ΑΣΘΕΝΕΙΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΕΣ

Υπενθυμίσεις:

Έστω X γραμμικός χώρος κ' $\Phi \subset X^{\#}$ που χωρίζει σημεία, δηλ.

$$\forall x \neq 0, \ \exists f \in \Phi \mid f(x) \neq 0.$$

Η ασθενής τοπολογία στον X που επάγεται από την Φ είναι η μικρότερη τοπολογία του X ως προς την οποία όλα τα $f \in \Phi$ είναι συνεχή.

Συμβολ: τ_Φ.

- Ο (X, τ_Φ) είναι τοπολογικός γραμμικός χώρος, τοπικά κυρτός.
- Μιά βάση περιοχών του 0 ως προς την τ_Φ είναι το σύνολο των πεπερασμένων τομών συνόλων της μορφής

$$f^{-1}((-\varepsilon, \varepsilon)), \ \varepsilon > 0, \ f \in \Phi.$$

- Αν $(x_n) \subset X$, $x \in X$, τότε

$$x_n \xrightarrow{\tau_\Phi} x \iff f(x_n) \to f(x), \ \forall f \in \Phi.$$

• Μια γραμμική απεικόνιση

$$f:(X,\tau_\phi)\to\mathbb{R}$$

είναι συνεχής ανν $f\in\langle\phi\rangle$,

δηλ. $(X,\tau_\phi)^*=\langle\phi\rangle$.

• Η τ_ϕ ταυτίζεται με τοπολογία νόρμας στον X ανν $\dim X<\infty$.

Σε ό,τι ακολουθεί, ο $(X,\|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα με $X\neq\{0\}$ κ'

$$X^*=\{f:X\to\mathbb{R} \mid f \text{ φραγμένο (συνεχές) γραμμικό συναρτησιακό}\}$$

ο δυϊκός (συζυγής) του X.

Γνωρίζουμε (Θ. Hahn–Banach) ότι ο X^* <u>χωρίζει σημεία στον X</u>.

<u>Ορισμός 1</u>: Η τοπολογία τ_ϕ με $\phi=X^*$, ονομάζεται <u>ασθενής τοπολογία</u> του X κ' συμβολίζεται με $\underline{\tau_w}$ ή $\underline{\sigma(X,X^*)}$

ή <u>απλούστερα</u> $\underline{w}$.

Με βάση τα παραπάνω έχουμε:

→ ο (X, w) είναι τοπολογικός γραμμ. χώρος, τοπικά κυρτός.

→ Μια βάση w–περιοχών του 0 είναι το σύνολο των συνόλων της μορφής

$$\bigcap_{j=1}^{k} f_j^{-1}((-\varepsilon, \varepsilon)), \quad \varepsilon > 0, \ f_j \in X^*, \ 1 \leq j \leq k, \ k \geq 1.$$

→ Αν $(x_n) \subset X$, $x \in X$, τότε

$$x_n \xrightarrow{w} x \iff f(x_n) \to f(x), \ \forall f \in X^*.$$

→ Τα <u>συνεχή</u> <u>γραμμικά</u> συναρτησιακά

$$f : (X, w) \to \mathbb{R}$$

είναι ακριβώς τα στοιχεία του X^*. δηλ. $(X, w)^* = X^*$.

→ $\tau_w \subset \tau_{\|\cdot\|}$ ς' η ισότητα ισχύει <u>μόνο</u> <u>αν</u> <u>$\dim X < \infty$</u>.

[Με $\tau_{\|\cdot\|}$ συμβολίζουμε την τοπολογία που επάγει η νόρμα $\|\cdot\|$ στον X.]

Για τη συνέχεια, θα χρειαστούμε τα παρακάτω:

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ (BAIRE!)</u> Έστω (X,d) <u>πλήρης</u> μετρικός χώρος κ' $(F_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του X με

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n .$$

Τότε, $\exists n \geq 1 \mid \overset{\circ}{F_n} \neq \emptyset$.

<u>Θεώρημα 2 (Αρχή Ομοιομόρφου Φράγματος)</u>
Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος <u>Banach</u>, Y χώρος με νόρμα κ' $(T_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια φραγμένων γραμμικών τελεστών από τον X στον Y, τέτοια ώστε

$$\boxed{\forall x \in X, \quad \sup_{i\in I} \|T_i(x)\| < \infty.} \quad (1)$$

Τότε, $\sup_{i\in I} \|T_i\| < \infty$.

<u>Απόδειξη:</u>

$\forall n \geq 1$, θέτουμε

$$F_n = \bigcap_{i \in I} \{x \in X \mid \|T_i(x)\| \leq n\}.$$

Λόγω συνέχειας των T_i, $i \in I$, το F_n είναι κλειστό στον X, $\forall n \geq 1$.

Επιπλέον, η υπόθεση (1) συνεπάγεται ότι

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Επειδή ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι Banach, από Θ. Baire έπεται ότι $\exists n_0 \geq 1 /$

$$\mathring{F}_{n_0} \neq \emptyset,$$

δηλ. $\exists\, x_0 \in F_{n_0}$ κ' $r > 0$ ώστε

$$B(x_0, r) \subset F_{n_0}.$$

Έστω $i \in I$, $z \in X$ με $\|z\| = 1$. Τότε,

$$x_0 + \frac{r}{2} z \in B(x_0, r) \subset F_{n_0}$$

$$\Rightarrow \|T_i(x_0) + \frac{r}{2} T_i(z)\| \leq n_0$$

$$\Rightarrow \frac{r}{2} \|T_i(z)\| \leq n_0 + \|T_i(x_0)\| \leq 2n_0$$

$$\Rightarrow \|T_i(z)\| \leq \frac{4n_0}{r}.$$

Επειδή η τελευταία ισχύει $\forall i \in I$, $\forall z \in X$ με $\|z\|=1$, παίρνουμε

$$\sup_{i\in I} \|T_i\| \leq \frac{4n_0}{r} < \infty. \quad \boxtimes$$

Θεώρημα 3 (Banach-Steinhaus)

Έστω X χώρος Banach, Y χώρος με νόρμα κ' $(T_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία φραγμένων γραμμικών τελεστών από τον X στον Y ώστε $\forall x\in X$, υπάρχει το $\lim_n T_n(x) \in \mathbb{R}$.

