Ασκήσεις:

(1) Έστω $(u_n) \subset L^p(0,1)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ ώστε

- $\|u_n - u\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $u \in L^p$
- $u_n(t) \to v(t)$, σ.π.,

όπου $v: (0,1) \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη.

Ποιά είναι η σχέση των u, v;

Λύση: Επειδή $\|u_n - u\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Longrightarrow$

$\exists$ υπακολουθία (u_{k_n}) | $u_{k_n}(t) \to u(t)$ σ.π.

Ταυτόχρονα, $u_{k_n}(t) \to v(t)$, σ.π. $\Longrightarrow u(t) = v(t)$ σ.π.

(2) Έστω $u, v \in L^1(0,1)$ με $u, v \geq 0$ ώστε $u(t) \cdot v(t) \geq 1$, σ.π. στο $(0,1)$. Να δ.ο.

$$\int_0^1 u(t)\,dt \cdot \int_0^1 v(t)\,dt \geq 1.$$

(Υπόδ: Hölder για $p = q = 2$)

<u>Λύση:</u>

$$\int_0^1 \sqrt{u(t)}\,\sqrt{v(t)}\,dt \leq$$

$$\leq \left[\int_0^1 \left(\sqrt{u(t)}\right)^2 dt\right]^{1/2} \cdot \left[\int_0^1 \left(\sqrt{v(t)}\right)^2 dt\right]^{1/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \sqrt{u(t)v(t)}\,dt \leq \int_0^1 u(t)\,dt \cdot \int_0^1 v(t)\,dt$$

Αλλά $u \cdot v \geq 1 \Rightarrow \sqrt{u \cdot v} \geq 1$

$$\Rightarrow \int_0^1 \sqrt{u \cdot v} \geq \int_0^1 1\,dt = 1$$

$$\Rightarrow 1 \leq \int_0^1 u \cdot \int_0^1 v.$$

(Θ. Vitali)

(3) Έστω $(u_n) \subset L^1(0,1)$ ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη

δηλ. $\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 : \ \forall E \subset (0,1)$ με

$\lambda(E) < \delta$, ισχύει $\int_E |u_n| < \varepsilon, \ \forall n \geq 1$.

Υποθέτουμε ότι $u_n(t) \to u(t)$, σ.π.

όπου $u \in L^1$.

Να δ.ο. $\|u_n - u\|_1 \xrightarrow{n \to \infty} 0$.

(Υπόδειξη: Θ. Egorov.)

Απόδειξη:

Έστω $\varepsilon > 0 \xRightarrow{\text{υπόθεση}} \exists \delta_1 > 0 \mid \forall E \subset (0,1)$ με $\lambda(E) < \delta_1$, ισχύει

$$\int_E |u_n| < \varepsilon/3, \quad \forall n \geq 1.$$

Επειδή $u \in L^1(0,1)$, $\exists \delta_2 > 0 \mid \forall E \subset (0,1)$, με $\lambda(E) < \delta_2$, ισχύει

$$\int_E |u| < \varepsilon/3$$

Θέτουμε $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Τότε, $\forall E \subset (0,1)$ με $\lambda(E) < \delta$, ισχύει:

$$\int_E |u_n - u| \leq \int_E |u_n| + \int_E |u| < 2\varepsilon/3 \qquad (1)$$
$$\forall n \geq 1$$

Θ. Egorov $\Longrightarrow \exists\, E \subset (0,1) \mid \lambda(E) < \delta$

κ' $u_n \to u$ ομοιόμορφα στο E^c

$\Longrightarrow \exists\, n_0 \mid \forall n \geq n_0,\ \forall t \in E^c,\quad |u_n(t) - u(t)| < \varepsilon/3$

$$\Longrightarrow \int_{E^c} |u_n - u| \le \frac{\varepsilon}{3} \lambda(E^c) \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{3} \lambda((0,1)) = \frac{\varepsilon}{3}$$

$\forall n \geq n_0$ (2)

Tf dind, $\forall n \geq n_0$,

$$\|u_n - u\|_1 = \int_E |u_n - u| + \int_{E^c} |u_n - u| \overset{(1),(2)}{\le}$$

$$< 2\varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon. \quad \boxtimes$$

Ασκήσεις (01/06/2021)

① Έστω X τ.γ.χ. κ' $K, F \subset X$ μη κενά, K συμπαγές, F κλειστό, με $K \cap F = \emptyset$.

Να δ.ο. $\exists$ V ανοικτό $\underbrace{\text{με}}_{\text{ισορροπ.}}$ $0 \in V$ ώστε

$$(K+V) \cap F = \emptyset.$$

[υπόδ: Να δ.ο. $\forall x \in K$, $\exists$ W_x ισορροπημένο ανοικτό $\ni 0$ με $x + W_x + W_x \subset F^c$.]

