ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ HAHN -BANACH

I. Θετικά υπογραμμικά συναρτησιακά.

Ορισμός I.1. Έστω X γραμμ. χώρος και $p : X \to \mathbb{R}$ συναρτησιακό.

Το p λέγεται **θετικό υπογραμμικό** ανν:

(i) $p(x) \geq 0, \quad \forall x \in X.$

(ii) $p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad \forall x,\ y \in X.$

(iii) $p(\lambda x) = \lambda p(x), \quad \forall\ \lambda \geq 0,\ \forall x \in X.$

[Ειδικότερα, $p(0) = 0$.]

Πρόταση I.2: *Έστω X τοπολογικός γραμμικός χώρος και $p : X \to \mathbb{R}$ θετικό υπογραμμικό συναρτησιακό. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) *p συνεχές στο 0.*

(ii) *p συνεχές*

(iii) *$\exists\, V \in \mathcal{N}_0$ ώστε $p(V)$ φραγμένο.*

Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση.

II. Αναλυτική μορφή Θ. Hahn-Banach -Συνέπειες.

Θεώρημα II.1: *Έστω X γραμμικός χώρος, Y γραμμικός υπόχωρος του X, $p : X \to \mathbb{R}$ θετικό υπογραμμικό συναρτησιακό και $f : Y \to \mathbb{R}$ γραμμική, ώστε*

$$f(x) \leq p(x), \quad \forall x \in Y.$$

Τότε, $\exists\ \tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ γραμμική, ώστε

$$\tilde{f}\,|_Y = f, \quad \tilde{f}(x) \leq p(x), \quad \forall x \in X.$$

Συμβολισμός: Έστω $(X, ||\cdot||)$ χώρος με νόρμα. Θέτουμε

$$X^* = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ φραγμένο γραμμικό }\}.$$

Ο X^* είναι γραμμικός χώρος και ονομάζεται **δυϊκός ή συζυγής** του X.

Η

$$||f|| = \sup\{|f(x)| : x \in X,\ ||x|| = 1\}, \quad f \in X^*,$$

ορίζει νόρμα στον X^*.

Πρόταση II.2:
Έστω X *χώρος με νόρμα,* Y *γραμμ. υπόχωρος του* X *και* $f : Y \to \mathbb{R}$ *φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό. Τότε,* $\exists\ \tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ *φραγμένο γραμμικό ώστε*

$$\tilde{f}\,|_Y = f, \quad ||\tilde{f}|| = ||f||.$$

Πρόταση II.3: *Έστω* $(X,\ ||\cdot||)$ *χώρος με νόρμα και* $x_0 \in X$. *Τότε,*

$$||x_0|| = \max\{|f(x_0)| : f \in X^*,\ ||f|| = 1\}.$$

Πόρισμα II.4: *Έστω* $(X,\ ||\cdot||)$ *χώρος με νόρμα ώστε* $X \neq \{0\}$. *Τότε,* $X^* \neq \{0\}$ *και ο* X^* *χωρίζει σημεία.*

Πρόταση II.5: *Έστω* X *χώρος με νόρμα,* Y *κλειστός γραμμ. υπόχωρος του* X *και* $x_0 \in X \setminus Y$. *Τότε,* $\exists\ f \in X^*$ *ώστε*

$$||f|| = 1, \quad f\,|_Y = 0, \quad f(x_0) = d(x_0, Y).$$

Η κανονική εμφύτευση του X στον X^{**}.

Έστω $(X, ||\cdot||)$ χώρος με νόρμα και $x \in X$. Ορίζουμε το γραμμικό συναρτησιακό

$$e(x) : X^* \to \mathbb{R}, \quad e(x)(f) = f(x), \qquad \forall\, f \in X^*.$$

Τότε,

$$e(x) \in X^{**}, \quad ||e(x)|| = ||x||.$$

Πράγματι:

$$\begin{aligned} & \sup\{|e(x)(f)| : f \in X^*,\ ||f|| = 1\} = \\ = \ & \sup\{|f(x)| : f \in X^*,\ ||f|| = 1\} = ||x||, \end{aligned}$$

λόγω της Πρότασης I.4.

Συνεπώς, ορίζεται η γραμμική ισομετρία

$$e : X \to X^{**}$$

με

$$e(x)(f) = f(x), \quad \forall\, x \in X, \quad \forall\, f \in X^*.$$

Ο παραπάνω γραμμική ισομετρία ονομάζεται **κανονική εμφύτευση** του X στον X^*.

Παρατήρηση: Η $e(X) \subseteq X^{**}$ χωρίζει σημεία στον X^*.

III. Συναρτησιακό του Minkowski.

Έστω X τοπολογικός γραμμικός χώρος και $A \subset X$ απορροφούν (άρα $0 \in A$). Τότε, $\forall\, x \in X,$ το σύνολο

$$\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\}$$

είναι μη κενό.