Θέτουμε $T(x) = \lim_n T_n(x)$, $x \in X$.

Τότε, T φραγμένος γραμμικός τελεστής.

Απόδειξη: Προφανώς ο T είναι γραμμικός.

Επιπλέον, $\forall x\in X$, η ακολουθία $(T_n(x))$ είναι συγκλίνουσα, άρα φραγμένη ως προς τη νόρμα του Y, δηλ.

$$\forall x \in X, \quad \sup_n \|T_n(x)\| < \infty.$$

Από Θ-2, $\sup_n \|T_n\| = M < \infty$.

Τότε, $\forall x \in X$,

$$\|T(x)\| = \lim_n \|T_n(x)\| \leq M \cdot \|x\|. \quad \boxtimes$$

<u>Σχόλιο:</u> Η υπόθεση "X Banach" στο Θ.2 δεν μπορεί να παραλειφθεί.

<u>Παράδειγμα:</u> Έστω c_0 ο γραμμικός χώρος των μηδενικών ακολουθιών, δηλ.

$$c_0 = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \lim_{n\to\infty} x(n) = 0\}.$$

Είναι γνωστό ότι ο $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος Banach, όπου

$$\|x\|_\infty = \sup_n |x(n)|.$$

Θέτουμε επιπλέον

$$c_{00} = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid x(n) = 0, \text{ τελικά}$$

$$\text{δηλ. } \exists n_0 \mid x(n) = 0, \forall n \geq n_0\}.$$

Προφανώς $c_{00} \subsetneqq c_0$.

<u>Άσκηση:</u> <u>Να δ.ο:</u>

(i) $\overline{c_{00}}^{\|\cdot\|_\infty} = c_0$ κ' ο $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ <u>δεν</u> είναι Banach.

(ii) Θέτουμε $f_n : c_{00} \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$ με

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x(k)}{k}, \quad x \in c_{00}.$$

Τότε, • $f_n \in c_{00}^*$, $n \geq 1$

• $\forall x \in c_{00}$, $\sup_n |f_n(x)| < \infty$

• $\sup_n \|f_n\| = \infty$.

Επανερχόμαστε στις ιδιότητες της ασθενούς τοπολογίας.

Πρόταση 4: Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα κ' $K \subset X$ w-συμπαγές. Τότε, το K είναι W-κλειστό κ' $\|\cdot\|$-φραγμένο.

Απόδειξη: Επειδή (X, w) τοπολ. γραμμ. χ., θα είναι κ' T_2 $\Rightarrow$ K w-κλειστό.

$\forall x \in X$, θεωρούμε το φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό

$$e(x) : X^* \to \mathbb{R},\ e(x)(f) = f(x),\ \forall f \in X^*.$$

$\forall f \in X^*$, η $f : (X, w) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής

$\Rightarrow$ $f(K)$ συμπαγές $\subset \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \sup_{x \in K} |f(x)| < \infty$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in K} |e(x)(f)| < \infty.$$

Αλλά ο X^* είναι Banach (!)
[Θεώρ. 2]

$$\Longrightarrow \sup_{x\in K} \|e(x)\| < \infty$$

$$\Longrightarrow \sup_{x\in K} \|x\| < \infty. \quad \boxtimes$$

Ασθενής σύγκλιση στον c_0

Θεωρούμε το χώρο

$$\ell^1 = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)| < \infty\}.$$

Ο ℓ^1 είναι γραμμικός χώρος κ' Banach

ως προς τη νόρμα

$$\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|.$$

Θεώρημα 5 :

(i) $\forall z \in \ell^1$, η απεικόνιση $f_z : c_0 \to \mathbb{R}$

με $f_z(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n) z(n)$

είναι ένα στοιχείο του $(c_0, \|\cdot\|_\infty)^*$
με $\|f_z\| = \|z\|_1$.

(ii) Η απεικόνιση $\ell^1 \ni z \mapsto f_z \in c_0^*$

είναι γραμμική ισομετρία επί.

<u>Απόδειξη:</u> (i) Ελέγχεται εύκολα (<u>άσκηση</u>) ότι $\forall z \in \ell^1$, $f_z \in c_0^*$ με

$$\|f_z\| \leq \|z\|_1.$$

Θα δ.ο. ισχύει η ισότητα.

Έστω $z \in \ell^1$, $\varepsilon > 0$. $\exists N \in \mathbb{N} \mid$

$$\sum_{n>N} |z(n)| < \varepsilon.$$

$\forall n \in \{1, 2, \ldots, N\}$, θέτουμε

$$\lambda_n = \begin{cases} 1, & \text{αν } z(n) \geq 0 \\ -1, & \text{αν } z(n) < 0. \end{cases}$$

Τότε, $\underline{|\lambda_n| = 1}$, $\underline{\lambda_n z(n) = |z(n)|,\ 1 \leq n \leq N}$.

