ΑΝΑΚΛΑΣΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

Έστω X χώρος με νόρμα και
$$e: X \to X^{**}$$
η κανονική ισομετρική εμφύτευση, δηλ.
$$e(x)(f) = f(x), \quad \forall x \in X, \forall f \in X^*.$$

Ορισμός 1: Ο X είναι ανακλαστικός ανν $e(X) = X^{**}$ ($\Leftrightarrow e(B_X) = B_{X^{**}}$.)

Παρατήρηση: Αν X ανακλαστικός, τότε X Banach γιατί X ισομετρικός με τον X^{**} = Banach.

Άσκηση: Για $1<p<\infty$, ο ℓ^p είναι ανακλαστικός.

[Υπόδ: εάν $1/p + 1/q = 1$, ο τελεστής $\Phi: \ell^q \to (\ell^p)^*$ με
$$\Phi(y)(z) = \sum_{n=1}^{\infty} y(n) z(n),$$
$\forall y \in \ell^q$, $\forall z \in \ell^p$,
είναι γραμμ. ισομετρία επί.]

Πρόταση 1:

X ανακλαστικός ανν B_X w-συμπαγές.

Απόδειξη:

Σημ. αρχικά ότι η

$$e: (X, w) \to (X^{**}, w^*)$$

είναι ομοιομορφισμός (γιατί;).

($\Rightarrow$) Εφ' όσον X ανακλαστικός, η e είναι $w-w^*$ ομοιομορφισμός επί. Έχουμε

$$e(B_X) = B_{X^{**}} = w^* \text{-συμπαγές},$$

λόγω Θ. Αλάογλου. Τότε και το B_X είναι w-συμπαγές.

($\Leftarrow$) Εφ' όσον B_X w-συμπαγές, το $e(B_X)$ είναι σχετικώς w^*-συμπαγές υποσύνολο του $e(X)$ κ' άρα σχετ. w^*-κλειστό στον $e(X)$. Άρα,

$$e(B_X) = \overline{e(B_X)}^{w^*} \cap e(X) \overset{(\text{Θ. Goldstine})}{=} B_{X^{**}} \cap e(X) = B_{X^{**}}$$

$\Rightarrow$ X ανακλαστικός. $\boxtimes$

Πόρισμα 2: Εάν X ανακλαστικός και Y κλειστός γραμμ. υπόχωρος, τότε Y ανακλαστικός.

Απόδειξη: Εφ' όσον Y $\|\cdot\|$-κλειστό και Y κυρτό σύνολο, έπεται ότι Y w-κλειστό (Mazur).

Επειδή
$$B_Y = Y \cap B_X,$$
το B_Y είναι σχετικώς w-κλειστό υποσύνολο του $B_X \overset{\text{Πρότ. 1}}{=\!=}$ w-συμπαγές $\Rightarrow$ B_Y w-συμπαγές $\xrightarrow{\text{Πρότ. 1}}$ Y ανακλ. $\boxtimes$

Πόρισμα 3: Αν X ανακλ., τότε X^* ανακλ.

Απόδειξη:

Εφ' όσον $e(X) = X^{**}$, η w^*-τοπολογία στον X^* ταυτίζεται με την w-τοπολογία στον X^*. Τότε,
$$(B_{X^*}, w) = (B_{X^*}, w^*) \overset{(\text{Θ. Αλάογλου})}{=\!=} \text{συμπαγής},$$
οπότε X^* ανακλ., λόγω Πρότ. 1. $\boxtimes$

<u>Πόρισμα 4</u>: Εάν X <u>Banach</u> και X^* ανακλαστικός, τότε και X ανακλ.

<u>Απόδειξη</u>: Επειδή X <u>Banach</u> και $e: X \to X^{**}$ <u>γραμμική ισομετρία</u>, ο $e(X)$ είναι <u>κλειστός</u> γραμμ. υπόχ. του X^{**} και X ισομετρικός με τον $e(X)$.
Επειδή X^* ανακλ., έπεται ότι ο X^{**} ανακλ. (βλ. Πόρισμα 3) $\xRightarrow{\text{Πόρισμα 2}}$ $e(X)$ ανακλ. $\Rightarrow$ X ανακλ. $\boxtimes$

<u>Πόρισμα 5</u>: Έστω X ανακλ. και $f \in X^*$.
Τότε, $\exists\, x \in B_X \mid f(x) = \|f\|$.