Λύση: $\forall x \in K$, $x \in F^c =$ ανοικτό

$\Rightarrow$ $\exists$ U_x ανοικτό $\ni 0$ / $\underline{x + U_x} \subset F^c$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\ W_x$ ανοικτό, ισορροπ. $\mid$ $0 \in W_x$, $W_x + W_x \subset U_x$

$$\Longrightarrow \quad x + W_x + W_x \subset x + U_x \subset F^c, \ \forall x \in K \qquad (1)$$

Η $\{x + W_x\}_{x \in K}$ είναι ανοικτή κάλυψη του K = συμπαγές $\Longrightarrow \exists\ x_1, x_2, \dots, x_N \in K \mid$

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{N} (x_j + W_{x_j}) \qquad (2)$$

Θέτουμε $V = \bigcap_{j=1}^{N} W_{x_j}$ = ανοικτό ισορρ. $\ni 0$.

Θα δ.ο. $(K+V)\cap F = \emptyset$.

Έστω $z\in K$, $v\in V$. Θα δ.ο. $z+v\in F^c$.

$(2) \Longrightarrow \exists j \mid z\in x_j + W_{x_j} \Longrightarrow \underline{z-x_j\in W_{x_j}}$

$$\Longrightarrow z+v = \underbrace{(z-x_j)}_{\in W_{x_j}} + x_j + \underbrace{v}_{\in W_{x_j}} \in x_j + W_{x_j} + W_{x_j} \subset F^c. \quad \boxtimes$$

② Έστω X τ.γ.χ., $K, F\subset X$ μη κενά.

(i) Εάν K, F συμπαγή, το $K+F$ είναι συμπαγές.

Λύση: $\varphi: X \times X \to X$, $\varphi(x,y) = x+y$

φ συνεχής (αν ο $X \times X$ εφοδιαστεί με την τοπολ. γινόμενο).

F, K συμπαγή $\subset X \Rightarrow K \times F$ συμπαγές στον $X \times X$ (Θ. Tychonoff)

φ συνεχής $\Rightarrow$ $\varphi(K \times F)$ συμπαγές $\Rightarrow K + F$ συμπαγές.

(ii) Εάν K συμπαγές, F κλειστό, το $K + F$ είναι κλειστό.

Λύση: Έστω $x \in (K+F)^c \Rightarrow \underline{x \notin K+F}$

$\Rightarrow \underline{K \cap (x-F) = \emptyset}$

Άσκ. 1 $\Rightarrow$ $\exists\, V$ $\overset{\text{ισορροπ.}}{\text{ανοικτό}}$ $\ni 0$ $\mid$ $(K+V)\cap(x-F)=\emptyset$.

Θα δ.ο. $\underline{x+V \subset (K+F)^c}$.

Έστω $v\in V$. Αν $x+v\in K+F$, τότε

$x+v=k+f$, $k\in K$, $f\in F$

$$\Longrightarrow \quad \underbrace{x-f}_{\in\, x-F} = \underbrace{k-v}_{\in\, K-V=\underline{K+V}}. \qquad \text{(Άτοπο)}$$

Άρα, $(K+F)^c$ ανοικτό $\Longrightarrow$ $K+F$ κλειστό.

(iii) Εάν K, F κλειστά, δεν ισχύει γενικά $K+F$ κλειστό.

Π.χ. $K = \{ (x, \frac{1}{x}) : x>0 \}$

$F = \{ (-x, 0) : x>0 \}$

K, F κλειστά στον $\mathbb{R}^2$ με τη συνήθη τοπολογία

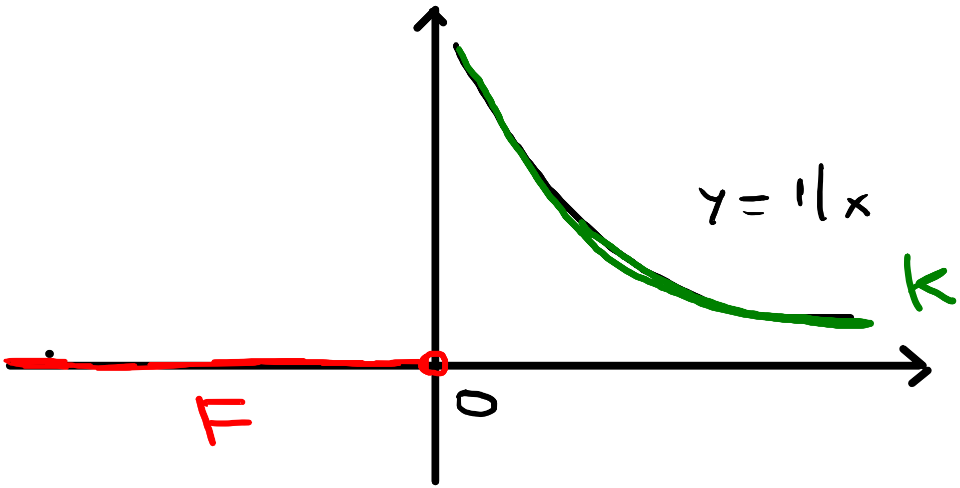
$(n, \frac{1}{n}) \subset K, \quad (-n, 0) \subset F$

$K+F \ni (n, \frac{1}{n}) + (-n, 0) = (0, \frac{1}{n}) \to (0,0)$

$(0,0) = (x, \frac{1}{x}) + (-t, 0) = (x-t, \frac{1}{x})$

(Άτοπο) $\quad (0,0) \notin K+F$

$\Rightarrow$ $K+F$ όχι κλειστό.



