμό τους. Αν μια γλώσσα είναι κανονική, να γράψετε κανονική γραμματική ή να σχεδιάσετε NFA/DFA.

(α) Η γλώσσα $L_1 = \{(a^n b^3)^2 : n \in N^*\}$

(β) $L_2 = \{a^n b^m c^k : n, m, k \in N^* \text{ τέτοιοι ώστε } n \neq m \text{ και } n \neq k\}$

(γ) $L_3 = \{a^n \mid n \text{ είναι τέλειο τετράγωνο}\}$

(δ) $L_4 = \{0^n \mid n \text{ είναι πρώτος αριθμός}\}$

(ε) $L_5 = \{a^i b^j \mid \gcd(i, j) = 1\}$

Άσκηση 7.

Δείξτε ότι οι παρακάτω γλώσσες είναι κανονικές, αν η $L \subseteq \Sigma^*$ είναι κανονική:

(α) $\text{Pre}(L) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists x \in \Sigma^* : wx \in L\}$ (δηλαδή, η $\text{Pre}(L)$ είναι η γλώσσα των προθεμάτων των συμβολοσειρών της L).

(β) $\text{Suf}(L) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists x \in \Sigma^* : wx \in L\}$ (δηλαδή, η $\text{Suf}(L)$ είναι η γλώσσα των επιθεμάτων των συμβολοσειρών της L).

Άσκηση 8.

(α) Περιγράψτε σε (σχεδόν) φυσική γλώσσα τη γλώσσα που παράγει καθεμιά από τις παρακάτω γραμματικές:

$$G_1 : S \rightarrow 0S0 \mid A, A \rightarrow 1A0 \mid 10.$$

$$G_2 : S \rightarrow aaSbbb \mid aaacbb.$$

(β) Να διατυπώσετε “κομπές” γραμματικές για τις παρακάτω γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα:

$$L_1 = \{0^i 2^j x \mid x \in \{1, 2\}^*, j \geq 0, i > 3j + 2|x|\}.$$

$$L_2 = \{a^{2i} b^{i+2} c^{3j+1} d^j \mid i > 0, j \geq 0\}$$

Προθεσμία υποβολής και οδηγίες. Οι απαντήσεις θα πρέπει να υποβληθούν έως τις 10/11/2024, αποκλειστικά σε ηλεκτρονική μορφή, στο Helios (φροντίστε το τελικό αρχείο να είναι μεγέθους <5MB συνολικά). Συνιστάται *θερμά* να αφιερώσετε ικανό χρόνο για να λύσετε τις ασκήσεις μόνοι σας προτού καταφύγετε σε οποιαδήποτε *θεμιτή* βοήθεια (διαδίκτυο, βιβλιογραφία, συζήτηση με συμφοιτη(ρι)ες σας). Σε κάθε περίπτωση, οι απαντήσεις θα πρέπει να είναι *αυστηρά* ατομικές.

Για να βαθμολογηθείτε θα πρέπει να παρουσιάσετε σύντομα τις λύσεις σας σε ημέρα και ώρα που θα ανακοινωθεί αργότερα.

Για απορίες / διευκρινίσεις: στείλτε μήνυμα στη διεύθυνση focs@corelab.ntua.gr.