Ορισμός III.1. Έστω X τοπολογικός γραμμικός χώρος και $A \subset X$ απορροφούν και κυρτό. Το **συναρτησιακό του Minkowski** για το σύνολο A είναι η απεικόνιση

$$p_A : X \to \mathbb{R}_+$$

με

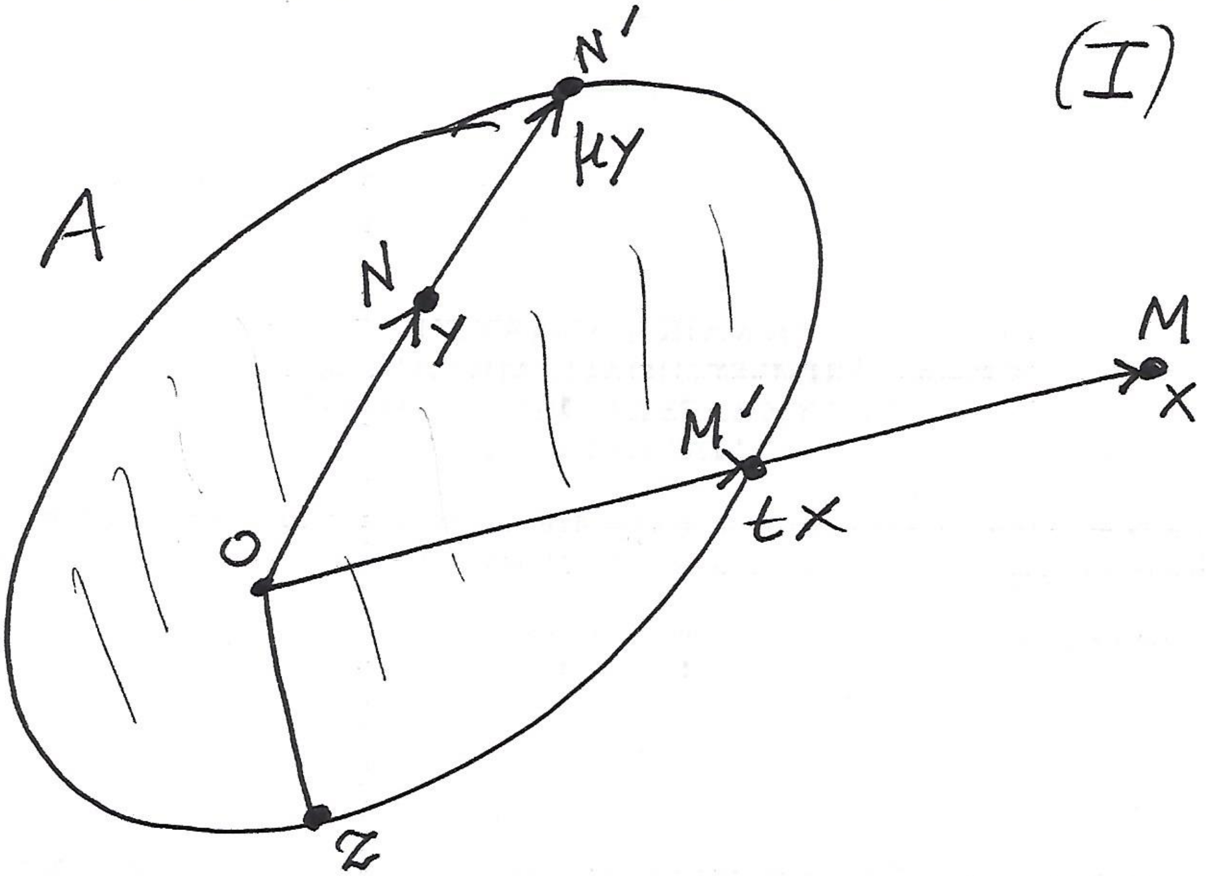
$$p_A(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\}, \quad \forall\, x \in X.$$

Γεωμετρική ερμηνεία:

Το $p_A(x)$ ''χονδρικά'' ισούται με το πηλίκο $\dfrac{d(x,0)}{d'_x}$, όπου

- $d(x,0)$ η απόσταση του x από το 0
- d'_x η απόσταση από το 0 του πιό ''απομακρυσμένου'' σημείου του A στη διεύθυνση του x.

(I)