Θέτουμε

$$x = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N, 0, 0, \ldots) \in c_0.$$

Τότε, $\|x\|_\infty = 1$ κ'

$$\|z\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |z(n)| = \sum_{n=1}^{N} |z(n)| +$$

$$+ \sum_{n>N} |z(n)| < \sum_{n=1}^{N} \lambda_n z(n) + \varepsilon =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} x(n) z(n) + \varepsilon = f_z(x) + \varepsilon$$

$$\leq \|f_z\| + \varepsilon$$

[(†) Δεν ενωσαίμε Παπού!!]

Η τελευταία ισχύει $\forall \varepsilon > 0$

$$\Longrightarrow \|z\|_1 \leq \|f_z\| \Rightarrow \|z\|_1 = \|f_z\|.$$

(iii) Έστω $f \in c_0^*$ κ' (e_n) η "φυσική" βάση" του c_0, δηλ. $\forall n \geq 1$,

$$e_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad e_n(k) = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n. \end{cases}$$

Θέτουμε

$$\mu_n = \begin{cases} 1, & f(e_n) \geq 0 \\ -1, & f(e_n) < 0, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Τότε, $\mu_n f(e_n) = |f(e_n)|, \quad n \geq 1.$

Επιπλέον, $\forall n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} |f(e_k)| = \sum_{k=1}^{n} \mu_k f(e_k) =$$

$$= f\left(\sum_{k=1}^{n} \mu_k e_k\right) \leq \|f\| \cdot \left\|\sum_{k=1}^{n} \mu_k e_k\right\|_\infty =$$

$$= \|f\| \cdot \|(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, 0, 0, \ldots)\|_\infty$$

$$= \|f\|$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |f(e_k)| \leq \|f\| < \infty.$$

Θέτουμε

$$z = (f(e_k))_{k=1}^{\infty} \in \ell^1.$$

Θα δ-ο. $f = f_z$.

Πράγματι· έστω $x \in c_0$ κ' $\varepsilon > 0$.
Τότε, $\exists N \in \mathbb{N} \mid$
$\forall n \geq N$, $|x(n)| < \varepsilon$

$$\Rightarrow \left\| \sum_{k=1}^{n} x(k) e_k - x \right\|_\infty =$$

$$= \| (0, 0, \ldots, 0, x(n+1), x(n+2), \ldots) \|_\infty \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} x(k) e_k \xrightarrow[n \to \infty]{\|\cdot\|_\infty} x.$$

Επομένως,

$$\sum_{k=1}^{n} x(k) z(k) = \sum_{k=1}^{n} x(k) f(e_k) =$$

$$= f\left(\sum_{k=1}^{n} x(k) e_k \right) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(x)$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k) z(k) = f_z(x).$$

$\boxtimes$

<u>Πρόταση 6</u>: Έστω $(x_n) \subset c_0$, $x \in c_0$.
Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

<u>(i)</u> $x_n \xrightarrow{w} x$.

<u>(ii)</u> $\sup_n \|x_n\|_\infty < \infty$ κ' $x_n(k) \xrightarrow{n \to \infty} x(k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

<u>Απόδειξη:</u>

<u>(i) ⇒ (ii)</u>: Το $K = \{x_n : n \geq 1\} \cup \{x\}$ είναι <u>w−συμπαγές</u> κ' άρα $\|\cdot\|_\infty$−φραγμένο (βλ. Πρόταση 4!)

$\forall k$, θέτουμε $e_k^* : c_0 \to \mathbb{R}$ με
$e_k^*(y) = y(k)$, $\forall y \in c_0$.

Προφανώς, $e_k^* \in c_0^*$ κ' άρα

$$x_n(k) = e_k^*(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} e_k^*(x) = x(k), \forall k.$$

<u>(ii) ⇒ (i)</u> Έστω $f \in c_0^* \overset{[\Theta.5]}{\Longrightarrow}$
$\exists z \in \ell^1 \mid f(y) = \sum_{k=1}^{\infty} y(k) z(k)$,
$\forall y \in c_0$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε, $\exists N \in \mathbb{N} \mid$

$$\boxed{\sum_{k>N} |z(k)| < \frac{\varepsilon}{2M}} \quad (2)^{(+)}$$

Επειδή $x_n(k) \xrightarrow{n\to\infty} x(k)$, $\forall k \in \{1, 2, \ldots, N\}$,
έχουμε

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N} |x_n(k) - x(k)| \cdot |z(k)| = 0} \quad (3)$$

(+) $M = \sup_n \|x_n\|_\infty$

Επομένως, $\forall n \geq 1$,

$$|f(x_n)-f(x)| = |f(x_n - x)| =$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{\infty} [x_n(k)-x(k)]\cdot z(k)\right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_n(k)-x(k)|\cdot|z(k)|$$

$$= \sum_{k=1}^{N} |x_n(k)-x(k)|\cdot|z(k)| +$$

$$+ \sum_{k>N} |x_n(k)-x(k)|\cdot|z(k)|$$

$$\overset{(2)}{\Longrightarrow} |f(x_n)-f(x)| \leq \sum_{k=1}^{N} |x_n(k)-x(k)|\cdot|z(k)| + \varepsilon, \quad \forall n \geq 1$$

$$\overset{(3)}{\Longrightarrow} \limsup_n |f(x_n)-f(x)| \leq \varepsilon.$$

Η τελευταία ισχύει $\forall \varepsilon > 0$

$$\Longrightarrow \lim_n |f(x_n)-f(x)| = 0. \quad \boxtimes$$

<u>Παράδειγμα:</u> Έστω (e_n) η φυσική "βάση" του c_0, δηλ.

$$e_n(k) = \begin{cases} 1, & k=n \\ 0, & k\neq n \end{cases}$$

$n, k \geq 1$.