③ Έστω X ανακλ. χ. Banach και $(x_n) \subseteq X$ | $\forall f \in X^*$, το $\lim\limits_n f(x_n) \in \mathbb{R}$.
Να δ.ο. $\exists x \in X$ | $x_n \xrightarrow{w} x$.

Λύση: Θα δ.ο. $\exists x \in X \mid \forall f \in X^*, \ f(x_n) \to f(x)$

Δηλ. $e(x)(f) = \lim_n f(x_n), \ \forall f \in X^*.$

Σημ. ότι $e(X) = X^{**}$ (σημ. X ανακλαστικός)

Θέτουμε $\Lambda : X^* \to \mathbb{R}$ με $\Lambda(f) = \underbrace{\lim_n f(x_n)}$, $\forall f \in X^*$.

Ισχυρισμός: (x_n) $\|\cdot\|$-φραγμένη.

Η $(e(x_n))_{n\geq 1}$ είναι οικογένεια φραγμ. γραμμ. συναρτ. πάνω στον X^* = Banach.

Είναι κ.σ. φραγμένη διότι $\forall f \in X^*$,

$$\sup_{n\geq 1} |e(x_n)(f)| = \sup_n |f(x_n)| < \infty$$

$\xrightarrow{A.O.\Phi.}$ $\sup_n \|e(x_n)\| < \infty \Rightarrow \sup_n \|x_n\| = M < \infty.$

$\forall n,\quad \forall f \in X^*,\quad |f(x_n)| \le \|f\| \cdot \|x_n\| \le M\|f\|$

$\Rightarrow \forall f \in X^*,\ |\lim_n f(x_n)| \le M\|f\|$

ду х. $\underline{|\Lambda(f)| \le M \cdot \|f\|}$

$\Rightarrow \quad \Lambda \in X^{**} = e(X) \Rightarrow \exists x \in X \mid$

$\Lambda = e(x) \Rightarrow \forall f \in X^*,$

$f(x) = \Lambda(f) = \lim_n f(x_n) \Rightarrow x_n \xrightarrow{w} x.$

④ Στην άσκ. 3, η υπόθεση "X ανακλαστικός" μπορεί να παραλειφθεί?

Π.χ. (Όχι) $X = c_0$ = δεν είναι ανακλ. $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$

Θέτουμε $x_n = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n-\text{όροι}}, 0, 0, 0, \dots)$, $n \geq 1$.

Θα δ.ο. $\forall f \in X^*$, $\lim_n f(x_n) \in \mathbb{R}$.

Έστω $f \in X^* = c_0^* \Rightarrow \exists\, z \in \ell^1 \mid f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k) z(k)$, $\forall x \in c_0$.

Τότε, $\forall n \geq 1$,

$$f(x_n) = \sum_{k=1}^{\infty} x_n(k) z(k) = \sum_{k=1}^{n} z(k)$$ <u>συγκλίνει</u> γιατί $\sum_{k=1}^{\infty} |z(k)| < \infty$

Άρα, $\forall f \in c_0^*$, $\lim f(x_n) \in \mathbb{R}$.

Έστω ότι $\exists x \in c_0 \mid$ $x_n \xrightarrow{w} x$. Τότε,

$\forall z \in \ell^1$,

$$\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} x_n(k) z(k) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k) z(k)$$

$\Longrightarrow \forall m \geq 1$, $e_m = (0, 0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ m}}{1}, 0, 0, \ldots) \in \ell^1$

$$\Longrightarrow \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} x_n(k) e_m(k) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k) e_m(k)$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_n x_n(m) = x(m), \quad \forall m \geq 1.$$

Έστω $m \geq 1$. $\forall n \geq m$, $x_n(m) = 1$

[όπου $x_n = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0, \ldots)$]

$$\Longrightarrow \quad \lim_n x_n(m) = 1 \Longrightarrow x(m) = 1 \quad \forall m \geq 1$$

(Άτοπο) διότι $\lim_{m\to\infty} x(m) = 0$.

(5) Έστω $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle, \|\cdot\|)$ διαχωρ. απειροδ. χ. Hilbert κ' (e_n) ορθοκανονική βάση του H.

(i) Έστω $(x_n) \subset H$, $x \in H$ ώστε

- $\sup_n \|x_n\| < \infty$
- $\langle x_n, e_j \rangle \xrightarrow{n \to \infty} \langle x, e_j \rangle, \ \forall j \geq 1$.

Ναδ.ο. $x_n \xrightarrow{w} x$.