- $x \notin A \Rightarrow \dfrac{(OM)}{(OM')} > 1$

- $y \in \mathring{A} \Rightarrow \dfrac{(ON)}{(ON')} < 1$

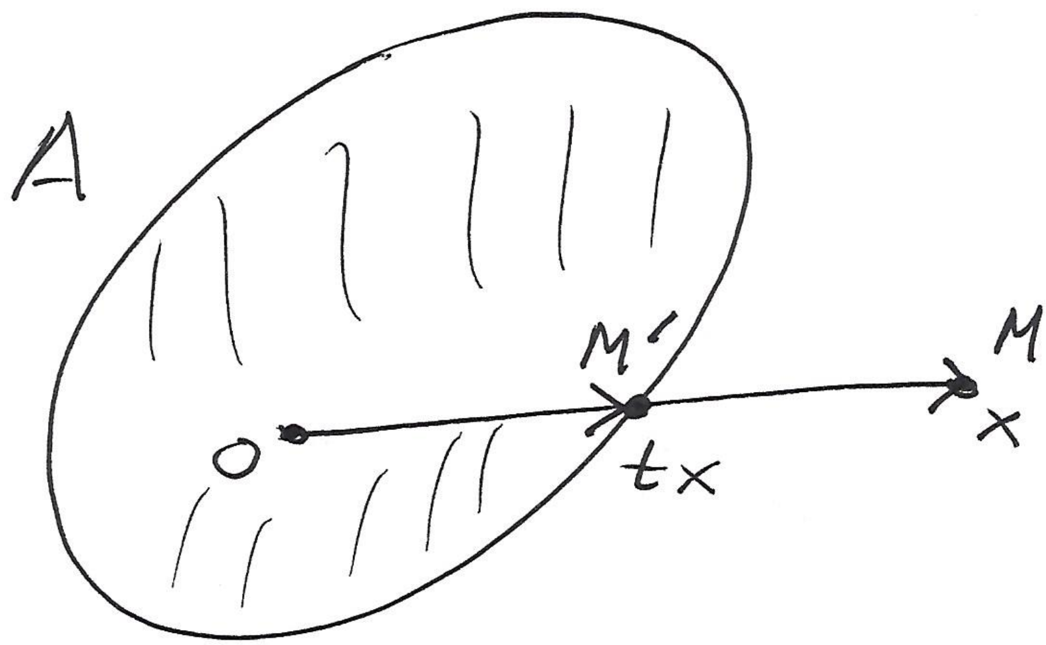
$(OM) = d(x, O)$

(OM') = η απόσταση από το O

του πιο "απομακρυσμένου" σημείου

του A στη διεύθυνση του x

(II)



$$\vec{OM'} = t\,\vec{OM}, \quad t > 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(OM)}{(OM')} = 1/t.$$

$$t = \sup\{ s > 0 \mid sx \in A \}$$

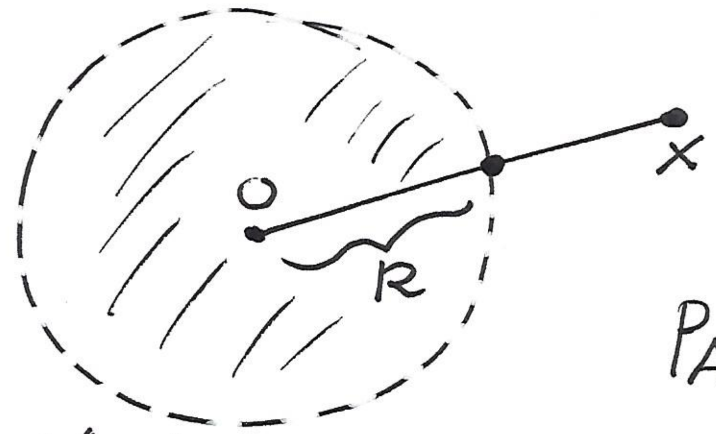
$$\Rightarrow \frac{1}{t} = \inf\left\{ \frac{1}{s} \,\middle|\, s > 0,\ sx \in A \right\}$$

