ΜΙΑ ΣΥΝΕΠΕΙΑ ΤΟΥ Θ. MAZUR

Πρόταση: Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα κ' $(x_n) \subseteq X$, $x \in X$ ώστε $x_n \xrightarrow{w} x$.
Τότε:

(i) $\forall k \geq 1$, $x \in \overline{co}^{\|\cdot\|}(x_j \mid j > k)$.

(ii) $\exists$ γν. αύξουσα ακολουθία $1 = k_1 < k_2 < k_3 < \cdots < k_n < k_{n+1} < \cdots$ φυσικών αριθμών κ' $(y_n) \subseteq X$ ώστε:

- $y_n \in co(x_j \mid k_n < j \leq k_{n+1})$, $n \geq 1$
- $\|y_n - x\| \xrightarrow{n \to \infty} 0$.

Απόδειξη: (i) $\forall k \geq 1$, $(x_n)_{n>k} \xrightarrow{w} x \Rightarrow x \in \overline{co}^{w}(x_j \mid j > k) \overset{(\text{Θ. Mazur})}{=}$

$= \overline{co}^{\|\cdot\|}(x_j \mid j > k)$.

(ii) Θέτω $\underline{k_1 = 1}$. Λόγω του (i), $x \in \overline{co}^{\|\cdot\|}(x_j \mid j > k_1)$

$\Rightarrow \exists\, y_1 \in co(x_j \mid j > k_1)$ με $\underline{\|y_1 - x\| < 1}$.

Τότε, $\exists\, \underline{k_2 > k_1} \mid$ $y_1 \in \underline{co(x_j \mid k_1 < j \leq k_2)}$.

Λόγω του (i), $x \in \overline{co}^{\|\cdot\|}(x_j \mid j > k_2) \Rightarrow \exists\, y_2 \in co(x_j \mid j > k_2)$

με $\underline{\|y_2 - x\| < 1/2}$. Τότε, $\exists\, \underline{k_3 > k_2}$ ώστε

$\underline{y_2 \in co(x_j \mid k_2 < j \leq k_3)}$.

Πάλι λόγω του (i), $x \in \overline{co}^{\|\cdot\|}(x_j \mid j > k_3)$

$\Rightarrow \exists\, y_3 \in co(x_j \mid j > k_3)$ με $\underline{\|y_3 - x\| < 1/3}$. Τότε,
$\exists\, \underline{k_4 > k_3 \mid}$ $\underline{y_3 \in co(x_j \mid k_3 < j \leq k_4)}$, κ.ο.κ.

Επαγωγικά, επιλέγουμε $1 = k_1 < k_2 < k_3 < \dots < k_n < k_{n+1} < \dots$

κ' $(y_n) \subseteq X$ ώστε

- $y_n \in co(x_j \mid k_n < j \leq k_{n+1})$, $n \geq 1$.
- $\|y_n - x\| < 1/n$, $n \geq 1$.

Προφανώς, $\|y_n - x\| \xrightarrow{n \to \infty} 0$. $\boxtimes$

<u>Πόρισμα:</u> Εάν $x_n \xrightarrow{w} x$, τότε $\exists$ γν. αύξουσα ακολουθία (k_n) φυσικών αριθμών κ' $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \subset [0, 1]$ ώστε

- $\sum\limits_{k_n < j \leq k_{n+1}} \lambda_j = 1$, $n \geq 1$.
- $\left\| \sum\limits_{k_n < j \leq k_{n+1}} \lambda_j x_j - x \right\| \xrightarrow{n \to \infty} 0$.

Απόδειξη: Έστω $1 = k_1 < k_2 < \dots < k_n < k_{n+1} < \dots$ κ' $(y_n) \subseteq X$ όπως στην πρόταση.

$\forall n \geq 1$, $y_n \in co(x_j \mid k_n < j \leq k_{n+1}) \Rightarrow \exists \{a_j^{(n)}\}_{k_n < j \leq k_{n+1}} \subset [0,1]$ ώστε

- $\displaystyle\sum_{k_n < j \leq k_{n+1}} a_j^{(n)} = 1$

- $\displaystyle y_n = \sum_{k_n < j \leq k_{n+1}} a_j^{(n)} x_j$.

$\forall j \geq 2$, $\exists ! n \geq 1 \mid k_n < j \leq k_{n+1}$, οπότε θέτουμε $\lambda_j = a_j^{(n)}$.
Θέτουμε κ' $\lambda_1 = 0$.
Τότε, η $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}$ έχει τις επιθυμητές ιδιότητες. $\boxtimes$