(ii) $\forall x \in B_H \ (\|x\| \leq 1)$, $\exists (x_n) \subset S_X \ (\|x_n\| = 1) \ \big|$

$$x_n \xrightarrow{w} x.$$

Απόδ:

(i) ⇒ (γ): $\left\{ \begin{array}{l} \sup_n \|x_n\| = M < \infty \\ \langle x_n, e_j \rangle \xrightarrow{n\to\infty} \langle x, e_j \rangle, \ \forall j. \end{array} \right.$

Για να δ.ο. $x_n \xrightarrow{w} x$, από Θ. Riesz, θα πρέπει να δ.ο. $\forall z \in H$, $\langle x_n, z \rangle \xrightarrow{n} \langle x, z \rangle$

$$\iff \sum_{j=1}^{\infty} \langle x_n, e_j \rangle \langle z, e_j \rangle \xrightarrow{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j \rangle \langle z, e_j \rangle$$

$$\iff \lim_n \sum_{j=1}^{\infty} \langle x_n - x, e_j \rangle \langle z, e_j \rangle = 0$$

Αρκεί

$$\lim_n \sum_{j=1}^{\infty} |\langle \underbrace{x_n - x}_{y_n}, e_j \rangle| \cdot |\langle z, e_j \rangle| = 0.$$

Γνωρίζουμε ότι $\underline{\langle y_n, e_j \rangle \xrightarrow{n\to\infty} 0, \ \forall j.}$

Έστω $z \in H$, $\varepsilon > 0$.

Επειδή $\sum_{j=1}^{\infty} |\langle z, e_j \rangle|^2 = \|z\|^2 < \infty$,

$\exists N \in \mathbb{N}$ $(N \geq 1)$ ώστε

$$\boxed{\sum_{j>N} |\langle z, e_j \rangle|^2 < \left[\frac{\varepsilon}{2(M+\|x\|)}\right]^2.} \quad (3)$$

$$\Rightarrow \sum_{j>N} |\langle y_n, e_j\rangle| \cdot |\langle z, e_j\rangle| \overset{\text{[Cauchy}}{\underset{\text{Schwarz]}}{\leq}}$$

$$\leq \left(\sum_{j>N} |\langle y_n, e_j\rangle|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{j>N} |\langle z, e_j\rangle|^2 \right)^{1/2}$$

$$\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\langle y_n, e_j\rangle|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{j>N} |\langle z, e_j\rangle|^2 \right)^{1/2}$$

$$= \|y_n\| \cdot \left(\sum_{j>N} |\langle z, e_j\rangle|^2 \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq (M + \|x\|) \Big(\sum_{j>N} |\langle z, e_j \rangle|^2 \Big)^{1/2} \overset{(3)}{<} \varepsilon/2 .$$

Τελικά, $\displaystyle \sum_{j>N}^{\infty} |\langle y_n, e_j \rangle| \cdot |\langle z, e_j \rangle| < \varepsilon/2, \quad (4)$

$\forall n \geq 1.$

Ταυτόχρονα, $\lim_n |\langle y_n, e_j \rangle| = 0, \ \forall j$

$$\Longrightarrow \lim_n |\langle y_n, e_j \rangle| \cdot |\langle z, e_j \rangle| = 0, \ \forall j$$

$$\Longrightarrow \lim_n \sum_{j=1}^{N} |\langle y_n, e_j \rangle| \cdot |\langle z, e_j \rangle| = 0$$

$$\Rightarrow \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \quad \forall n \geqslant n_0,$$

$$\sum_{j=1}^{N} |\langle y_n, e_j \rangle| \cdot |\langle y, e_j \rangle| < \varepsilon/2. \tag{5}$$

$$(4),(5) \Rightarrow \quad \forall n \geqslant n_0, \quad \sum_{j=1}^{\infty} |\langle y_n, e_j \rangle| \cdot |\langle y, e_j \rangle| < \varepsilon.$$

<u>(ii)</u> Έστω $x \in B_X$ (δηλ. $\|x\| \leq 1$).

$\forall n \geq 1$, $\underbrace{\langle e_1, e_2, \ldots, e_n, x \rangle}_{\text{κλειστός γραμμικός υπόχ.}} \subsetneqq H$ (σημ. $\dim H = \infty$!)

$\Rightarrow$ <u>$\exists\, z_n \in \langle e_1, e_2, \ldots, e_n, x \rangle^{\perp}$ τ.ω. $\|z_n\| = 1$.</u> (6)

Θέτουμε

$$x_n = \sqrt{1 - \|x\|^2}\, z_n + x, \quad n \geq 1.$$

Τότε, $\langle z_n, x \rangle \overset{(6)}{=} 0 \Rightarrow \|x_n\|^2 \overset{(6)}{=} (1 - \|x\|^2) + \|x\|^2 = 1$

$\Rightarrow$ <u>$\|x_n\| = 1$, $n \geq 1$.</u> Επιπλέον, $\forall j$, <u>$\langle x_n, e_j \rangle \xrightarrow{n \to \infty} \langle x, e_j \rangle$.</u>

[Πράγματι: έστω $j \geq 1$. Τότε, $\forall n \geq j$,

αφού $z_n \overset{(6)}{\in} \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$, ισχύει $\langle z_n, e_j \rangle = 0$

$$\Rightarrow \quad \langle x_n, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle .]$$

Από (i), $\quad x_n \xrightarrow{w} x$. $\boxtimes$

Σχόλιο: Ισχύει κάτι γενικότερο:

(6) Έστω X χώρος με νόρμα ώστε $\dim X = \infty$ κ' X^* διαχωρίσιμος. Τότε, $\quad \forall x \in B_X, \ \exists (x_n) \subset S_X$: $\quad x_n \xrightarrow{w} x$.