Τότε, $e_n \xrightarrow{w} 0$. Πράγματι

$$\|e_n\|_\infty = 1, \quad n \geq 1$$

κ' $\forall k \geq 1$, $e_n(k) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ [αφού

$$e_n(k) = 0, \quad \forall n > k \text{].}$$

Σημ. ότι η (e_n) δεν είναι $\|\cdot\|_\infty$-συγκλίνουσα αφού

$$\|e_{n+1} - e_n\|_\infty = 1, \quad \forall n \geq 1.$$

<u>Ασθενής σύγκλιση σε χώρο Hilbert</u>

Έστω $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle, \|\cdot\|)$ χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ κ' επαγόμενη νόρμα $\|\cdot\|$.

Γνωρίζουμε (Θ. Riesz) ότι $\forall f \in H^*$, $\exists! x_0 \in H$ |

- $f(x) = \langle x, x_0 \rangle, \quad \forall x \in H$
- $\|f\| = \|x_0\|$.

Συνεπώς, αν $(x_n) \subset H$, $x \in X$, τότε

$$x_n \xrightarrow{w} x \text{ ανν } \forall z \in H, \langle x_n, z \rangle \xrightarrow{n \to \infty} \langle x, z \rangle.$$

<u>Άσκηση!</u> Έστω H διαχωρίσιμος χώρος Hilbert κ' (e_n) μια ορθοκανονική βάση του H.
Εάν $(x_n) \subset H$, τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

<u>(i)</u> Η (x_n) είναι w-συγκλίνουσα.

<u>(ii)</u> (x_n) $\|\cdot\|$-φραγμένη κ' $\forall k \geq 1$,

το $\lim_n \langle x_n, e_k \rangle$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$.

<u>Περαιτέρω ιδιότητες της ασθενούς τοπολογίας</u>

<u>Θεώρημα 7 (Mazur)</u> Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και $A \subset X$ <u>κυρτό</u>. Τότε,

$$\overline{A}^{w} = \overline{A}^{\|\cdot\|}.$$

<u>Απόδειξη:</u> Εάν $A = \emptyset$ ισχύει. <u>Έστω $A \neq \emptyset$.</u>
Επειδή $\mathcal{T}_{\|\cdot\|} \supset \mathcal{T}_w$, έπεται εύκολα ότι $\overline{A}^{\|\cdot\|} \subset \overline{A}^{w}$.

Υποθέτουμε ότι $\overline{A}^{\|\cdot\|} \subsetneq \overline{A}^{w}$

$$\Rightarrow \exists x_0 \in \overline{A}^{w} \setminus \overline{A}^{\|\cdot\|}.$$

Εφαρμόζοντας το 2ο Γεωμετρικό Hahn–Banach στα κυρτά σύνολα $\{x_0\}$, $\overline{A}^{\|\cdot\|}$

($\{x_0\}$ = συμπαγές, $\overline{A}^{\|\cdot\|}$ κυρτό, $\|\cdot\|$–κλειστό),

$\exists\, f \in X^* \setminus \{0\} \mid$

$$\underline{\sup f(A) < f(x_0).} \qquad (4)$$

Θέτουμε

$$\mu = \sup f(A).$$

Η $f:(X,w) \to \mathbb{R}$ είναι <u>συνεχής</u>, οπότε το σύνολο

$$G = \{x \in X \mid f(x) > \mu\}$$

είναι <u>w–ανοικτό</u> κ' $x_0 \in G$.

Εφ' όσον $x_0 \in \overline{A}^w$, θα πρέπει $A \cap G \neq \emptyset$, ΑΤΟΠΟ!

$\boxtimes$

<u>Πόρισμα 8:</u> Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα κ' $A \subset X$ κυρτό. Τότε:

(i) A $\|\cdot\|$–κλειστό ανν A w–κλειστό

(ii) A $\|\cdot\|$–πυκνό ανν A w–πυκνό.

<u>Πρόταση 9:</u> Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα κ' $(x_n) \subset X$, $x \in X$ με

$$x_n \xrightarrow{w} x.$$

Τότε, $\exists\, (y_n) \subset X$ ώστε

(i) $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$

(ii) $\forall n \geq 1$, y_n κυρτός συνδυασμός όρων της (x_n), δηλ. $y_n \in \mathrm{co}(x_j \mid j \geq 1)$

Απόδειξη: Θέτουμε

$$A = co(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots).$$

Προφανώς, A κυρτό κ' $x \in \overline{A}^{w}$

Πρότ.7 $\Longrightarrow$ [Mazur] $x \in \overline{A}^{\|\cdot\|}$

$$\Rightarrow \exists (y_n) \subset A \mid y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x. \quad \boxtimes$$

Θεώρημα 10: Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα κ' X απειροδιάστατος.

Τότε, ο (X, w) δεν είναι μετρικοποιήσιμος, δηλ. η T_w δεν ταυτίζεται με την τοπολογία κάποιας μετρικής.

Θα χρειαστούμε το παρακάτω

Λήμμα 11: Έστω $(E, \|\cdot\|)$ απειροδιάστατος χώρος Banach. Τότε, ο E δεν έχει βάση Hamel που να είναι αριθμήσιμη.