$$= \inf\left\{ \frac{1}{s} \,\middle|\, s > 0,\ x \in \frac{1}{s} A \right\}$$

$$\boxed{\frac{(OM)}{(OM')} = \inf\{ \lambda > 0 \mid x \in \lambda A \}}$$

Παραδείγματα

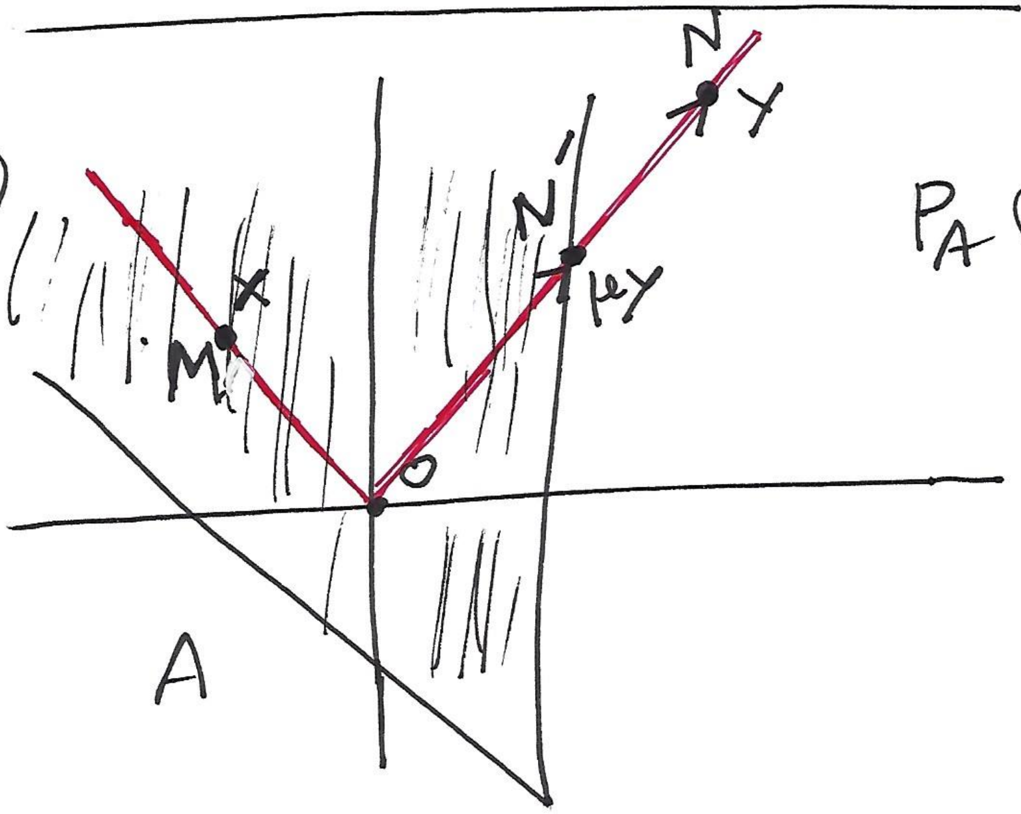
(i) $(X, \|\cdot\|)$



$A = B(0,R)$

$$P_A(x) = \frac{\|x\|}{R}$$

(ii)



$$P_A(y) = \frac{1}{\mu}$$

Η απόσταση από το O του πιο "απομακρυσμένου" σημείου του A στη διεύθυνση του x είναι ∞

$$\Rightarrow \quad P_A(x) = \text{"}\frac{(OM)}{\infty}\text{"} = 0.$$

- Στον ορισμό

$$P_A(x) = \inf\{\lambda > 0 \mid x \in \lambda A\}$$

το "inf" <u>δεν</u> είναι εν γένει "min".

<u>Π.χ.</u> $A = B(0,1)$ $\quad P_A(x) = \|x\|$

Εάν $\lambda > 0$ με $x \in \lambda A$, τότε

$$\left\|\frac{1}{\lambda} x\right\| < 1 \Rightarrow \|x\| < \lambda$$

$$\Rightarrow P_A(x) < \lambda \;!$$

- Εάν $P_A(x) = 0$, <u>δεν</u> έπεται εν γένει ότι $x = 0$
 (βλ. παράδ. (ii), πίσω).

Έστω X τοπολογικός γραμμικός χώρος και $A \subset X$ απορροφούν και κυρτό.

$$p_A : X \to \mathbb{R}_+, \quad p_A(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\}, \quad \forall\, x \in X.$$

Πρόταση III.1: *Το p_A είναι θετικό υπογραμμικό συναρτησιακό.*

Απόδειξη: (μόνο για την υποπροσθετικότητα).

Έστω $x, y \in A$ και $\varepsilon > 0$. Τότε, $\exists\, \lambda > 0,\ \mu > 0$ ώστε

$$x \in \lambda A, \quad \lambda < p_A(x) + \varepsilon/2, \quad y \in \mu A, \quad \mu < p_A(y) + \varepsilon/2\ .$$

Έχουμε

$$x+y \in \lambda A+\mu A = (\lambda+\mu)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}A + \frac{\mu}{\lambda+\mu}A\right) \subset (\lambda+\mu)A.$$

(σημ. ότι A **κυρτό!**).

Επομένως, $p_A(x+y) \leq \lambda + \mu < p_A(x) + p_A(y) + \varepsilon$

για τυχαίο $\varepsilon > 0$.

Άρα, $p_A(x+y) \leq p_A(x) + p_A(y)$. $\square$

Θέτουμε

$$(p_A < 1) = \{x : p_A(x) < 1\}, \ (p_A \leq 1) = \{x : p_A(x) \leq 1\}.$$

Πρόταση III.2: *Ισχύει*

$$(p_A < 1) \subset A \subset (p_A \leq 1).$$

(Άσκηση.)

Πρόταση III.3: *Εάν* $0 \in A^\circ$, *τότε:*

(i) *το* p_A *είναι συνεχές.*

(ii) $A^\circ = (p_A < 1)$, $\overline{A} = (p_A \leq 1)$.

Απόδειξη: (i) Το p_A είναι υπογραμμικό και φραγμένο σε περιοχή του 0, άρα συνεχές.

(ii) Ισχυρισμός:

Αν $G \subset X$ ανοικτό και $x_0 \in G$, τότε $\exists\ 0 < s < 1 < t$ ώστε $sx_0,\ tx_0 \in G$.

[Πράγματι, η απεικόνιση

$$\varphi : \mathbb{R} \to X, \quad \varphi(t) = tx_0,$$

είναι συνεχής και $1 \in \varphi^{-1}(G) =$ ανοικτό στον $\mathbb{R}$.

Άρα, $\exists\, \delta > 0$ με $\varphi((1-\delta,\ 1+\delta)) \subset G$.

Επιλέγουμε $s \in (1-\delta, 1)$, $t \in (1, 1+\delta)$.]