Απόδειξη:

$$B_X = \overline{S_X}^{w} \text{ (άσκηση 7, φυλλάδιο 1).}$$

Επιπλέον, αφού X^* διαχωρ., ο (B_X, w) είναι μετρικοποιήσιμος

Επομένως, αν $x \in B_X = \overline{S_X}^{w}$, $\exists (x_n) \subset S_X : x_n \xrightarrow{w} x$.

$\boxtimes$

7 Η υπόθεση "X^* διαχωρ." στην άσκ. 6 μπορεί να παραλειφθεί;

<u>Λύση:</u> <u>όχι</u>. π.χ. $X = \ell^1$, $X^* \equiv \ell^\infty$ = όχι διαχωρίσιμος.

Εάν $(x_n) \subset S_{\ell^1}$ με $x_n \xrightarrow{w} 0$ $\underset{\text{Ιδιότητα Schur!!}}{\Longrightarrow}$ $\|x_n\| \to 0$ (Άτοπο!)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 03/06/2021

(1) Έστω X χώρος Banach.

(i) Εάν $(f_n) \subset X^*$ w^*-συγκλίνουσα, τότε $\sup_n \|f_n\| < \infty$.

Λύση: Έστω $f_n \xrightarrow{w^*} f$, $f \in X^*$. Τότε,

$f_n(x) \xrightarrow{n} f(x)$, $\forall x \in X$.

$\forall x \in X$, $\sup_n |f_n(x)| < \infty \implies$ η (f_n) είναι κ.σ. φραγμένη $\underset{\text{Α.Ο.Φ.}}{\xrightarrow{X \text{ Banach!}}}$ $\sup_n \|f_n\| < \infty$

(ii) Υποθέτουμε ότι X διαχωρ. χ. Banach κ' (x_n) $\|\cdot\|$-πυκνό στην $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$.

Θεωρούμε τον τελεστή

$$T : X^* \to \ell^2$$

με

$$T(f) = \left(\frac{f(x_n)}{n} \right)_{n \geq 1}.$$

(α) T καλώς ορισμένος, γραμμικός, φραγμένος, 1-1.

(ΔΕΙΤΕ το!)

(β) ο T είναι ακολουθιακά w^*-w συνεχής.

<u>Λύση:</u> Αρκεί να το δείξω για το 0.

Έστω $f_n \xrightarrow{w^*} 0$. ~~Θα~~ Δ.ο. $T(f_n) \xrightarrow{w} 0$ στον ℓ^2

$$\Leftrightarrow \quad \forall\, y \in \ell^2, \quad \langle T(f_n), y \rangle_{\ell^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall y \in \ell^2 \quad \sum_{k=1}^{\infty} T(f_n)(k)\, y(k) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall y \in \ell^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_n(x_k)}{k}\, y(k) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\left[\text{Αρκεί} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{f_n(x_k)}{k}\, y(k) \right| \xrightarrow{n\to\infty}, \quad \forall y \in \ell^2 \right.$$
$$\left. \text{με } \|y\|_2 = 1 \right]$$

Έστω $y \in \ell^2$ με $\|y\|_2 = 1$.

$$(i) \Longrightarrow \sup_n \|f_n\| = M < \infty$$

Έστω $\varepsilon > 0 \Longrightarrow \exists N \mid \left(\sum_{k>N} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} < \frac{\varepsilon}{2M} \quad (1)$

$$\forall n \geq 1, \quad \sum_{k>N} \left| \frac{f_n(x_k)}{k} y(k) \right| \leq \sum_{k \geq N} \frac{\|f_n\| \cdot \|x_k\|}{k} |y(k)|$$

$$\leq M \sum_{k>N} \frac{1}{k} |y(k)| \underset{(1)}{\overset{C-S}{\leq}} \varepsilon/2$$

Επιπλέον, για $1 \leq k \leq N$, $f_n(x_k) \xrightarrow{n \to \infty} 0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \left| f_n(x_k) \right| \cdot \frac{|y(k)|}{k} = 0$$

$$\Rightarrow \exists n_0 \mid \forall n \geq n_0, \quad \sum_{k=1}^{N} \left| \frac{f_n(x_k) y(k)}{k} \right| < \varepsilon/2$$

Τελικά, $\forall n \geq n_0$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \left| \frac{f_n(x_k) y(k)}{k} \right| < \varepsilon$.

(γ) Να δ.ο. ό $T|_{B_{X^*}}$ είναι w^*–w συνεχής.

<u>Λύση:</u> X διαχωρ. $\Longrightarrow$ (B_{X^*}, w^*) <u>μετρικοποιήσιμος!</u>!

