ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ I
Τοπολογικοί Γραμμικοί Χώροι, Θ. Hahn-Banach, Ασθενείς Τοπολογίες, Ανακλαστικοί Χώροι.

1. Έστω X γραμμικός χώρος και $C \subseteq X$ απορροφούν.

   (i) Να δείξετε ότι
$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nC.$$

   (ii) Υποθέτουμε επιπλέον ότι ο X είναι χώρος Banach και ότι το C είναι κυρτό, κλειστό και συμμετρικό. Να δείξετε ότι το C είναι περιοχή του 0.

   [*Υπόδειξη:* **Θ. Baire:** Εάν ένας πλήρης μετρικός χώρος γράφεται σαν ένωση αριθμησίμου πλήθους κλειστών υποσυνόλων του, τότε κάποιο από αυτά θα πρέπει να έχει μη κενό εσωτερικό.]

2. Έστω X τοπολογικός γραμμικός χώρος και $C \subseteq X$ κλειστό τέτοιο ώστε
$$\frac{1}{2}(x+y) \in C, \quad \forall\, x, y \in C.$$

   Να δείξετε ότι:

   (i) $\forall n \in \mathbb{N}$ και $\forall\, k \in [0, 2^n] \cap \mathbb{N}$, ισχύει
$$\frac{k}{2^n}x + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right) y \in C, \quad \forall\ x, y \in C.$$

   [*Υπόδειξη:* Επαγωγή στο n.]

   (ii) το C είναι κυρτό.

   [*Υπόδειξη:* Το σύνολο
$$\left\{ \frac{k}{2^n} : n \in \mathbb{N},\ \ k \in [0, 2^n] \cap \mathbb{N} \right\}$$
   είναι πυκνό στο $[0,1]$.]

3. Έστω X *τοπικά κυρτός* τοπολογικός γραμμικός χώρος, δηλ. ο X έχει μια βάση περιοχών του 0 που αποτελείται από κυρτά σύνολα. Εάν $(x_n) \subseteq X$ με $x_n \to x,\ \ x \in X$, να δείξετε ότι
$$\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \ \to\ x.$$

   [*Υπόδειξη*: Να υποθέσετε αρχικά ότι $x = 0$.]

4. Έστω X τοπολογικός γραμμικός χώρος και $K, F \subseteq X$ μη κενά, ξένα μεταξύ τους με K συμπαγές και F κλειστό. Να δείξετε ότι υπάρχει ισορροπημένη ανοικτή περιοχή V του 0 ώστε

$$(K+V) \cap F = \emptyset$$

[*Υπόδειξη:* Για κάθε $x \in K$, υπάρχει ισορροπημένη ανοικτή περιοχή W_x του 0 ώστε $x + W_x + W_x \subseteq F^c$.]

5. Έστω X τοπικά κυρτός τοπολογικός γραμμικός χώρος, Y γνήσιος κλειστός γραμμικός υπόχωρος του X και $x_0 \notin Y$. Να δείξετε ότι:

   (i) υπάρχει $f \in X^*$ τέτοιο ώστε

$$f(Y) = \{0\}, \quad f(x_0) = 1.$$

   [*Υπόδειξη*: Γεωμετρικό Θ. Hahn-Banach.]

   (ii) ο γραμμικός υπόχωρος $Y + \langle x_0 \rangle$ είναι κλειστός. [*Υπόδειξη*: Εργαστείτε με δίκτυα αξιοποιώντας το προηγούμενο ερώτημα.]

6. Έστω X χώρος με νόρμα και Z γραμμικός υπόχωρος του X^*. Θέτουμε

$$Z^{\perp} = \bigcap_{f \in Z} \mathrm{Ker} f, \quad (Z^{\perp})^{\perp} = \{ f \in X^* : f(Z^{\perp}) = \{0\} \}.$$

   Να δείξετε ότι $(Z^{\perp})^{\perp} = \overline{Z}^{w^*}$. [*Υπόδειξη*: Γεωμετρικό Θ. Hahn-Banach.]

7. Θεωρούμε το γραμμικό χώρο

$$X = c_{00}(\mathbb{N}) = \{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} |\ x(n) = 0, \text{ τελικώς } \},$$

   εφοδιασμένο με τη νόρμα $||x||_\infty = \sup_n |x(n)|$.

   (i) Να δείξετε ότι $\overline{X}^{||\cdot||_\infty} = c_0(\mathbb{N})$.

   (ii) Θέτουμε $f_n : X \to \mathbb{R}$, με $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x(k)}{k}$, $x \in X$, $n \geq 1$.