Έστω $x_0 \in A^\circ$, $y_0 \in X \setminus \overline{A}$. Επιλέγουμε $s \in (0,1)$, $t > 1$ ώστε

$$tx_0 \in A^o \subset A, \quad sy_0 \in X \setminus \overline{A} \subset X \setminus A.$$

Πρότ. III.2 $\implies p_A(x_0) \leq 1/t < 1, \quad p_A(y_0) \geq 1/s > 1.$

Άρα, $A^\circ \subset (p_A < 1)$, $X \setminus \overline{A} \subset (p_A > 1) \Rightarrow (p_A \leq 1) \subset \overline{A}$.

Επειδή $(p_A < 1)$ ανοικτό και $(p_A \leq 1)$ κλειστό, το συμπέρασμα έπεται από την Πρόταση III.2 $\square$

Πρόταση III.4: *Εάν* $0 \in A^\circ$, *τότε*

$$p_A = p_{A^\circ} = p_{\overline{A}} \ .$$

Απόδειξη: $A^\circ \subset A \subset \overline{A} \implies p_{\overline{A}} \le p_A \le p_{A^\circ}$.

Ας υποθέσουμε ότι $p_A(x) < p_{A^\circ}(x)$, για κάποιο $x \in X$.

Επιλέγουμε $s > 0$ με $p_A(x) < s < p_{A^\circ}(x)$.

Τότε, λόγω των Προτ. III.2, III.3,

$$p_A\left(\frac{1}{s}x\right) < 1 \implies \frac{1}{s}x \in A^\circ \implies p_{A^\circ}\left(\frac{1}{s}x\right) \le 1 \implies p_{A^\circ}(x) \le s,$$

άτοπο!

Άρα, $p_A = p_{A^\circ}$.

Όμοια, $p_A = p_{\overline{A}}$ (άσκηση!). □

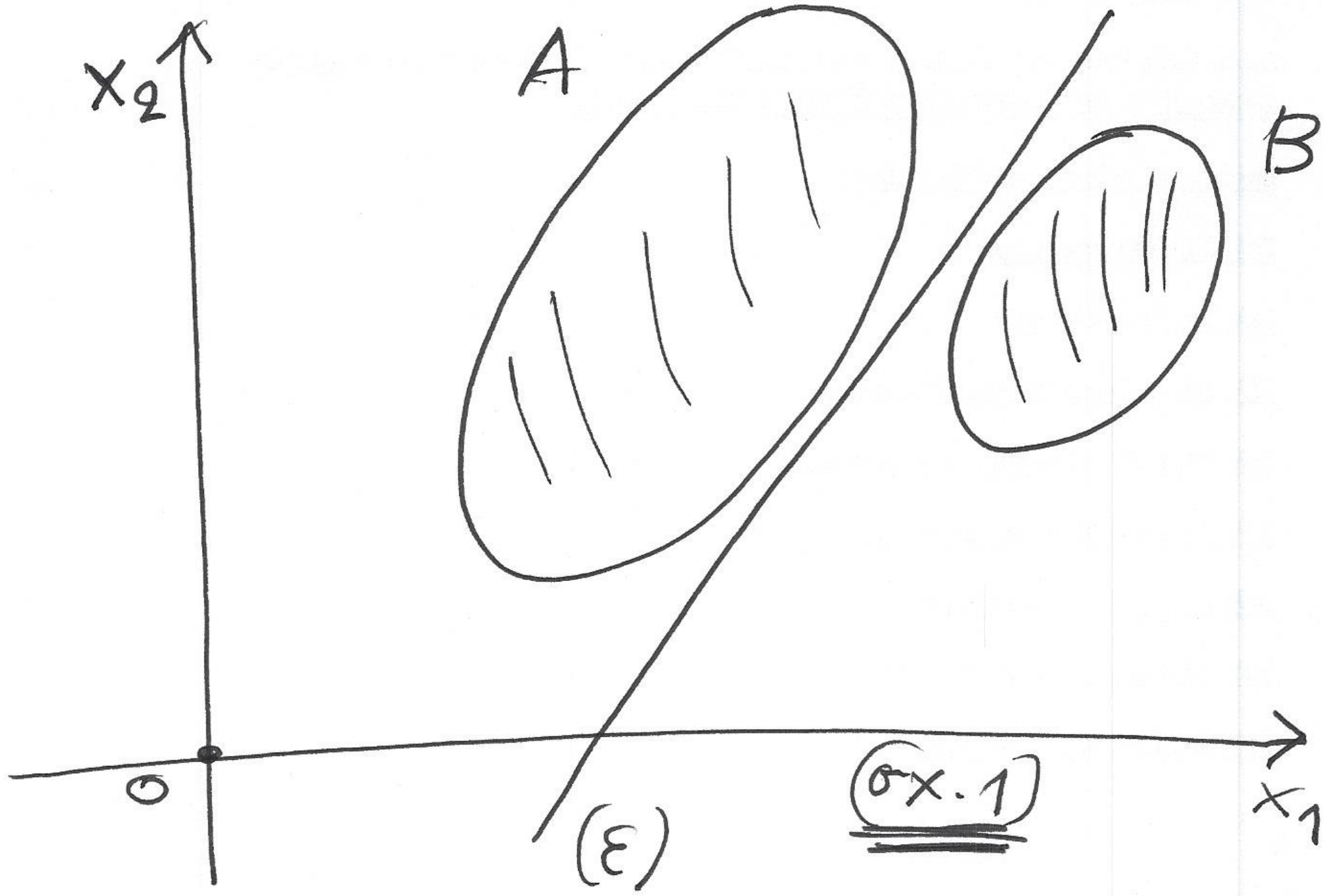
Πόρισμα III.5: *Έστω* C *κυρτό με* $C^\circ \neq \emptyset$. *Τότε:*

(i) $\overline{C^\circ} = \overline{C}$, $\quad (\overline{C})^\circ = C^\circ$.

