Έστω X γραμμικός χώρος κ' $\Phi \subseteq X^{\#}$ που χωρίζει σημεία στον X, δηλ.

$$\forall x, y \in X \text{ με } x \neq y, \ \exists f \in \Phi \mid f(x) \neq f(y).$$

Θέτουμε

$$\mathcal{J}_\Phi = \left\{ f^{-1}\big(f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon\big) : x \in X, f \in \Phi, \varepsilon > 0 \right\}$$

κ' έστω η τοπολογία $\mathcal{T}_\Phi$ που έχει σαν υποβάση το $\mathcal{J}_\Phi$.

Πρόταση 1: Έστω $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ δίκτυο στον X κ' $x \in X$. Τότε,

$$x_\lambda \to x \text{ ανν } \forall f \in \Phi, \ f(x_\lambda) \to f(x).$$

Απόδειξη: $(\Rightarrow)$ Έστω $f \in \Phi$, $\varepsilon > 0$. Θέτουμε

$$U_x = f^{-1}\big(f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon\big) \in \mathcal{J}_\Phi \subseteq \mathcal{T}_\Phi.$$

Επειδή $x \in U_x$, $\exists \lambda_0 \in \Lambda \mid$

$$\forall \lambda \geq \lambda_0, \ x_\lambda \in U_x \Leftrightarrow |f(x_\lambda) - f(x)| < \varepsilon, \text{ άρα } f(x_\lambda) \to f(x).$$

$(\Leftarrow)$ Έστω $G \in \mathcal{T}_\Phi$, $x \in G$. Υπάρχουν

$$U_1, U_2, \dots, U_n \in \mathcal{J}_\Phi \ (n \geq 1)$$

ώστε

$$x \in \bigcap_{j=1}^{n} U_j \subseteq G.$$

$\forall j$, $\exists z_j \in X$, $\varepsilon_j > 0$, $f_j \in \Phi$ ώστε

$$U_j = f_j^{-1}\big(f_j(z_j) - \varepsilon_j, f_j(z_j) + \varepsilon_j\big).$$

Τότε,

$\forall j$, $x \in U_j \Rightarrow f_j(x) \in \big(f_j(z_j) - \varepsilon_j, f_j(z_j) + \varepsilon_j\big)$

κ' αφού $f_j(x_\lambda) \to f(x)$, $\exists \lambda_j \in \Lambda \mid$

$\forall \lambda \geq \lambda_j$, $f_j(x_\lambda) \in (f_j(z_j) - \varepsilon_j, f_j(z_j) + \varepsilon_j)$

(ή)

$$x_\lambda \in U_j, \quad \forall \lambda \geq \lambda_j.$$

Επιλέγουμε $\lambda_0 \in \Lambda \mid \lambda_0 \geq \lambda_j$, $1 \leq j \leq n$.
Τότε, $\forall \lambda \geq \lambda_0$,

$$x_\lambda \in \bigcap_{j=1}^{n} U_j \subseteq G.$$

Άρα, $x_\lambda \xrightarrow{\tau_\Phi} x$. $\boxtimes$

<u>Πρόταση 2:</u>

(i) ο (X, τ_Φ) είναι τοπολογικός γραμμικός χώρος.

(ii) Η κλάση πεπερασμένων τομών συνόλων της μορφής: $f^{-1}(-\varepsilon, \varepsilon)$ εφ' $f \in \Phi$,

είναι μια βάση περιοχών του 0.

<u>Απόδειξη:</u> <u>(i)</u> ο (X, τ_Φ) είναι T_2. Πράγματι· έστω

$x, y \in X$ με $x \neq y$. Επειδή η Φ χωρίζει σημεία,

$\exists f \in \Phi \mid f(x) \neq f(y)$. Επιλέγουμε

$$0 < \varepsilon < |f(x) - f(y)| \text{ και}$$

θέτουμε

$$U = f^{-1}(f(x) - \varepsilon/2, f(x) + \varepsilon/2) \in \tau_\Phi$$

$$V = f^{-1}(f(y) - \varepsilon/2, f(y) + \varepsilon/2) \in \tau_\Phi.$$

Προφανώς, $x \in U$, $y \in V$. Επιπλέον, $U \cap V = \emptyset$.

[Πράγματι· εάν $z \in U \cap V$ τότε

$|f(z)-f(x)| < \varepsilon/2, \quad |f(z)-f(y)| < \varepsilon/2$

$\Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f(z)| + |f(z)-f(y)| < \varepsilon$

(Άτοπο!).]

Στη συνέχεια, θα δ.ο. οι πράξεις (+), (·) είναι συνεχείς.

→ Συνέχεια πρόσθεσης: Έστω $(x_\lambda, y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ δίκτυο στον $X\times X$ ώστε $(x_\lambda, y_\lambda) \xrightarrow{\tau_\Phi\times\tau_\Phi} (x,y)$, δηλ.