Αλλά (β) $\Longrightarrow$ $T|_{B_{X^*}} : (B_{X^*}, w^*) \to (\ell^2, w)$

είναι ακολουθιακά συνεχής, άρα κ' συνεχής. (†)

(†) εάν E <u>μετρικός χώρος</u>, Y τοπολογικός κ'
$T : E \to Y$ ακολουθιακά συνεχής, τότε T συνεχής.

(2) Έστω X, Y χώροι με νόρμα ($\underline{X \text{ Banach!}}$)

κ' $a: X \times Y \to \mathbb{R}$ ώστε:

<u>(H1)</u>: $\forall x \in X$, η $Y \ni y \mapsto a(x, y)$ είναι

γραμμική συνεχής.

<u>(H2)</u>: $\forall y \in Y$, η $X \ni x \mapsto a(x, y)$ είναι

γραμμική συνεχής.

Να δ.ο. $\exists C > 0 \mid \forall (x, y) \in X \times Y$,

$$|a(x,y)| \leq C \|x\| \cdot \|y\|.$$

Λύση: Θεωρούμε τον τελεστή $T: X \to Y^*$ με

$$T(x)(y) = a(x,y), \quad \forall x \in X, \ \forall y \in Y.$$

Λόγω της (H1), ο T είναι καλώς ορισμένος.

$$\left[Y \ni y \xmapsto{T(x)} a(x,y) \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in X. \right]$$

T γραμμικός (βλ. (H2)).

Ισχυρ. T φραγμένος Θα χρησιμοποιήσ. το Θ. Κλειστού Γραφήματος (X, Y^* Banach).

Έστω $x_n \to x$, $T(x_n) \to g$. $x \in X$, $g \in Y^*$.

Θα δ.ο. $g = T(x)$, δηλ. $g(y) = a(x,y)$, $\forall y \in Y$.

Έχουμε: $\forall y \in Y$,

$$\left.\begin{array}{l} T(x_n)(y) \longrightarrow g(y) \\ \quad \| \\ a(x_n, y) \xrightarrow{(H2)} a(x, y) \end{array}\right\} \Longrightarrow g(y) = a(x, y) = T(x)(y) \quad \forall y \in Y$$

$$\Longrightarrow \quad g = T(x).$$

Ο T είναι φραγμένος $\Longrightarrow$ $\exists\, C > 0 \mid \forall x \in X$, $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ $\Longrightarrow$ $\forall (x, y) \in X \times Y$,

$$|a(x,y)| = |T(x)(y)| \leq \|T(x)\| \cdot \|y\| \leq C\|x\| \cdot \|y\|. \quad \boxtimes$$

3 Έστω $u \in L^\infty(0,1)$, $u \not\equiv 0$.

(i) Εάν $0 < c < \|u\|_\infty$ κ'

$$E_c = \{ t \in (0,1) : |u(t)| > c \},$$ να δ.ο.

$$\left[\lambda(E_c) > 0 \text{ κ' } c\,(\lambda(E_c))^{1/p} \le \|u\|_p \le \|u\|_\infty, \ \forall p \in [1,\infty). \right]$$

όπου λ το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}$.

Λύση:

Αν ήταν $\lambda(E_c) = 0$, τότε το c θα ήταν ουσιώδες φράγμα της u (Άτοπο), αφού

$$c < \|u\|_\infty = \inf\{\text{τα ουσιώδη φράγματα της } u\}.$$

Άρα, $\underline{\lambda(E_c) > 0}$. Τότε,

$$\|u\|_p^p = \int_0^1 |u(t)|^p dt \geq \int_{E_c} |u(t)|^p dt$$

$$\geq \int_{E_c} c^p dt = c^p \lambda(E_c)$$

$$\Longrightarrow \underline{\|u\|_p \geq c\left[\lambda(E_c)\right]^{1/p}}, \quad \forall p \in [1,\infty).$$

Ertions, $|u(t)|^p \le \|u\|_\infty^p$, σ.π.

$$\Rightarrow \int_0^1 |u(t)|^p dt \le \int_0^1 \|u\|_\infty^p = \|u\|_\infty^p$$

$$\Rightarrow \underline{\|u\|_p \le \|u\|_\infty}.$$

(ii) Να δ.ο. $\lim_{p\to\infty} \|u\|_p = \|u\|_\infty$.

Λύση: Έστω $p_n \to \infty$ και $0 < c < \|u\|_\infty$. Τότε, από (i),

$$c\,\lambda(E_c)^{1/p_n} \leq \underset{\substack{\| \\ a_n}}{\|u\|_{p_n}} \leq \|u\|_\infty, \ \forall n$$

Σταθεροποιώ $c \in (0, \|u\|_\infty)$. $\forall n \geq 1$,

$$c\lambda(E_c)^{1/p_n} \leq a_n \leq \|u\|_\infty$$

Αφού $\lim_n \lambda(E_c)^{1/p_n} = 1$, παίρνω

$$c \leq \liminf_n a_n \leq \limsup_n a_n \leq \|u\|_\infty .$$

Η τελευταία ισχύει $\forall c \in (0, \|u\|_\infty)$.