<u>Απόδ</u>: Πρόταση 1 $\Rightarrow$ (B_X, w) <u>συμπαγής</u>.
Επειδή $f|_{B_X} : (B_X, w) \to \mathbb{R}$ συνεχής,
$\exists\, x \in B_X \mid$

$$f(x) = \sup\{f(z) : z \in B_X\}$$
$$= \sup\{|f(z)| : z \in B_X\}$$
$$= \|f\|. \quad \boxtimes$$

Πόρισμα 6: Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(i) X ανακλαστικός

(ii) κάθε φραγμένη ακολουθία στον X έχει W–συγκλίνουσα υπακολουθία.

Απόδειξη: Προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 1 κ' το Θ. Eberlein–Smulian.

$\boxtimes$

Παραδείγματα μη ανακλ. χώρων.

Οι c_0, ℓ^1, ℓ^∞ δεν είναι ανακλαστικοί.

Πράγματι: $c_0^{**} \equiv \ell^\infty$ μη διαχωρίσιμος επί c_0 διαχωρ. $\Rightarrow$ $c_0 \not\equiv c_0^{**}$.

$\ell^1 \equiv c_0^*$ και c_0 μη ανακλ. Banach

$\xRightarrow{\text{(Πόρισμα 4)}}$ ℓ^1 μη ανακλ. Banach

$\xRightarrow{\text{(Πόρισμα 4)}}$ ℓ^∞ " " ".

<u>Πρόταση 2</u>: Κάθε χώρος Hilbert είναι ανακλαστικός.

<u>Λήμμα</u>: Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T: X \to Y$ φραγμένος, γραμμικός τελεστής. $\forall\, g \in Y^*$, θέτουμε
$$T^*(g) = g \circ T.$$
Τότε, ο $T^*: Y^* \to X^*$ ορίζεται καλώς, είναι γραμμικός φραγμένος και $\|T^*\| = \|T\|$.

<u>Απόδειξη (Άσκηση!)</u>

<u>Απόδειξη Πρότασης 2</u>:

Από Θ. Riesz, γνωρίζουμε ότι ο τελεστής (+)
$$T: H \to H^*, \quad T(x)(y) = \langle x, y \rangle \quad \forall\, x, y \in H,$$
είναι γραμμική ισομετρία επί.

Θέτουμε $S = T^{-1} \circ T^*: H^{**} \to H$
$$H^{**} \xrightarrow{T^*} H^* \xrightarrow{T^{-1}} H.$$

(+) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ το εσωτ. γιν. στον H.

Έστω και η κανονική ισομετρική εμφύτευση

$$e : H \to H^{**}.$$

Θα δ.ο. $e(H) = H^{**}$.

Έστω $\Lambda \in H^{**}$. Θέτω $x = S(\Lambda) \in H$.

Θα δ.ο.

$$\Lambda = e(x).$$

Έστω $f \in H^* \Rightarrow \exists z \in H \mid f = T(z)$.

Έχουμε

$$x = T^{-1}(T^*(\Lambda))$$

$$\Rightarrow T(x) = \Lambda \circ T$$

και

$$e(x)(f) = f(x) = T(z)(x) = \langle z, x \rangle$$

$$= \langle x, z \rangle = T(x)(z)$$

$$= \Lambda(T(z)) = \Lambda(f).$$

$\boxtimes$

Συμπλήρωμα

Πρόταση 3: Έστω X ανακλαστικός χώρος Banach και $K \subset X$ που είναι κυρτό, $\|\cdot\|$-κλειστό κ' φραγμένο.

Τότε, K w-συμπαγές.

Απόδειξη: K κυρτό $\xRightarrow{\text{Mazur!}}$

$$\overline{K}^{w} = \overline{K}^{\|\cdot\|} = K$$

$$\Longrightarrow \boxed{K \text{ w-κλειστό}} \quad (1)$$

Επειδή K $\|\cdot\|$-φραγμένο, $\exists\, M > 0 \,|\, \boxed{K \subset M B_X}$ (2)

όπου $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$.

Αλλά X ανακλαστικός $\xRightarrow{\text{Πρότ. 1}}$ B_X w-συμπαγές

$\xRightarrow{(1),(2)}$ K w-συμπαγές. ☒

Εφαρμογή: $X = (\ell^2(\mathbb{N}), \|\cdot\|_2)$

$$K = \{x \in \ell^2 : |x(k)| \leq \rho_k,\ k = 1, 2, \ldots\},$$

όπου $(\rho_k) \subset (0, +\infty)$ με

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2 < \infty.$$

Τότε, K w-συμπαγές. (Άσκηση!)