Μιγαδικές Συναρτήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2022-2023

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Επαναληπτικό Φυλλάδιο Ασκήσεων

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Σημειώσεις.

- Αυτό το Φυλλάδιο Ασκήσεων **δεν είναι** ατομική εργασία προς παράδοση. Προορίζεται για προσωπική εξάσκηση.
- Για κάθε άσκηση υπάρχουν υποδείξεις, οι οποίες διατίθενται σε ξεχωριστό αρχείο.
- Το εύρος των υποδείξεων **ποικίλλει από σύντομα σχόλια έως εκτεταμένες λύσεις** μαζί με επισκόπηση των κρίσιμων θεωρημάτων που εφαρμόζονται.

Άσκηση 1. Αποδείξτε ότι για όλους τους μιγαδικούς αριθμούς z, w και κάθε $n = 1, 2, \dots$ ισχύει

$$i) \quad |z \cdot w| = |z| \cdot |w|, \qquad ii) \quad \overline{z} \cdot \overline{w} = \overline{z \cdot w}, \qquad iii) \quad \overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \qquad iv) \quad (\overline{z})^n = \overline{z^n}.$$

Άσκηση 2. Αν το p είναι ένα πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές και το $z_0 \in \mathbb{C}$ είναι ρίζα του p τότε και ο συζυγής $\overline{z_0}$ είναι επίσης ρίζα του p.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιείστε την προηγούμενη άσκηση.

Άσκηση 3. Να υπολογίσετε τους πιο κάτω μιγαδικούς αριθμούς

$$z_1 = \frac{1+2i}{3-4i} + \frac{2-i}{5i}, \qquad z_2 = \frac{5i}{(1-i)(2-i)(3-i)}$$

$$w_1 = (\sqrt{3} - i)^6, \quad w_2 = \frac{(1+i)^{16}}{(\sqrt{3}+i)^6}, \qquad w_3 = (-1+i)^7$$

$$w_4 = \mathrm{Log}(-1+i), \qquad w_5 = \mathrm{Log}(3 + \sqrt{3}i).$$

Άσκηση 4. Αποδείξτε τις ακόλουθες ταυτότητες για κάθε $z \in \mathbb{C}$,

$$\mathrm{Re}z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \qquad \mathrm{Im}z = \frac{z - \overline{z}}{2i}, \qquad \sin^2 z + \cos^2 z = 1, \qquad \sin(2z) = 2\sin z \cdot \cos z.$$

Άσκηση 5. Προσδιορίστε τις ρίζες των ακόλουθων εξισώσεων

$$z^3 = -1, \qquad z^4 = 8,$$

$$e^z = i.$$

Άσκηση 6 (Εξισώσεις Cauchy-Riemann)**.**

(i) Επαληθεύστε τις εξισώσεις Caychy-Riemann για τη συνάρτηση

$$g : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : g(x+iy) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3).$$

(ii) Βρείτε όλες τις ολόμορφες συναρτήσεις $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : f = u + iv$ με

$$u(x,y) = e^x \cos y + e^y \cos x + xy.$$

Άσκηση 7 (Εξισώσεις Cauchy-Riemann)**.**

(i) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : h(z) = |z|^2 - \overline{z}^2$ είναι παραγωγίσιμη μόνο στο $z = 0$.

(ii) Βρείτε όλες τις ολόμορφες συναρτήσεις $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : f = u + iv$ με $v(x,y) = 2xy + x$ και $f(0) = 1$.

(iii) Να βρεθούν όλα τα $x + iy \in \mathbb{C}$ στα οποία η συνάρτηση $g(x,y) = x^2 + iy^3$ είναι παραγωγίσιμη.

Άσκηση 8. Να υπολογιστούν με βάση τον ορισμό τα ακόλουθα ολοκληρώματα

$$I_1 = \int_{\gamma_1} e^z \, dz, \qquad I_2 = \int_{\gamma_2} \frac{1}{z-1} dz, \qquad I_3 = \int_{\gamma_3} \frac{1}{(z-i)^3} \, dz,$$

όπου

$$\gamma_1(t) = 1 + it, \; t \in [0,1], \qquad \gamma_2(t) = 1 + e^{it}, \; t \in [0, 2\pi], \qquad \gamma_3(t) = i + e^{-it}, \; t \in [0, \pi/2].$$

Άσκηση 9. Να υπολογιστούν τα ακόλουθα ολοκληρώματα

$$I_1 = \int_{\gamma_1} \frac{e^{z^2}}{z-2} \, dz, \qquad I_2 = \int_{\gamma_2} \frac{e^{z^2}}{z-2} \, dz,$$

$$I_3 = \int_{\gamma_3} \frac{1}{(z^2+4)^2} \, dz, \qquad I_4 = \int_{\gamma_4} \frac{\cos(z)}{z(z^2+2)} \, dz,$$

όπου

$$\gamma_1(t) = e^{it}, t \in [0, 2\pi], \qquad \gamma_2(t) = 2 + e^{it}, \; t \in [0, 2\pi], \qquad \gamma_3(t) = i + \frac{3}{2} \cdot e^{it}, \; t \in [0, 2\pi]$$

και η γ_4 είναι η θετικά προσανατολισμένη καμπύλη για την οποία το σύνολο γ_4^* είναι το τετράγωνο με πλευρές μήκους 1 και κέντρο την αρχή των αξόνων.

Άσκηση 10. Να βρεθούν τα αναπτύγματα Laurent των ακόλουθων συναρτήσεων στους αντίστοιχους δακτυλίους:

$$\begin{aligned}
f_1(z) &= e^{1/(z-1)}, \quad 0 < |z-1|, \\
f_2(z) &= z^2 \cos(1/z), \quad 0 < |z|, \\
f_3(z) &= \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z-3}\,, \quad a)\; 2 < |z| < |3|, \quad b)\; 3 < |z|, \\
f_4(z) &= \frac{3}{(z+1)(z-2)}\,, \quad a)\; 1 < |z| < 2, \quad b)\; 0 < |z-2| < 3.
\end{aligned}$$

(Στην f_1 εννοείται ότι το κέντρο είναι το 1, όμοια στην f_4 περίπτωση b) το κέντρο είναι το 2, σε όλες τις άλλες περιπτώσεις το κέντρο είναι το 0.)

Άσκηση 11. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$I_1 = \int_{\gamma} e^{1/(z-1)} \, dz, \qquad I_2 = \int_{\gamma} z^2 \cos(1/z) \, dz,$$

όπου

$$\gamma(t) = 2e^{it}, \; t \in [0, 2\pi].$$

Άσκηση 12. Να προσδιοριστεί η τάξη των πόλων των πιο κάτω συναρτήσεων,

$$f_1(z) = \frac{z}{(z+2)^2}\,, \quad z \neq -2,$$

$$f_2(z) = \frac{e^z - 1}{z^4}\,, \quad 0 < |z| < 8,$$

$$f_3(z) = \frac{1}{\sin z}\,, \quad 0 < |z| < 1.$$

Μπορείτε να πάρετε δεδομένο ότι η εξίσωση $\sin z = 0$ έχει μόνο πραγματικές ρίζες.

Άσκηση 13. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$I_1 = \int_\gamma \sin(2/z)\, dz, \qquad I_2 = \int_\delta \frac{z}{(z+2)^2}\, dz, \qquad I_3 = \int_\gamma \frac{e^z - 1}{z^4}\, dz,$$

όπου

$$\gamma(t) = e^{it},\ t \in [0, 2\pi], \qquad \delta(t) = 3e^{it},\ t \in [0, 2\pi].$$