ΤΟΠΟΛ. ΓΡΑΜΜ. ΧΩΡΟΙ ΠΕΠΕΡ. ΔΙΑΣΤΑΣΗΣ.

Πρόταση 1: Έστω (X, τ) τ.γ.χ. κ' $L : (\mathbb{R}^n, |\cdot|_2) \to (X, \tau)$ όπου $n \geq 1$ κ'

$$|\xi|_2 = \left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 \right)^{1/2}, \quad \forall\ \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Τότε, L συνεχής.

Απόδειξη:

Έστω $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ η φυσική βάση του $\mathbb{R}^n$, δηλ.

$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $e_n = (0, 0, \dots, 1)$.

$\forall\ \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, έχουμε

$$L(\xi) = L\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j L(e_j) .$$

$\forall j$, η κανονική προβολή

$$p_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad p_j(\xi_1, \dots, \xi_j, \dots, \xi_n) = \xi_j$$

είναι $|\cdot|_2 - |\cdot|$ συνεχής, ενώ η απεικόνιση

$$\eta_j : \mathbb{R} \to X, \quad \eta_j(\lambda) = \lambda L(e_j)$$

είναι $|\cdot| - \tau$ συνεχής,

οπότε η $\eta_j \circ p_j : (\mathbb{R}^n, |\cdot|_2) \to (X, \tau)$

είναι συνεχής.

Έπεται ότι η

$$L = \sum_{j=1}^{n} (\eta_j \circ p_j) : (\mathbb{R}^n, |\cdot|_2) \to (X, \tau)$$

είναι συνεχής.

$\boxtimes$

<u>Πρόταση 2:</u> Έστω (X,τ) τ.γ.χ., $(Y, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα κ' $T : (X,\tau) \to (Y, \|\cdot\|)$ γραμμική, φραγμένη σε περιοχή του 0. Τότε, T συνεχής.

(Άσκηση.)

Τοπολογικοί γραμμ. χώροι πεπερασμένης διάστασης(συνέχεια)

Σε ό,τι ακολουθεί, ο X θα είναι ένας τοπολογικός γραμμικός χώρος.

Με $\mathcal{N}_0$ συμβολίζουμε το σύνολο των περιοχών του 0.

Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Για κάθε $\xi = (\xi_j)_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$, θέτουμε

$$|\xi|_2 = \left(\sum_{j=1}^n \xi_j^2\right)^{1/2}.$$

Ο $(\mathbb{R}^n, |\cdot|_2)$ είναι χώρος με νόρμα.

Θέτουμε

$$B_{\mathbb{R}^n} = \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi|_2 < 1\}, \quad S_{\mathbb{R}^n} = \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi|_2 = 1\}.$$

Τα σύνολα $\overline{B_{\mathbb{R}^n}}$, $S_{\mathbb{R}^n}$ είναι συμπαγή στον $(\mathbb{R}^n, |\cdot|_2)$.

Πρόταση 1: *Εάν $L : \mathbb{R}^n \to X$ γραμμικός τελεστής, τότε ο L είναι συνεχής.*
(Έχει αποδειχθεί.)

Πρόταση 2: *Εάν $T : X \to \mathbb{R}^n$ γραμμικός τελεστής, φραγμένος σε περιοχή του 0, τότε ο T είναι συνεχής.*

(Άσκηση.)

Λήμμα 1: Εάν $E \subset \mathbb{R}^n$ ισορροπημένο με $E \cap S_{\mathbb{R}^n} = \emptyset$, τότε $E \subset B_{\mathbb{R}^n}$.

Απόδειξη: Έστω αντίθετα ότι $|\xi|_2 \geq 1$, για κάποιο $\xi \in E$. Τότε, $\frac{1}{|\xi|_2}\xi \in E \cap S_{\mathbb{R}^n}$, άτοπο. $\square$

Πρόταση 3: *Έστω $L : \mathbb{R}^n \to X$ γραμμικός τελεστής, που είναι 1-1. Τότε, υπάρχει ισορροπημένο $V \in \mathcal{N}_0$ ώστε $L^{-1}(V) \subset B_{\mathbb{R}^n}$ και ο L είναι ομοιομορφισμός .*

Απόδειξη: Από Πρόταση 1, γνωρίζουμε ότι ο L είναι συνεχής, ενώ το $S_{\mathbb{R}^n}$ είναι συμπαγές στον $\mathbb{R}^n$.