Παίρνοντας το όριο καθώς $c \to \|u\|_\infty$,

έχουμε

$$\|u\|_\infty \leq \underline{\lim}_n a_n \leq \overline{\lim}_n a_n \leq \|u\|_\infty$$

$$\Longrightarrow \overline{\lim}_n a_n = \underline{\lim}_n a_n = \|u\|_\infty$$

$\Rightarrow \lim a_n = \|u\|_\infty$

δηλ. $\lim_n \|u\|_{p_n} = \|u\|_\infty$.

(iii) Θέτουμε $\gamma_n = \int_0^1 |u(t)|^n \, dt, \ n \geq 1$.

$= \|u\|_n^n$.

(α) Να δ.ο. $\gamma_n^{1/n} \leq \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}, \ \forall n \geq 1$.

(β) Να δ.ο. $\lim_n \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} = \|u\|_\infty$.

Λύση:

(a)

$$\gamma_n = \int_0^1 |u|^n \cdot 1, \quad n \geq 1.$$

$$p = \frac{n+1}{n}, \quad q = \frac{p}{p-1} = n+1, \quad \underline{1/p + 1/q = 1}$$

$$\gamma_n \overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int_0^1 \left(|u|^n\right)^p\right)^{1/p} \cdot \left(\int_0^1 1^q\right)^{1/q}$$

$$= \left(\int_0^1 |u|^{n+1}\right)^{\frac{n}{n+1}} \cdot 1 = \gamma_{n+1}^{\frac{n}{n+1}}$$

$$\Longrightarrow \quad \gamma_n^{\frac{n+1}{n}} \leq \gamma_{n+1} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \gamma_n^{1+\frac{1}{n}} \leq \gamma_{n+1}$$

$$\Longrightarrow \quad \gamma_n^{1/n} \leq \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}, \quad \forall n \geqslant 1.$$

(b) Es sei $0 < c < \|u\|_\infty$,

$$E_c = \{t : |u(t)| > c\}$$

(i)

$$\Longrightarrow \quad c\,\lambda(E_c)^{1/n} \leq \underline{\|u\|_n} \leq \|u\|_\infty, \quad \forall n \geqslant 1$$

$$\Rightarrow c\,\lambda(E_c)^{1/n} \leq \gamma_n^{1/n} \leq \|u\|_\infty, \quad \forall n \geq 1.$$

Επιπλέον,

$$\gamma_{n+1} = \int_0^1 |u|^{n+1} = \int_0^1 |u|^n \cdot |u|$$

$$\leq \|u\|_\infty \int_0^1 |u|^n$$

$$= \|u\|_\infty \cdot \gamma_n$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \leq \|u\|_\infty, \quad \forall n \geq 1.$$

Άρα,

$$c\,\lambda(E_\varepsilon)^{1/n} \leq \gamma_n^{1/n} \overset{(\alpha)}{\leq} \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \leq \|u\|_\infty, \quad \forall n \geq 1.$$

Για σταθερό $c \in (0, \|u\|_\infty)$, αφού $\lim_n \lambda(E_\varepsilon)^{1/n} = 1$, έχουμε

$$c \leq \underline{\lim_n} \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \leq \overline{\lim_n} \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \leq \|u\|_\infty.$$

Για $c \to \|u\|_\infty$, παίρνουμε τελικά

$$\lim_n \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} = \|u\|_\infty.$$

ΛΥΣΗ ΑΣΚ. 13, ΦΥΛΛΑΔΙΟ 1

(i) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi : X \to \mathbb{R}$ με $\varphi(x) = |f(x)|$, $x \in X$.

Η φ είναι w-συνεχής. [Πράγματι: αν $(x_\lambda) \subseteq X$ δίκτυο με $x_\lambda \xrightarrow{w} x$,

τότε $f(x_\lambda) \to f(x) \Rightarrow |f(x_\lambda)| \to |f(x)|$.]

Επειδή <u>B_X w-συμπαγές</u> (<u>σημ. ότι X αυτοπαθής</u>),

το $\varphi(B_X)$ είναι συμπαγές $\subseteq \mathbb{R} \Rightarrow \exists z_0 \in B_X \mid \varphi(z_0) = \sup \varphi(B_X)$

δηλ. $|f(z_0)| = \sup\{|f(x)| : x \in B_X\} = \|f\|$.

Τότε, $\|f\| \le \|f\| \cdot \|z_0\| \Rightarrow 1 \le \|z_0\| \le 1 \Rightarrow$ <u>$\|z_0\| = 1$</u>.

Θέτουμε $x_0 = \begin{cases} z_0, & \text{αν } f(z_0) \geq 0 \\ -z_0, & \text{αν } f(z_0) < 0 \end{cases}$. Τότε,

$\|x_0\| = 1$ κ' $f(x_0) = |f(z_0)| = \|f\|$.