(ii) Εάν V ανοικτό κυρτό με $\overline{V} = \overline{C}$, ισχύει $V = C^\circ$.

Η απόδειξη βασίζεται στις Προτάσεις III.3, III.4. (άσκηση!)

Γεωμετρικά Θ.H–B



A, B κυρτά $\subset \mathbb{R}^2$, $A \cap B = \emptyset$

$\exists$ ευθεία (ε) που "διαχωρίζει" γνήσια τα A, B, δηλ.

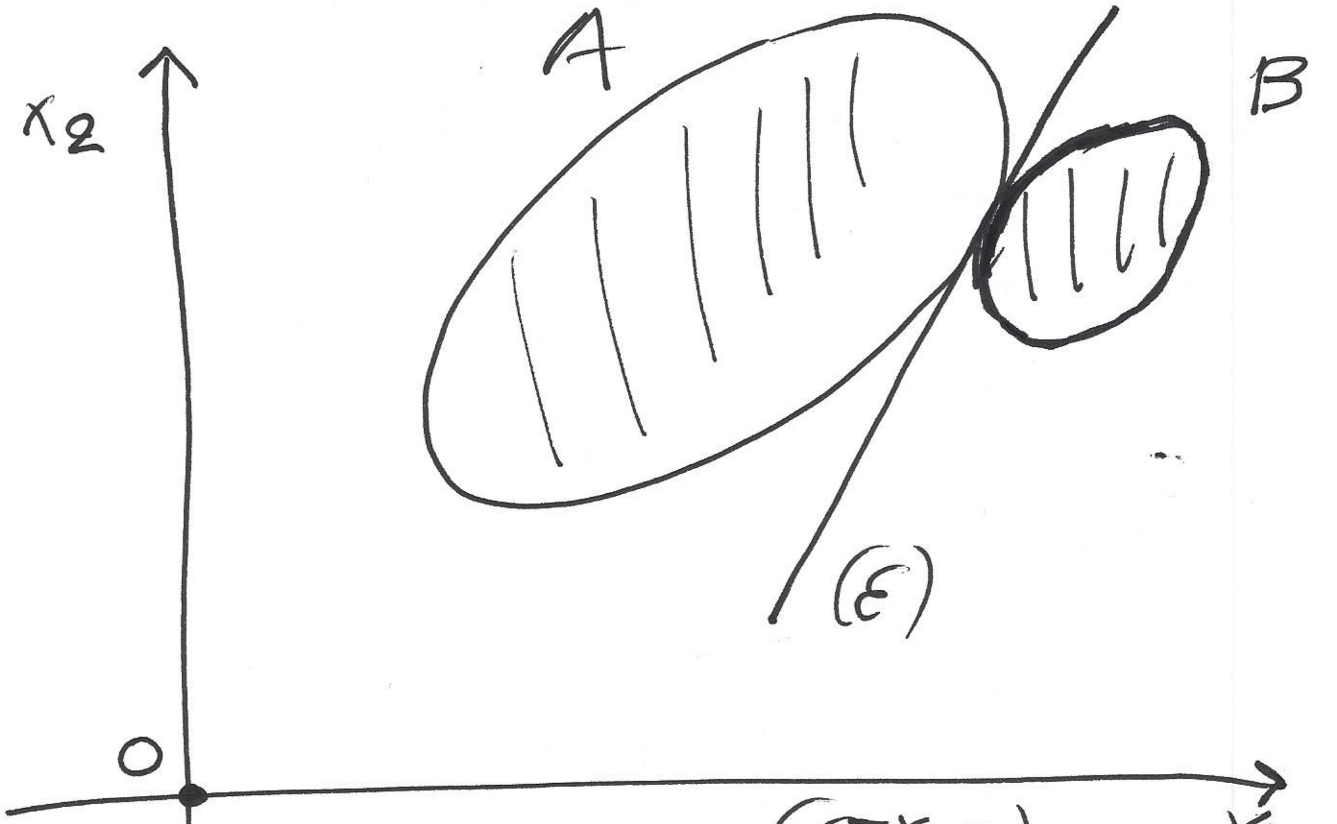
- A βρίσκεται αριστερά της (ε)
- B " δεξιά " "
- τα A, B δεν έχουν κοινά σημεία με την (ε).