Απόδειξη: Έστω αντιθέτως ότι έχει αριθμήσιμη βάση Hamel $\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n, \dots\}$

Θέτουμε

$$F_n = \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle, \ n \geq 1.$$

Τότε, $\forall n \geq 1$, F_n <u>κλειστός</u> γραμμικός υπόχωρος κ' $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Από Θ. Baire, $\exists\, N \geq 1 \mid \overset{\circ}{F_N} \neq \emptyset$.

Τότε, $\exists\, x_0 \in F_N$ κ' $r > 0 \mid B(x_0, r) \subset F_N$.

$\forall x \in E$, με $x \neq 0$, $x_0 + \frac{r}{2\|x\|} x \in B(x_0, r) \subset F_N$

$\Longrightarrow \quad x \in \frac{2\|x\|}{r}(F_N - x_0) \subset F_N$

(αφού F_N γραμμ. υπόχ.). Άρα, $E = F_N = \langle e_1, e_2, \ldots, e_N \rangle$ (Άτοπο!) $\boxtimes$

<u>Απόδειξη Θ. 10:</u>

Υποθέτουμε αντιθέτως ότι ο (X, w) είναι μετρικοποιήσιμος, δηλ.

$$\tau_w = \tau_d,$$

όπου d μετρική. $\forall n \geq 1$, θέτουμε

$$V_n = \{x \in X \mid d(x, 0) < \tfrac{1}{n}\} = B_d(0, \tfrac{1}{n}).$$

Τότε, $\forall n \geq 1$, V_n w-ανοικτό $\ni 0$

$\Rightarrow \exists\, \Phi_n \subset X^*$ <u>πεπερασμένο</u> κ' $\varepsilon_n > 0 \mid$

$$\bigcap_{f \in \Phi_n} \{x \in X \mid |f(x)| < \varepsilon_n\} \subset V_n \tag{5}$$

Θέτουμε $\Phi = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi_n$.

Ισχυρισμός: $X^* = \langle \Phi \rangle$.

[Πράγματι· έστω $g \in X^*$. Τότε,
$g : (X, w) \to \mathbb{R}$ συνεχής

$\Rightarrow$ το σύνολο $U = g^{-1}((-1,1))$ είναι w-ανοικτό με $0 \in U$.

Επειδή U w-ανοικτό κ' $\tau_w = \tau_d$, είναι κ' d-ανοικτό $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} /$

$$V_N = B_d(0, 1/N) \subset U$$

$$\overset{(5)}{\Rightarrow} \bigcap_{f \in \Phi_N} \{x \in X \mid |f(x)| < \varepsilon_N\} \subset U$$

$\Rightarrow Y = \bigcap_{f \in \Phi_N} \ker f \subset U$. Έστω $y \in Y$.

Τότε, $\forall k \geq 1$, $ky \in Y \subset U \Rightarrow |g(ky)| < 1$

$\Rightarrow |g(y)| < 1/k, \forall k \geq 1 \Rightarrow g(y) = 0$

$$\Rightarrow \bigcap_{f \in \Phi_N} \ker f \subset \ker g$$

$$\xrightarrow{[\Phi_N \text{ πεπερ.}]} g \in \langle \Phi_N \rangle \subset \langle \Phi \rangle. \quad]$$

Επειδή Φ αριθμήσιμο, ο ισχυρισμός δίνει ότι ο X^* έχει αριθμήσιμη βάση Hamel!

Αλλά X^* Banach $\xRightarrow{[\text{Λήμμα } 11]}$ $\dim X^* < \infty$

$\Rightarrow \dim X < \infty$ (Άτοπο!)

$\boxtimes$

Άσκηση! Έστω $(X, \|\cdot\|)$ απειροδιάστατος χώρος με νόρμα. Θέτουμε

$$B_X = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}, \quad S_X = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}.$$

Να δ.ο:

(i) Εάν V w-ανοικτό με $0 \in V$, τότε $\exists$ γραμμικός υπόχωρος Y με

$$Y \subset V, \quad Y \neq \{0\}.$$

(ii) Εάν $x_0 \in B_X$, $z \in S_X$, τότε $\exists$ $t \geq 0$ / $x_0 + tz \in S_X$.

(iii) $$\overline{S_X}^{w} = B_X.$$

<u>Υπενθύμιση</u>: Έστω (X, τ) τοπολογικός χώρος κ' $A \subset X$. <u>Η σχετική τοπολογία του A</u> ως προς την τ είναι:

$$\tau|_A = \{ A \cap G \mid G \in \tau \}.$$

<u>Πρόταση 12</u>: Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα, $A \subset X$ <u>φραγμένο</u> κ' $D \subset X^*$ <u>$\|\cdot\|$-πυκνό</u>. Τότε,

$$\tau_w|_A = \tau_D|_A,$$

όπου τ_D η ασθενής τοπολογία του X που επάγεται από το D.

<u>Απόδειξη</u>: Εφ' όσον D $\|\cdot\|$-πυκνό $\subset X^*$, το D <u>χωρίζει σημεία</u> (άσκηση!), οπότε ορίζεται καλώς η τ_D κ' έχει τις γνωστές ιδιότητες.

• <u>Είναι $\tau_D \subset \tau_w$</u>. Πράγματι όλα τα $f \in D$ είναι συνεχή ως προς την τ_w κ' η τ_D είναι η μικρότερη τοπολογία στον X με αυτή την ιδιότητα.

Άρα, κ' $\boxed{\tau_D|_A \subset \tau_w|_A.}$

• Θα δ.ο. $\tau_W|A \subset \tau_D|A$.