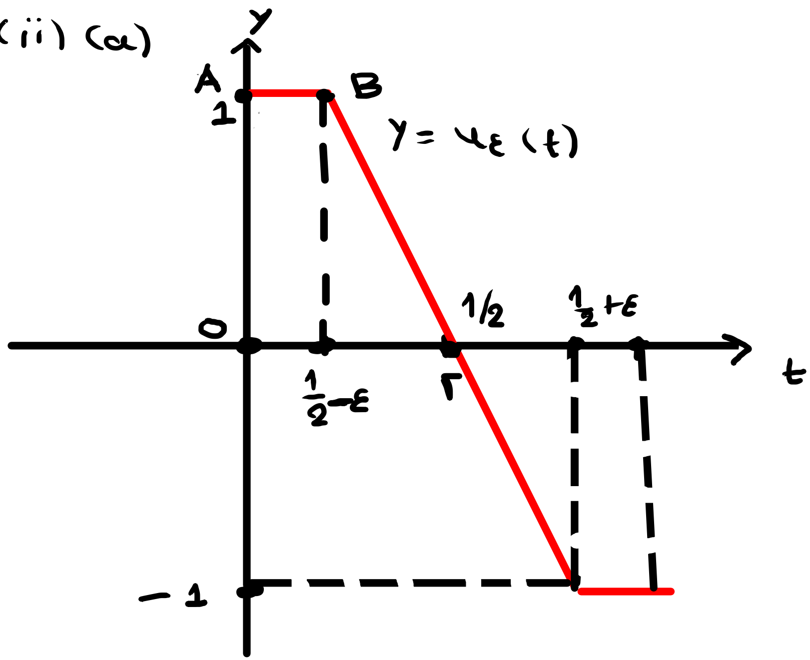
Β' ΤΡΟΠΟΣ

Hahn-Banach $\Rightarrow$ $\exists\, F \in X^{**}$: $\|F\| = 1$, $F(f) = \|f\|$.

Αλλά η $e: X \to X^{**}$ είναι επί, οπότε $\exists\, x_0 \in X$: $F = e(x_0)$.

Τότε, $\|x_0\| = \|e(x_0)\| = \|F\| = 1$, $f(x_0) = e(x_0)(f) = F(f) = \|f\|$.

(ii) (α)



$$u_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \frac{1}{2} - \varepsilon] \\ (1-2t)/2\varepsilon, & t \in [\frac{1}{2}-\varepsilon, \frac{1}{2}+\varepsilon] \\ -1, & t \in [\frac{1}{2}+\varepsilon, 1] \end{cases}$$

(b) $\forall u \in C[0,1]$,

$$|f(u)| \leq \int_0^{1/2} |u(t)|dt + \int_{1/2}^{1} |u(t)|dt \leq \|u\|_\infty \left(\int_0^{1/2} dt + \int_{1/2}^{1} dt\right)$$
$$= \|u\|_\infty$$

$\Rightarrow$ f φραγμένο κ' $\|f\| \leq 1$.

- Έστω $\varepsilon \in (0, 1/2)$ κ' $u_\varepsilon \in C[0,1]$ όπως στο (a). Τότε,

$$f(u_\varepsilon) = \int_0^{1/2} u_\varepsilon(t)dt - \int_{1/2}^{1} u_\varepsilon(t)dt = \int_0^{1} |u_\varepsilon(t)|dt =$$

$= \varepsilon$ εμβ αδό τραπ. $(OAB\Gamma) = 2 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \varepsilon + \frac{1}{2}\right) \cdot 1 = 1 - \varepsilon$

κ' άρα

$$1 - \varepsilon = f(u_\varepsilon) \leq \|f\| \cdot \|u_\varepsilon\|_\infty = \|f\|, \forall \varepsilon \in \left(0, \tfrac{1}{2}\right).$$

Για $\varepsilon \to 0^+$, παίρνουμε $1 \leq \|f\| \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \|f\| = 1.$$

Υποθέτουμε ότι $\exists\, u \in C[0,1] \,|$

$$\|u\|_\infty = 1, \quad f(u) = \|f\| = 1.$$

Τότε,

$$1 = \int_0^{1/2} u(t)\,dt - \int_{1/2}^{1} u(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^{1/2} [1-u(t)]\,dt + \int_{1/2}^{1} [1+u(t)]\,dt = 0 \quad \xRightarrow{(-1 \le u \le 1)}$$

$$\int_0^{1/2} [1-u(t)]\,dt = \int_{1/2}^{1} [1+u(t)]\,dt = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\overset{(-1 \leq u \leq 1)}{\Longrightarrow} \begin{cases} 1 - u(t) = 0, & \forall t \in [0, 1/2] \\ 1 + u(t) = 0, & \forall t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad u|_{[0,1/2]} = 1, \quad u|_{[1/2,1]} = -1$$ (Άτοπο, διότι

u συνεχής στο $[0,1]$.

Άρα, δεν υπάρχει $u \in C[0,1] \mid \|u\|_\infty = 1$, $f(u) = \|f\|$

$\overset{(i)}{\Longrightarrow}$ ο $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ δεν είναι ανακλαστικός. $\boxtimes$