   Να δείξετε ότι $f_n \in X^*$, $n \geq 1$ και $\forall\ x \in X$, $\sup_n |f_n(x)| < \infty$. Επιπλέον, $\sup_n ||f_n|| = \infty$.

   (iii) Θέτουμε $g_n : X \to \mathbb{R}$, με $g_n(x) = nx(n)$, $x \in X$, $n \geq 1$.

Να δείξετε ότι $g_n \in X^*,\ n \geq 1$ και

$$g_n \xrightarrow{w^*} 0, \quad \sup_n ||g_n|| = \infty.$$

(iv) Θέτουμε $\tilde{g}_n : c_0(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$, με $\tilde{g}_n(x) = nx(n),\ x \in c_0(\mathbb{N}),\ n \geq 1$.

Να δείξετε ότι $\tilde{g}_n \in c_0(\mathbb{N})^*,\ n \geq 1$ και ότι υπάρχει $x \in c_0(\mathbb{N})$ ώστε $\tilde{g}_n(x) \nrightarrow 0$ (επομένως, η ακολουθία $(\tilde{g}_n)$ δεν είναι w^*- συγκλίνουσα.)

8. Έστω $(X, ||\cdot||)$ απειροδιάστατος χώρος με νόρμα.

   (i) Εάν V ασθενώς ανοικτή περιοχή του 0, να δείξετε ότι υπάρχει Y μη τετριμμένος γραμμικός υπόχωρος του X τέτοιος ώστε $Y \subseteq V$.

   (ii) Εάν $x, z \in X$ με $||x|| < 1,\ ||z|| = 1$, να δείξετε ότι $\exists\ t > 0$ τέτοιο ώστε $||x + tz|| = 1$.

   (iii) Θέτουμε

   $$S_X = \{\ x \in X : ||x|| = 1\ \}, \quad B_X = \{\ x \in X : ||x|| \leq 1\ \}.$$

   Να δείξετε ότι $\overline{S_X}^w = B_X$.

9. Έστω $X,\ Y$ χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Να δείξετε ότι :

   (i) T φραγμένος ανν $g \circ T \in X^*,\ \forall\ g \in Y^*$. (*Υπόδειξη:* Αρχή Ομοιομόρφου Φράγματος.)

   (ii) T φραγμένος ανν $T : (X, w) \to (Y, w)$ είναι συνεχής.

10. (i) Να δείξετε ότι κάθε συμπαγής μετρικός χώρος είναι διαχωρίσιμος.

    (ii) Έστω X διαχωρίσιμος χώρος Banach και $A \subseteq B_{X^*}$ τέτοιο ώστε

    $$\bigcap_{f \in A} \mathrm{Ker} f = \{0\}.$$

    Να δείξετε ότι υπάρχει αριθμήσιμο $B \subseteq A$ τέτοιο ώστε

    $$\bigcap_{f \in B} \mathrm{Ker} f = \{0\}.$$

11. Έστω $(X, ||\cdot||)$ χώρος με νόρμα και Y γνήσιος $||\cdot||-$ κλειστός γραμμικός υπόχωρος του X. Να δείξετε ότι:

(i) Υπάρχει $z_0 \in X$ τέτοιο ώστε

$$||z_0|| = 1, \quad d(z_0\,, Y)\ > 1/2.$$

(ii) Υπάρχουν $x_0 \in X,\ f \in X^*$ τέτοια ώστε

$$f(x_0) > 1, \quad f(Y) = \{0\}, \quad ||f|| = 1.$$

[*Υπόδειξη:* Εάν z_0 όπως στο ερώτημα (i), θέτουμε $x_0 = 2z_0$ κι εφαρμόζουμε μια συνέπεια του Αναλυτικού Θ. Hahn-Banach.]

12. **Στην άσκηση αυτή αποδεικνύεται ότι:** *Αν η μοναδιαία μπάλα ενός χώρου με νόρμα X είναι ασθενώς μετρικοποιήσιμη, τότε ο X^* είναι διαχωρίσιμος.*

    Σημ. ότι το αντίστροφο έχει αποδειχθεί στο μάθημα.

    Έστω $(X, ||\cdot||)$ χώρος με νόρμα.

    (i) Εάν $L \in B_{X^{**}},\ \varepsilon > 0$ και $\Phi \subseteq X^*$ πεπερασμένο, να δείξετε ότι υπάρχει $x_1 \in B_X$ ώστε

    $$|f(x_1)\ -\ L(f)|\ <\ \varepsilon, \quad \forall\, f \in \Phi.$$

    [*Υπόδειξη:* Θ. Goldstine.]