$x_\lambda \xrightarrow{\tau_\Phi} x, \quad y_\lambda \xrightarrow{\tau_\Phi} y.$

Λόγω της Πρότ. 1, $f(x_\lambda) \to f(x)$, $f(y_\lambda) \to f(y)$, $\forall f\in\Phi$

$\Rightarrow f(x_\lambda + y_\lambda) = f(x_\lambda) + f(y_\lambda) \to f(x)+f(y) = f(x+y)$, $\forall f\in\Phi \Rightarrow x_\lambda + y_\lambda \xrightarrow{\tau_\Phi} x+y.$

→ Συνέχεια πολλ/σμού:

Έστω $(a_\lambda, x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ δίκτυο στον $\mathbb{R}\times X$ ώστε $(a_\lambda, x_\lambda) \xrightarrow{(\tau_u \times \tau_\Phi)} (a, x)$ δηλ.

$a_\lambda \xrightarrow{\tau_u} a, \quad x_\lambda \xrightarrow{\tau_\Phi} x.$

Τότε, $\forall f\in\Phi$,

$f(a_\lambda \cdot x_\lambda) = a_\lambda \cdot f(x_\lambda) \to a f(x) = f(a x)$

(Πρότ. 1) $\Rightarrow a_\lambda \cdot x_\lambda \xrightarrow{\tau_\Phi} a\cdot x.$

Σαρώθηκε με το CamScanner

(iii) Έστω $G \in \tau_\Phi$ με $0 \in G$.

$\exists\, U_1, U_2, \dots, U_n \in \mathcal{I}_\Phi \mid 0 \in \bigcap_{j=1}^{n} U_j \subseteq G$.

Τότε, $\exists\, z_1, z_2, \dots, z_n \in X$, $f_1, f_2, \dots, f_n \in \Phi$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n > 0$ ώστε

$$U_j = f_j^{-1}\big(f_j(z_j) - \varepsilon_j,\ f(z_j) + \varepsilon_j\big),\ 1 \leq j \leq n.$$

Επειδή $0 \in \bigcap_{j=1}^{n} U_j$, έχουμε ότι

$$|f_j(z_j)| < \varepsilon_j,\ 1 \leq j \leq n.$$

Επιλέγουμε

$$0 < \varepsilon < \min_{j=1}^{n} \{\varepsilon_j - |f_j(z_j)|\}.$$

Έστω $x \in \bigcap_{j=1}^{n} f_j^{-1}((-\varepsilon, \varepsilon))$. Τότε $\forall j$,

$$|f_j(x) - f_j(z_j)| \leq |f_j(x)| + |f_j(z_j)|$$
$$< \varepsilon + |f_j(z_j)| < \varepsilon_j$$

$$\Rightarrow x \in \bigcap_{j=1}^{n} U_j.$$

Άρα,

$$0 \in \bigcap_{j=1}^{n} f_j^{-1}((-\varepsilon, \varepsilon)) \subseteq \bigcap_{j=1}^{n} U_j \subseteq G.$$

$\boxtimes$

Πρόταση 3: (i) $\forall f\in\Phi$, η $f:(X,\tau_\Phi)\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής.

(ii) Εάν τ τοπολογία στο X ώστε $\forall f\in\Phi$, η $f:(X,\tau)\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε

$$\tau_\Phi\subseteq\tau.$$

Απόδειξη: (i) Άμεσο, από την Πρότ. 1.

(ii) Έστω τ τοπολογία στον X ώστε $\forall f\in\Phi$, η $f:(X,\tau)\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής.

Εάν $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ δίκτυο στο X ώστε

$$x_\lambda\xrightarrow{\tau}x,$$

τότε $\forall f\in\Phi$,

$$f(x_\lambda)\to f(x)$$

$$\overset{[\text{Πρότ. } 1]}{\Longrightarrow}\quad x_\lambda\xrightarrow{\tau_\Phi}x.$$

Άρα, $\tau_\Phi\subseteq\tau$. $\boxtimes$

Πόρισμα: (i) Εάν $V\in\tau_\Phi$ με $0\in V$, τότε $\exists\,\varepsilon>0$ κ' $f_j\in\Phi$, $1\le j\le n$ $(n\geq 1)$ | $\bigcap_{j=1}^{n} f_j^{-1}((-\varepsilon,\varepsilon))\subseteq V$.

(ii) Εάν $G\in\tau_\Phi$, $x\in G$, τότε $\exists\,\varepsilon>0$ κ' $f_j\in\Phi$, $1\le j\le n$ $(n\geq 1)$ | $x+\bigcap_{j=1}^{n} f_j^{-1}((-\varepsilon,\varepsilon))\subseteq G$.