



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Θεμελιώδη Θέματα Επιστήμης Υπολογιστών 2023-24

1η σειρά γραπτών ασκήσεων

(αυτόματα – τυπικές γλώσσες – γραμματικές
λογική – υπολογισιμότητα – πολυπλοκότητα)

Άσκηση 1.

Κατασκευάστε DFA, κανονική παράσταση και κανονική γραμματική για κάθε μία από τις παρακάτω γλώσσες:

(α) Σύνολο συμβολοσειρών του $\Sigma_1 = \{0, 1\}$ που αποτελούν δυαδικές αναπαραστάσεις ακεραίων δυνάμεων του 8.

(β) Σύνολο συμβολοσειρών του $\Sigma_2 = \{a, b\}$ που δεν περιέχουν τη συμβολοσειρά 'abba'.

Άσκηση 2.

(α) Σχεδιάστε NFA_ε με 5 το πολύ καταστάσεις που να αποδέχεται τις συμβολοσειρές του $\Sigma_1 = \{0, 1\}$ που είναι της μορφής 0^*1^* ή 1^*0^* .

(β) Δώστε μια κανονική γραμματική για τη γλώσσα αυτή.

(γ) Μετατρέψτε το NFA_ε του ερωτ. (α) σε DFA.

(δ) Ελαχιστοποιήστε το DFA του ερωτ. (γ) ή αποδείξτε ότι είναι ελάχιστο.

Άσκηση 3.

Δίνονται οι παρακάτω γλώσσες:

$L_1 = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid \eta \text{ w περιέχει την συμβολοσειρά 'cab' ή τη συμβολοσειρά 'bac'}\}$.

$L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \eta \text{ w έχει περιττό πλήθος από a και άρτιο πλήθος από b}\}$

Κατασκευάστε DFA με όσο το δυνατόν λιγότερες καταστάσεις για τις γλώσσες L_1 και L_2 . Αποδείξτε την ελαχιστότητα του αυτομάτου σας.

Υπόδειξη: θυμηθείτε ότι μπορείτε να σχεδιάσετε και να συνδυάσετε αυτόματα για απλούστερες γλώσσες (με τουλάχιστον δύο τρόπους).

Άσκηση 4.

Γράψτε κανονική παράσταση για την παρακάτω γλώσσα. Δικαιολογήστε την ορθότητα της παράστασής σας.

(α) Το σύνολο των string από το αλφάβητο $\Sigma = \{ [,] \}$ με ίσο πλήθος εμφανίσεων «[» και «]», στα οποία δεν υπάρχει πρόθεμα που να περιέχει περισσότερα «]» από ότι «[». Επίσης, κανένα πρόθεμα δεν μπορεί να περιέχει τρία περισσότερα «[» από ότι «]». Τι εκφράζει η γλώσσα αυτή;

Υπόδειξη: θυμηθείτε ότι μπορείτε να σχεδιάσετε πρώτα αυτόματο και να φτιάξετε την κανονική παράσταση από αυτό.

Άσκηση 5. Αποδείξτε ότι η γλώσσα που ορίζεται όπως στο (β) της προηγούμενης άσκησης, αλλά χωρίς τον δεύτερο περιορισμό (δηλ. στο πρόθεμα μπορούν να υπάρχουν οσαδήποτε περισσότερα «[»

από ότι «]») δεν είναι κανονική. Περιγράψτε κατάλληλο αυτόματο και γραμματική για την γλώσσα αυτή.

Άσκηση 6.

Είναι κανονικές οι παρακάτω γλώσσες; Αν μια γλώσσα δεν είναι κανονική, να το αποδείξετε χρησιμοποιώντας είτε το Λήμμα Άντλησης είτε κάποια ιδιότητα κλειστότητας είτε συνδυασμό τους. Αν μια γλώσσα είναι κανονική, να γράψετε κανονική γραμματική ή να σχεδιάσετε NFA/DFA.

(α) Το συμπλήρωμα της γλώσσας $L_1 = \{(a^n b^2)^2 : n \in N^*\}$

(β) $L_2 = \{a^n b^m c^k : n, m, k \in N^* \text{ τέτοιοι ώστε } n \neq m \text{ και } n \neq k\}$

(γ) $L_3 = \{a^n \mid n \text{ είναι τέλειο τετράγωνο}\}$

Άσκηση 7. Δείξτε ότι οι παρακάτω γλώσσες είναι κανονικές, αν η $L \subseteq \Sigma^*$ είναι κανονική:

(α) $\text{Pre}(L) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists x \in \Sigma^* : wx \in L\}$ (δηλαδή, η $\text{Pre}(L)$ είναι η γλώσσα των προθεμάτων των συμβολοσειρών της L).

(β) $\text{Suf}(L) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists x \in \Sigma^* : xw \in L\}$ (δηλαδή, η $\text{Suf}(L)$ είναι η γλώσσα των επιθεμάτων των συμβολοσειρών της L).

Άσκηση 8.

Περιγράψτε σε φυσική γλώσσα τη γλώσσα που παράγει καθεμιά από τις παρακάτω γραμματικές:

(α) $G_1 : S \rightarrow aA, A \rightarrow a \mid aA \mid B, B \rightarrow bb \mid bbB.$

(β) $G_2 : S \rightarrow aSb \mid bU \mid Ua, U \rightarrow bU \mid aU \mid \varepsilon.$

Άσκηση 9.

Να διατυπώσετε γραμματικές χωρίς συμφραζόμενα για τις παρακάτω γλώσσες:

α) $L_1 = \{0^i 1^j : i \neq j, j \neq 2i\}.$

β) $L_2 = \{xy : x, y \in \{a, b\}^*, |x| = |y| \text{ και } x \neq y^R\},$ όπου y^R η ανάστροφη της y .

Εξάσκηση σε αυτόματα

Εξασκηθείτε στο σχεδιασμό και κατανόηση λειτουργίας των DFA, NFA και NFA_ε χρησιμοποιώντας το εργαλείο που θα βρείτε στη σελίδα <http://automata.discrete.gr/> (Ευχαριστίες στους δημιουργούς, απόφοιτους της ΣΗΜΜΥ, Μανόλη Ζαμπετάκη και Διονύση Ζήνδρο).

Επαληθεύστε την ορθή λειτουργία των αυτομάτων που σχεδιάσατε στις προηγούμενες ασκήσεις (όπου γίνεται) με χρήση του εργαλείου αυτού.

Προαιρετικά: ελάτε σε επαφή με τους δημιουργούς της εφαρμογής για να συμβάλετε στην ανάπτυξη νέων λειτουργιών ή/και βελτίωση του interface.