Ισχυρισμός: Έστω $x \in A$, $g \in X^*$, $\varepsilon > 0$.

Τότε, $\exists f \in D|$

$$A \cap [x + f^{-1}((-\varepsilon/2, \varepsilon/2))] \subset$$

$$\subset A \cap [x + g^{-1}((-\varepsilon, \varepsilon))].$$

Πράγματι: θέτουμε

$$M = \sup\{\|z\| : z \in A\}.$$

Επιλέγουμε $f \in D$ με

$$\|g - f\| < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Έστω $z \in A \cap [x + f^{-1}((-\varepsilon/2, \varepsilon/2))]$.

Τότε, $z \in A$ κ' $|f(z-x)| < \varepsilon/2$

$$\Rightarrow |g(z-x)| \leq |(g-f)(z-x)| + |f(z-x)|$$

$$\leq \|g-f\| \cdot \|z-x\| + \varepsilon/2$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{4M} \cdot 2M + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Έστω $G \in \tau_W$ κ' $x \in A \cap G$.

Τότε, $\exists g_1, g_2, \dots, g_k \in X^*$, $\varepsilon > 0$
$(k \geq 1)$ με

$$\bigcap_{j=1}^{k} [x + g_j^{-1}((-\varepsilon, \varepsilon))] \subset G.$$

Ισχυρισμός $\Longrightarrow$ $\forall j, \ \exists f_j \in D \,|$

$$A \cap \left[x + f_j^{-1}\left((-\varepsilon/2, \varepsilon/2)\right) \right] \subset$$

$$\subset A \cap \left[x + g_j^{-1}\left((-\varepsilon, \varepsilon)\right) \right]$$

$$\Longrightarrow x \in A \cap \left\{ \bigcap_{j=1}^{k} \left[x + f_j^{-1}\left((-\varepsilon/2, \varepsilon/2)\right) \right] \right\} \subset$$

$$\subset A \cap \left\{ \bigcap_{j=1}^{k} \left[x + g_j^{-1}\left((-\varepsilon, \varepsilon)\right) \right] \right\}$$

$$\subset A \cap G$$

κ' το $A \cap \left\{ \bigcap_{j=1}^{k} \left[x + f_j^{-1}\left((-\varepsilon/2, \varepsilon/2)\right) \right] \right\}$

είναι ανοικτό στην $\tau_D|A$.

Άρα, $A \cap G \in \tau_D|A$. $\boxtimes$

~~Υπενθυμίζουμε ότι εάν X απειροδιάστατος χώρος με νόρμα, τότε (X, w) δεν είναι μετρικοποιήσιμος.~~

<u>Πρόταση 13</u>: Έστω X γραμμικός χώρος κ' $D \subset X^{\#}$ <u>αριθμήσιμο</u> που χωρίζει σημεία, τότε ο (X, τ_D) <u>είναι μετρικοποιήσιμος</u>, όπου τ_D η ασθενής τοπολογία που επάγεται από την D στον X.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $D = \{f_k : k \geq 1\} \subset X^{\#}$.

Θέτουμε
$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|f_k(x) - f_k(y)|}{1 + |f_k(x) - f_k(y)|},$$
$\forall\, x, y \in X$.

<u>Ισχυρισμός</u>: Η d είναι <u>μετρική</u> στον X κ' ικανοποιεί
$$d(x+z, y+z) = d(x,y), \ \forall\, x, y, z \in X.$$
Επιπλέον, $\forall k$, η f_k είναι <u>d-συνεχής</u>, δηλ. συνεχής ως προς την τοπολογία τ_d που επάγει η μετρική d.

<u>Απόδειξη ισχυρισμού</u>: <u>(Άσκηση!)</u>

[<u>Υπόδ</u>: Η $[0, +\infty) \ni t \mapsto \frac{t}{1+t} \in [0,1)$ είναι $\uparrow$, ομοιομορφισμός, επί.]

Εφ' όσον f_k τ_d-συνεχής, $\forall k$, ισχύει
$$\tau_D \subset \tau_d.$$

Θα δ-ο. ότι $\tau_d \subset \tau_D$. Αρκεί να δ-ο. $\forall x \in X$, $\forall \varepsilon > 0$,
$$B_d(x, \varepsilon) \in \tau_D,$$
όπου
$$B_d(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(y, x) < \varepsilon\}.$$

Αλλά $\quad B_d(x, \varepsilon) = x + B_d(0, \varepsilon).$

[Προκύπτει από το ότι $d(x+z, y+z) = d(x, y)$, $\forall\, x, y, z \in X$ (βλ. Ισχυρισμό).]

Επειδή (X, τ_D) είναι τοπολ.-γραμμικός χώρος, αρκεί να δ-ο.
$$\forall \varepsilon > 0, \quad B_d(0, \varepsilon) \in \tau_D.$$

Έστω $\varepsilon > 0$ και $z \in B_d(0, \varepsilon) \Rightarrow$
$\Rightarrow d(z, 0) < \varepsilon \Rightarrow \exists \rho > 0 \mid$
$$d(z, 0) + \rho < \varepsilon.$$
Επιλέγουμε $N \geq 1 \mid$
$$\sum_{k > N} \frac{1}{2^k} < \rho/2$$
και $\delta > 0 \mid$
$$\frac{\delta}{1+\delta} < \rho/2.$$

Θέτουμε $V = \bigcap_{k=1}^{N} f_k^{-1}((-\delta, \delta))$.

Τότε, $z+V$ τ_D – ανοικτό $\ni z$.

Θα δ.ο. $z+V \subset B_d(0,\varepsilon)$.