    (ii) Υποθέτουμε ότι ο τοπολογικός χώρος (B_X, w) είναι μετρικοποιήσιμος μέσω μιας μετρικής d και θέτουμε

    $$G_n = \{\ x \in B_X : d(x, 0) < 1/n\ \}, \quad n \geq 1.$$

    (a) Να δείξετε ότι για κάθε $n \geq 1$, υπάρχουν $\Phi_n \subseteq X^*$ πεπερασμένο και $\varepsilon_n > 0$ ώστε

    $$\bigcap_{f \in \Phi_n} f^{-1}(\ (-\varepsilon_n, \varepsilon_n)\ ) \cap B_X\ \subseteq\ G_n.$$

    (b) Θεωρούμε τον κλειστό γραμμικό υπόχωρο $Y = \overline{\langle\ \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi_n\ \rangle}$.

    Να δείξετε ότι $Y = X^*$ και να συμπεράνετε ότι ο X^* είναι διαχωρίσιμος.

    [*Υπόδειξη:* Απαγωγή σε άτοπο, άσκηση 11 (ii) και προηγούμενα ερωτήματα.]

13. Έστω $(X, ||\cdot||)$ χώρος με νόρμα. Να δείξετε ότι X ανακλαστικός ανν κάθε $||\cdot||-$ κλειστός γραμμικός υπόχωρος του X^* είναι w^*- κλειστός.

14. (i) Έστω X ανακλαστικός χώρος Banach και $f \in X^*$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε

$$||x_0|| = 1, \quad f(x_0) = ||f||.$$

(ii) Θεωρούμε το χώρο Banach $(C[0,1],\ ||\cdot||_\infty)$, όπου

$$C[0,1] = \{u : [0,1] \to \mathbb{R} \mid u \text{ συνεχής συνάρτηση}\}, \qquad ||u||_\infty = \max_{t\in[0,1]} |u(t)|.$$

(a) Για $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, να ορίσετε $u_\varepsilon \in C[0,1]$ που ικανοποιεί

$$u_\varepsilon\left(\left[0,\ \frac{1}{2} - \varepsilon\right]\right) = \{1\}, \quad u_\varepsilon\left(\left[\frac{1}{2} + \varepsilon,\ 1\right]\right) = \{-1\}, \quad ||u_\varepsilon||_\infty = 1.$$

(b) Θέτουμε $f : C[0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f(u) = \int_0^{1/2} u(t)dt \ - \int_{1/2}^1 u(t)dt, \quad \forall\, u \in C[0,1].$$

Να δείξετε ότι f γραμμικό φραγμένο με $||f|| = 1$ και ότι δεν υπάρχει $u \in C[0,1]$ τέτοιο ώστε

$$||u||_\infty = 1, \quad f(u) = 1.$$

Συμπεράνατε ότι ο $(C[0,1],\ ||\cdot||_\infty)$ δεν είναι ανακλαστικός.

15. Έστω $(X, ||\cdot||)$ χώρος με νόρμα.

(i) Εάν $(x_n) \subseteq X,\ x \in X$ με $x_n \xrightarrow{w} x$, να δείξετε ότι

$$||x|| \leq \liminf_n ||x_n||.$$

(ii) Υποθέτουμε ότι ο X είναι ανακλαστικός. Εάν Y γνήσιος $||\cdot||-$κλειστός γραμμικός υπόχωρος του X και $x_0 \in X \setminus Y$, να δείξετε ότι υπάρχει $y_0 \in Y$ ώστε

$$||x_0 \ - \ y_0|| = d(x_0,\ Y).$$

16. Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Ο T λέγεται

–**συμπαγής** ανν το $\overline{T(B_X)}^{||\cdot||}$ είναι $||\cdot||-$ συμπαγές στον Y.

–**ισχυρά συνεχής** ανν για κάθε ακολουθία $(x_n) \subseteq X$ και για κάθε $x \in X$ με $x_n \xrightarrow{w} x$, ισχύει $\lim_n ||Tx_n - Tx|| = 0$.

Να δείξετε ότι:

(i) Κάθε συμπαγής τελεστής είναι ισχυρά συνεχής.(*Υπόδειξη:* Απαγωγή σε άτοπο.)

(ii) Εάν X ανακλαστικός και $T : X \to Y$ ισχυρά συνεχής, τότε ο T είναι συμπαγής.

(iii) Εάν X ανακλαστικός και $T : X \to l^1(\mathbb{N})$ είναι γραμμικός φραγμένος, τότε ο T είναι συμπαγής.