Εάν (ε): $a_1 x_1 + a_2 x_2 = \lambda$

($\lambda \in \mathbb{R}$, $a_1 \geq 0$), τότε στο (σχ.1),

$A \subset \{(x_1, x_2) \mid a_1 x_1 + a_2 x_2 < \lambda\}$

$B \subset \{(x_1, x_2) \mid a_1 x_1 + a_2 x_2 \geq \lambda\}$



(σχ.2)

A, B κυρτά, $A^{\circ} \cap B = \emptyset$

$A \subset \{(x_1, x_2) \mid a_1 x_1 + a_2 x_2 \leq \lambda\}$

$B \subset \{(x_1, x_2) \mid a_1 x_1 + a_2 x_2 \geq \lambda\}$

Εάν $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με ③

$$f(x_1, x_2) = a_1 x_1 + a_2 x_2,$$

τότε f γραμμικό (συνεχές) συναρτησιακό 5΄

→ (σχ. 1) $A \subset (f<\lambda)$, $B \subset (f>\lambda)$

όπου $(f<\lambda) = f^{-1}((-\infty,\lambda))$

$(f>\lambda) = f^{-1}((\lambda,+\infty))$

→ (σχ. 2) $A \subset (f \leq \lambda)$, $B \subset (f \geq \lambda)$

όπου

$$(f\leq\lambda) = f^{-1}((-\infty,\lambda])$$

$$(f\geq\lambda) = f^{-1}([\lambda,+\infty))$$

IV. Γεωμετρικά (διαχωριστικά) Θ. Hahn -Banach.

Έστω X τοπολογικός γραμμικός χώρος. Θέτουμε

$$X^* = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ γραμμικό, συνεχές}\}.$$

Πρόταση IV.1: *Έστω $A \subset X$ κυρτό με $0 \in A^\circ$, $x_0 \notin A^\circ$. Τότε, $\exists\, f \in X^* \setminus \{0\}$ ώστε*

$$\sup f(A) \;\leq\; f(x_0)\ .$$

Απόδειξη: Πρόταση III.3 $\Rightarrow$ $p_A(x_0) \geq 1$.

Θεωρούμε το γραμμικό συναρτησιακό $g : \langle x_0 \rangle \to \mathbb{R}$ με

$$g(tx_0) = t, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

- $\forall\, t \geq 0,\ g(tx_0) = t \;\leq\; tp_A(x_0) = p_A(tx_0).$

- $\forall\, t < 0,\ g(tx_0) = t \;<\; 0 \;\leq\; p_A(tx_0.)$

Επομένως, $g(y) \;\leq\; p_A(y), \quad \forall\, y \in \langle x_0 \rangle.$

Αναλυτικό Θ. Hahn-Banach $\Rightarrow \exists\, f : X \to \mathbb{R}$ γραμμικό ώστε

$$f\,|_{\langle x_0\rangle} = g, \quad f(x) \leq p_A(x), \quad \forall\, x \in X.$$

Ειδικότερα, $f(x_0) = g(x_0) = 1$.

Υπενθ.: Πρόταση III.2 $\Rightarrow A \subset (p_A \leq 1)$.

Επιλέγουμε $V \in \mathcal{N}_0$ **ισορροπημένο** με $V \subset A^\circ$.

Έχουμε

$$\pm f(V) = f(V) \subset f(A) \subset [-\infty, 1] \Rightarrow \sup_{v\in V} |f(v)| \leq 1$$

$\Rightarrow f$ φραγμένο σε περιοχή του 0 $\Rightarrow f \in X^*$.

Τέλος, $\forall\, x \in A$,

$$f(x) \leq p_A(x) \leq 1 = f(x_0).$$

$\square$

Πρόταση IV.2: *Έστω $A \subset X$ κυρτό με $A^\circ \neq \emptyset$ και $x_0 \notin A^\circ$. Τότε, $\exists\, f \in X^* \setminus \{0\}$ ώστε*

$$\sup f(A) \;\leq\; f(x_0)\ .$$

Για την απόδειξη, επιλέγουμε $a \in A^\circ$ κι εφαρμόζουμε την Πρόταση IV.1 για "A" $= A - a$, "x_0" $= x_0 - a$.

Οι λεπτομέρειες ως άσκηση.

Για τη συνέχεια, υπενθυμίζουμε το παρακάτω

Πόρισμα III.5: *Έστω C κυρτό με $C^\circ \neq \emptyset$. Τότε:*

(i) $\overline{C^\circ} = \overline{C}, \quad (\overline{C})^\circ = C^\circ$.

(ii) Εάν V ανοικτό κυρτό με $\overline{V} = \overline{C}$, ισχύει $V = C^\circ$.

Θεώρημα: IV.3 (1η μορφή γεωμετρικού Θ. Hanh-Banach): *Έστω $A, B \subset X$ κυρτά τέτοια ώστε*

$$A^\circ \neq \emptyset, \quad B \neq \emptyset, \quad A^\circ \cap B = \emptyset.$$

Τότε, $\exists\, f \in X^* \setminus \{0\}$ ώστε $\sup f(A) \ \leq\ \inf f(B)$.

Απόδειξη: Θέτουμε $V = A^\circ - B$, $C = A - B$. Τότε,

- V, C είναι κυρτά, μη κενά και το V είναι ανοικτό.
- $0 \notin V$.