Έπεται ότι $L(S_{\mathbb{R}^n})$ συμπαγές (και άρα κλειστό) στον X.

Επιπλέον, $0 \notin L(S_{\mathbb{R}^n})$ (αφού L 1-1), οπότε υπάρχει ισορροπημένο $V \in \mathcal{N}_0$ ώστε $V \cap L(S_{\mathbb{R}^n}) = \emptyset$.

ανοικτό

Τότε, $L^{-1}(V) \cap S_{\mathbb{R}^n} = \emptyset$ και το $L^{-1}(V)$ είναι ισορροπημένο.

Από Λήμμα 1, παίρνουμε $L^{-1}(V) \subset B_{\mathbb{R}^n}$, οπότε και

$$L^{-1}(V \cap L(\mathbb{R}^n)) \subset B_{\mathbb{R}^n}.$$

Το $V \cap L(\mathbb{R}^n)$ περιέχει το 0 και είναι ανοικτό στη σχετική τοπολογία του $L(\mathbb{R}^n)$.

Λόγω των παραπάνω και της Πρότασης 2, ο αντίστροφος γραμμικός τελεστής

$$L^{-1} : L(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$$

είναι συνεχής. Άρα, ο L είναι ομοιομορφισμός. $\square$

Πρόταση 4: *Έστω (X, τ) τοπολογικός γραμμικός χώρος πεπερασμένης διάστασης. Εάν τ' μια άλλη τοπολογία στον X ώστε (X, τ') τοπολογικός γραμμικός χώρος, τότε $\tau = \tau'$.*

Απόδειξη: Εάν $n = \dim X$, υπάρχει γραμμ. τελεστής $L : \mathbb{R}^n \to X$, που είναι 1-1 κι επί.

Σύμφωνα με την Πρόταση 3, οι τελεστές

$$L : \mathbb{R}^n \to (X, \tau), \quad L : \mathbb{R}^n \to (X, \tau')$$

είναι ομοιομορφισμοί, επί. Επομένως, οι τελεστές

$$L : \mathbb{R}^n \to (X, \tau), \quad L^{-1} : (X, \tau') \to \mathbb{R}^n$$

είναι ομοιομορφισμοί, επί.

Έπεται ότι η ταυτοτική απεικόνιση

$$Id = L \circ L^{-1} : (X, \tau') \to (X, \tau)$$

είναι ομοιομορφισμός και άρα, $\tau = \tau'$. $\square$

Πρόταση 5: *Έστω (X, τ) τοπολογικός γραμμικός χώρος και Y γραμμικός υπόχωρος του X, πεπερασμένης διάστασης. Τότε, ο Y είναι κλειστός.*

Απόδειξη: Εάν $n = \dim Y$, υπάρχει γραμμ. τελεστής $L : \mathbb{R}^n \to Y$, που είναι 1-1 κι επί.

Σύμφωνα με την Πρόταση 3, υπάρχει ισορροπημένο $V \in \mathcal{N}_0$ στον X, ώστε $L^{-1}(V) \subset B_{\mathbb{R}^n}$.

Τότε, $V \cap Y \ \subset \ L(B_{\mathbb{R}^n}) \ \subset \ L(\ \overline{B_{\mathbb{R}^n}}\ )$.

Επειδή $\overline{B_{\mathbb{R}^n}}$ συμπαγές και L συνεχής, το $L(\ \overline{B_{\mathbb{R}^n}}\ )$ είναι συμπαγές και άρα κλειστό στον X.

Έπεται ότι $\overline{V \cap Y} \ \subset \ L(\ \overline{B_{\mathbb{R}^n}}\ ) \ \subset \ Y$.

Έστω $y \in \overline{Y}$. Επειδή V απορροφούν, $\exists\, t > 0$ με $y \in tV$.

Εφ΄ όσον tV ανοικτό και Y γραμμ. υπόχωρος, έχουμε

$$\overline{Y} \cap (tV) \ \subset \ \overline{Y \cap (tV)}, \quad Y \cap (tV) = t\,(Y \cap V).$$

Επομένως, $y \in \overline{Y} \cap (tV) \ \subset \ t\,\overline{Y \cap V} \ \subset \ tY$ [redacted] Y. $\square$