Πράγματι· έστω $v \in V$.

Τότε, $\longrightarrow |f_k(v)| < \delta,\ 1 \leq k \leq N$

$$\Rightarrow d(v,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_k(v)|}{1+|f_k(v)|} \cdot \frac{1}{2^k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \frac{|f_k(v)|}{1+|f_k(v)|} \cdot \frac{1}{2^k} + \sum_{k>N} \frac{|f_k(v)|}{1+|f_k(v)|} \cdot \frac{1}{2^k}$$

$$\overset{(+)}{\leq} \frac{\delta}{1+\delta} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k} + \sum_{k>N} \frac{1}{2^k}$$

$$< \frac{\delta}{1+\delta} + \rho/2 < \rho/2 + \rho/2 = \rho.$$

Άρα, $d(z+v, 0) \leq d(z+v, z) + d(z, 0) =$

$$= d(v,0) + d(z,0) < \rho + d(z,0) < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow z+v \in B_d(0,\varepsilon). \quad \boxtimes$$

(+) σημ. ότι η $t \mapsto \dfrac{t}{1+t} \nearrow$ στο $[0,+\infty)$.

Πόρισμα 14: Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα, ώστε X^* διαχωρίσιμος. Τότε, για κάθε $A \subset X$ φραγμένο, ο

$$(A, \tau_{w|A}) \text{ ή } (A, w)$$

είναι μετρικοποιήσιμος.

Απόδειξη: Έστω $D \subset X^*$ αριθμήσιμο, $\|\cdot\|$-πυκνό.

Πρόταση 12 $\Longrightarrow$ $\tau_{w|A} = \tau_{D|A}$

κ' Πρόταση 13 $\Longrightarrow$ (X, τ_D) μετρικοποιήσιμος

$\Longrightarrow$ $(A, \tau_{D|A})$ μετρικοποιήσιμος

$\Longrightarrow$ $(A, \tau_{w|A})$ μετρικοποιήσιμος.

$\boxtimes$

Συμπλήρωμα

Ασθενής σύγκλιση στον ℓ^1 – Ιδιότητα Schur

$(\ell^1)^* \equiv \ell^\infty$, δηλ. η απεικόνιση

$$\ell^\infty \ni \alpha \mapsto \Lambda_\alpha \in (\ell^1)^*$$

με

$$\Lambda_\alpha(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(j) z(j), \ \forall z \in \ell^1,$$

είναι γραμμική ισομετρία επί.

(Απόδειξη ως άσκηση!)

Εάν $X = c_0$ ή ℓ^p $(1<p<\infty)$ κ' (e_n) η "φυσική βάση" του X, τότε

$$e_n \xrightarrow{w} 0, \quad \|e_{n+1} - e_n\|_X \not\to 0.$$

Επομένως, η ασθενής σύγκλιση ακολουθίας στον X δεν συνεπάγεται $\|\cdot\|$–σύγκλιση.

Αντίθετα, ο ℓ^1 έχει μια αναπάντεχη ιδιότητα, που περιγράφεται στο παρακάτω (Ιδιότητα Schur).

Θεώρημα 15:

Εάν $(x_n) \subset \ell^1$, τότε

$$x_n \xrightarrow{w} 0 \text{ ανν } \|x_n\|_1 \xrightarrow{n} 0.$$

<u>Σχόλιο:</u> Οι δυϊκοί των c_0, ℓ^p, $1<p<\infty$, είναι χώροι "μικρότεροι" από τον $(\ell^1)^* \equiv \ell^\infty$. Π.χ. για $1<p<\infty$, $(\ell^p)^* \equiv \ell^q$, $1/p + 1/q = 1$.

Επειδή ο $(\ell^1)^*$ είναι "μεγάλος" χώρος (δηλ. με πολλά στοιχεία), είναι αδύνατο να πετύχει κανείς για μια ακολουθία $(x_n) \subset \ell^1$ να ισχύει $x_n \xrightarrow{w} 0$, δηλ. $\Lambda(x_n) \xrightarrow{n} 0$, $\underline{\forall \Lambda \in (\ell^1)^*}$ κι ταυτόχρονα $\|x_n\|_1 \not\to 0$.

<u>Απόδειξη Θ.1.5.:</u> Έστω $(x_n) \subset \ell^1$ με $x_n \xrightarrow{w} 0$ κι $\|x_n\|_1 \not\to 0$. Περνώντας σε υπακολουθία, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\exists\, \theta > 0 \mid \|x_n\|_1 > \theta$, $\forall n \geq 1$. (γιατί;) Εργαζόμενοι με την ακολουθία $\left(\frac{x_n}{\|x_n\|_1}\right)_{n=1}^{\infty}$ $(\xrightarrow{w} 0)$, <u>μπορούμε να υποθέσουμε ότι</u>

$$\boxed{\|x_n\|_1 = 1, \quad \forall n \geq 1}$$

<u>Ισχυρισμός</u>: Έστω $N \geq 1$, $l \geq 1$ ώστε

$$\sum_{j=1}^{N} |x_l(j)| < \frac{1}{100}.$$

Τότε, $\exists\, M > N$, $\exists\, m > l$ ώστε

$$\sum_{j=N+1}^{M} |x_l(j)| > \frac{9}{10}, \quad \sum_{j=1}^{M} |x_m(j)| < \frac{1}{100}.$$