Επιπλέον, Πόρισμα III.5(i) $\Rightarrow \overline{A^\circ} = \overline{A}$.

Έχουμε

$$V \ \subset\ C \ \subset\ \overline{A} - \overline{B} \ =\ \overline{A^\circ} - \overline{B} \ \subset\ \overline{A^\circ - B} = \overline{V}$$

$\Rightarrow\ \ \overline{C} = \overline{V} \ \Rightarrow\ C^\circ = V$ [βλ. Πόρισμα III.5(ii)]

$\Rightarrow\ \ 0 \notin C^\circ$.

Πρόταση IV.2 $\Rightarrow\ \exists\, f \in X^* \setminus \{0\}$ ώστε

$$\sup f(C) \ \leq\ f(0) = 0 \ \Leftrightarrow\ \sup f(A - B)\ \leq\ 0.$$

Λόγω γραμμικότητας της f, προκύπτει ότι

$$\sup f(A)\ \leq\ \inf f(B).$$

$\square$

Ορισμός IV.4 Ένας τοπολογικός γραμμικός χώρος λέγεται **τοπικά κυρτός** ανν έχει μια βάση περιοχών του 0 που αποτελείται από κυρτά σύνολα.

Παραδείγματα:

(α) Ένας χώρος με νόρμα είναι τοπικά κυρτός τ.γ.χ.

(β) Έστω X γραμμικός χώρος, $\Phi \subset X^\sharp$ που χωρίζει σημεία και $\mathcal{T}_\Phi$ η *ασθενής τοπολογία* που επάγει η Φ.

Τότε, ο $(X, \mathcal{T}_\Phi)$ είναι τοπικά κυρτός τ.γ.χ.

Πράγματι, μια βάση περιοχών του 0 αποτελείται από πεπερασμένες τομές συνόλων της μορφής

$$f^{-1}((-\varepsilon,\, \varepsilon)), \quad f \in \Phi, \quad \varepsilon > 0,$$

τα οποία είναι προφανώς κυρτά.

Έστω X τοπικά κυρτός τοπολογικός γραμμικός χώρος.

Λήμμα IV.5: $\forall\, V \in \mathcal{N}_0,\ \exists\, W \in \mathcal{N}_0$ *κυρτό, ώστε*

$$W + W \subset V.$$

Άσκηση!

Λήμμα IV.6: *Εάν K συμπαγές και F κλειστό με $K \cap F = \varnothing$, τότε $\exists\, V \in \mathcal{N}_0$ κυρτό ώστε $(K+V) \cap F = \varnothing$.*

Άσκηση! [*Υπόδ.*: $\forall\, x \in K,\ \exists\, W_x \in \mathcal{N}_0$ κυρτό, ώστε

$$(x + W_x + W_x) \cap F = \varnothing.$$

Η $\{x + W_x\}_{x \in K}$ είναι μια ανοικτή κάλυψη του K.]

$f : X \to \mathbb{R}$ γραμμικό, $f \not\equiv 0$

Λήμμα IV.7: (για τυχαίο τ.γ.χ.!)
$\forall\, f \in X^{\#} \setminus \{0\}$, *η f είναι ανοικτή.*

Απόδειξη: Είναι $f(X) = \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \exists\, z \in X$ με $f(z) = 1$.

Έστω $V \in \mathcal{N}_0 \;\Rightarrow\; V$ απορροφούν, οπότε $\exists\, \delta > 0$ με $(-\delta, \delta) \cdot z \subset V$.

Τότε, $(-\delta, \delta) \subset f(V) \;\Rightarrow\; 0 \in (f(V))^{\circ}$.

Εάν $G \subset X$ ανοικτό μη κενό και $x \in G$, εφαρμόζουμε το παραπάνω για $V = G - x$. $\square$

Θεώρημα: IV.8: (2η μορφή γεωμετρικού Θ. Hanh-Banach):
Έστω K, F κυρτά, μη κενά, ώστε $K \cap F = \emptyset$, K συμπαγές και F κλειστό. Τότε, $\exists\, f \in X^* \setminus \{0\}$ ώστε

$$\max f(K) \;<\; \inf f(F).$$

Απόδειξη: Λήμμα IV.6 $\Rightarrow$ $\exists\, V \in \mathcal{N}_0$ κυρτό ώστε

$$(K+V) \cap F = \emptyset.$$

Το $H = K + V$ είναι ανοικτό, κυρτό, μη κενό, οπότε

Θεώρημα IV.3 $\Rightarrow$ $\exists\, f \in X^* \setminus \{0\}$ με

$$\sup f(H) \;\leq\; \inf f(F) = \lambda.$$

Τότε, f(H) ανοικτό λόγω Πρότ. IV.7

$f(H) \subset (-\infty, \lambda] \;\Rightarrow\; f(H) \subset (-\infty, \lambda) \;\Rightarrow\; f(K) \subset (-\infty, \lambda).$

Επειδή K **συμπαγές** και f **συνεχής**, υπάρχει το $\max f(K)$.

Από τα παραπάνω έπεται ότι $\max f(K) \;<\; \lambda.$ $\square$