Πράγματι: $1 = \|x_l\|_1 < \frac{1}{100} + \sum_{j>N} |x_l(j)|$

$$\Rightarrow \sum_{j>N} |x_l(j)| > \frac{99}{100} > \frac{9}{10}$$

$$\Rightarrow \exists\, M > N \;\Big|\; \boxed{\sum_{j=N+1}^{M} |x_l(j)| > \frac{9}{10}.}$$

Επειδή $\lim_{n\to\infty} |x_n(j)| = 0$, $\forall j \in \{1, 2, \dots, M\}$,

έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{M} |x_n(j)| = 0$$

$$\Rightarrow \exists\, m > l \;\Big|\; \boxed{\sum_{j=1}^{M} |x_m(j)| < \frac{1}{100}.}$$

$\|x_1\|_1 = 1 \Rightarrow \exists N_1 > 1 \mid \sum_{j=1}^{N_1} |x_1(j)| > \underline{1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}}.$

Επειδή $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{N_1} |x_n(j)| = 0$, $\exists n_2 > 1 \mid$

$$\underline{\sum_{j=1}^{N_1} |x_{n_2}(j)| < \frac{1}{100}}.$$

Ισχυρισμός $\Longrightarrow \exists N_2 > N_1, \exists n_3 > n_2 \mid$

$$\underline{\sum_{j=N_1+1}^{N_2} |x_{n_2}(j)| > \frac{9}{10}}, \quad \underline{\sum_{j=1}^{N_2} |x_{n_3}(j)| < \frac{1}{100}}$$

Ισχυρισμός $\Longrightarrow \exists N_3 > N_2, \quad \exists n_4 > n_3 \mid$

$$\underline{\sum_{j=N_2+1}^{N_3} |x_{n_3}(j)| > \frac{9}{10}}, \quad \underline{\sum_{j=1}^{N_3} |x_{n_4}(j)| < \frac{1}{100}}$$

κ.ο.κ. $\exists 1 < N_1 < N_2 < N_3 < \cdots$,
$\exists 1 = n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$

ώστε

$$\underline{\sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} |x_{n_{k+1}}(j)| > \frac{9}{10}}, \quad \underline{\sum_{j=1}^{N_k} |x_{n_{k+1}}(j)| < \frac{1}{100}}$$

για $k = 1, 2, 3, \ldots$ και

$$\underline{\sum_{j=1}^{N_1} |x_1(j)| > \frac{9}{10}}$$

Θέτουμε
$$y_k = x_{n_k}, \quad k=1,2,3,\ldots$$

οπότε
$$\sum_{N_k < j \le N_{k+1}} |y_{k+1}(j)| > \frac{9}{10}, \quad \sum_{j=1}^{N_k} |y_{k+1}(j)| < \frac{1}{100},$$
$k=1,2,\ldots$

Θεωρούμε την ακολουθία $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell^\infty$ με
$$\lambda_j = 0, \text{ για } 1 \le j \le N_1$$
κ'
$$\lambda_j = \operatorname{sgn}[y_{k+1}(j)], \quad N_k < j \le N_{k+1}$$
$$k=1,2,\ldots$$

Προφανώς $|\lambda_j| = 1$ κ'
$$\lambda_j y_{k+1}(j) = |y_{k+1}(j)|,$$
για $N_k < j \le N_{k+1}$, $k=1,2,\ldots$

Θεωρούμε το συναρτησιακό
$$\Lambda : \ell^1 \to \mathbb{R}, \quad \Lambda(z) = \sum_{j=1}^{\infty} z(j)\lambda_j, \ \forall z \in \ell^1.$$
Τότε, $\Lambda \in (\ell^1)^*$.

Έχουμε $\forall\, k \geq 1$,

$$\Lambda(y_{k+1}) = \sum_{j=1}^{\infty} y_{k+1}(j)\lambda_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{N_k} \lambda_j y_{k+1}(j) + \sum_{N_k<j\leq N_{k+1}} \lambda_j y_{k+1}(j) +$$

$$+ \sum_{j>N_{k+1}} \lambda_j y_{k+1}(j)$$

$$\geq - \sum_{j=1}^{N_k} |y_{k+1}(j)| + \sum_{N_k<j\leq N_{k+1}} |y_{k+1}(j)| -$$

$$- \sum_{j>N_{k+1}} |y_{k+1}(j)|$$

$$> -\frac{1}{100} + \frac{9}{10} - \sum_{j>N_{k+1}} |y_{k+1}(j)|.$$

Αλλά, $\forall k \geq 1$,

$$1 = \| y_{k+1} \|_1 = \sum_{j=1}^{N_{k+1}} |y_{k+1}(j)| +$$

$$+ \sum_{j>N_{k+1}} |y_{k+1}(j)| > \sum_{N_k<j\leq N_{k+1}} |y_{k+1}(j)| +$$

$$+ \sum_{j>N_{k+1}} |y_{k+1}(j)|$$

$$\Longrightarrow 1 > \frac{9}{10} + \sum_{j > N_{k+1}} |y_{k+1}(j)|$$

$$\Longrightarrow \sum_{j > N_{k+1}} |y_{k+1}(j)| < \frac{1}{10}.$$

Άρα, $\forall\, k \geq 1$,

$$\Lambda(y_{k+1}) > -\frac{1}{100} + \frac{9}{10} - \frac{1}{10} =$$

$$= -\frac{1}{100} + \frac{90}{100} - \frac{10}{100} = \frac{79}{100}$$

(ΑΤΟΠΟ!), διότι

$$y_{k+1} \xrightarrow[w]{k \to \infty} 0 \Longrightarrow \Lambda(y_{k+1}) \xrightarrow{k \to \infty} 0.$$

$\boxtimes$