ΥΠΟΒΑΘΡΟ ΓΕΝΙΚΗΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ

Ορισμός 1: Έστω $X \neq \emptyset$ κ' $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$. Η $\mathcal{T}$ λέγεται **τοπολογία** στον X ανν:

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

(ii) ενώσεις μελών της $\mathcal{T}$ ανήκουν στην $\mathcal{T}$, δηλ. αν $(G_i)_{i \in I} \subset \mathcal{T}$ (I σύνολο δεικτών), τότε $\bigcup_{i \in I} G_i \in \mathcal{T}$.

(iii) πεπερασμένες τομές μελών της $\mathcal{T}$ ανήκουν στην $\mathcal{T}$, δηλ. αν $G_1, G_2, \ldots, G_n \in \mathcal{T}$ $(n \geq 1)$, τότε $\bigcap_{k=1}^{n} G_k \in \mathcal{T}$.

Τα μέλη της $\mathcal{T}$ καλούνται **$\mathcal{T}$-ανοικτά**.

Παραδείγματα:

(i) Έστω (X,d) μετρικός χώρος. $\forall x\in X$, $\forall \varepsilon>0$, θέτουμε

$$B(x,\varepsilon)=\{ y\in X: \ d(x,y)<\varepsilon \} =$$

= ανοικτή μπάλα κέντρου x κ' ακτίνας ε.

Το σύνολο

$$\tau_d=\{ G\subset X: \ \forall x\in G, \ \exists \varepsilon>0 \text{ με } B(x,\varepsilon)\subset G\}$$

είναι μια τοπολογία στον X.

Η τ_d καλείται **μετρική τοπολογία που επάγεται από τη μετρική d.**

Ειδικότερα, αν $X=\mathbb{R}$, $d(x,y)=|x-y|$, $x, y\in\mathbb{R}$, η $\mathcal{T}_d$ καλείται *Ευκλείδια τοπολογία στο $\mathbb{R}$* κ' συμβολ. με $\mathcal{T}_u$. Ισχύει:

$G\in\mathcal{T}_u$ ανν $\forall x\in G$, $\exists\, \varepsilon>0 \mid (x-\varepsilon, x+\varepsilon)\subset G$.

(ii) Εάν $X\neq\emptyset$ κ' $\mathcal{T}=\{\emptyset, X\}$, η τοπολογία $\mathcal{T}$ λέγεται *τετριμμένη*.

(iii) Εάν $X\neq\emptyset$ κ' $\mathcal{T}=\mathcal{P}(X)$, η τοπολογία $\mathcal{T}$ λέγεται *διακριτή*. Στη διακριτή τοπολογία, όλα τα υποσύνολα του X είναι ανοικτά.

(iv) Έστω $X \neq \emptyset$. Θέτουμε

$$\tau = \{ A \subset X : X \setminus A \text{ πεπερασμένο} \} \cup \{ \emptyset \}.$$

Η τ λέγεται συν-πεπερασμένη τοπολογία στο X.

Ορισμός 2: Εάν $X \neq \emptyset$ κ' τ μια τοπολογία στο X, το ζεύγος (X, τ) λέγεται τοπολογικός χώρος.

Ορισμός 3: Έστω (X, τ) τοπολ. χώρος κ' $\mathcal{B} \subset \tau$, $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Η $\mathcal{B}$ λέγεται βάση του (X, τ) ανν κάθε τ-ανοιχτό γράφεται σαν ένωση μελών της $\mathcal{B}$.

Ισοδύναμα: $\mathcal{B}$ βάση του X ανν

$\forall\, G \in \mathcal{T},\ \forall\, x \in G,\ \exists\, B_x \in \mathcal{B} \mid x \in B_x \subset G.$

Παραδείγματα:

(i) Έστω (X, d) μετρικός χώρος κ'

$$\mathcal{B} = \{ B(x, \varepsilon) : x \in X,\ \varepsilon > 0 \}.$$

Τότε, $\mathcal{B}$ βάση του $(X, \mathcal{T}_d)$.

(ii) Εάν $X = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$, $x, y \in \mathbb{R}$, τότε η κλάση $\mathcal{B} = \{ (a, b) : a, b \in \mathbb{R},\ a < b \}$ είναι βάση του $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_d)$.

Πρόταση 4: Έστω $\mathcal{B}$ βάση του τοπολ. χ. (X, τ). Τότε:

(i) $X = \bigcup \{B : B \in \mathcal{B}\}$

(ii) Εάν $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ κ' $x \in B_1 \cap B_2$, τότε $\exists\, B_3 \in \mathcal{B} \,|$

$$x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2 .$$

Ισχύει κ' το αντίστροφο:

Πρόταση 5: Έστω $X \neq \phi$, $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ ώστε να ικανοποιούνται οι (i), (ii) (βλ. παραπάνω). Θέτουμε

$$\tau = \{ G \subset X : \forall x \in G, \ \exists\, B \in \mathcal{B} \text{ με } x \in B \subset G \}.$$

Τότε, η τ είναι η μοναδική τοπολογία στο $X \,|$ $\mathcal{B}$ βάση του (X, τ).

Παράδειγμα (τοπολογία ημι-ανοικτών διαστημάτων στο $\mathbb{R}$).

Θέτουμε
$$\mathcal{B}=\{ [a,b): a, b\in\mathbb{R}, a<b \}.$$

Η $\mathcal{B}$ ικανοποιεί τις (i), (ii) της προτ. 4,5. Πράγματι:

- $$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, n)$$

- Έστω $[a, b), [c,d) \in \mathcal{B}$ $(a<b, \ c<d)$ κ' $x\in [a,b)\cap[c,d)$. Εάν
$$\kappa = \max(a, c), \quad \lambda = \min(b, d), \text{ τότε}$$
$$x\in [\kappa, \lambda) \subset [a, b)\cap[c,d).$$

Προτ. 5 $\Rightarrow$ $\exists!$ <u>τοπολογία $\mathcal{T}_S$ με βάση την $\mathcal{B}$</u>.

<u>Σχόλιο 1</u>: Εάν $\mathcal{T}_u$ η Ευκλείδεια τοπολογία στον $\mathbb{R}$, τότε

$$\mathcal{T}_u \subsetneq \mathcal{T}_S.$$

Πράγματι· έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$. Επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ με $n_0 > \frac{1}{b-a}$. Τότε,

$$(a, b] = \bigcup_{n=n_0}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b\right) \in \mathcal{T}_S.$$

Επειδή τα (a, b), $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, αποτελούν βάση της $\mathcal{T}_u$, έπεται ότι $\mathcal{T}_u \subseteq \mathcal{T}_S$.

Επιπλέον, $[0,1) \in \tau_S \setminus \tau_u$, αφού $0 \in [0,1)$ κ' $\nexists\, \varepsilon > 0 \,|$

$$(-\varepsilon, \varepsilon) \subset [0,1).$$

<u>Σχόλιο</u>: Η κλάση $\mathcal{J} = \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$.

δεν ικανοποιεί τη συνθήκη (ii) των Προτ. 4, 5 κ' άρα <u>δεν</u> υπάρχει τοπολογία στο $\mathbb{R}$ με βάση την $\mathcal{J}$.

Τοπολογία γινόμενο (για πεπερ. πλήθους τοπολ. χ.)

Έστω (X_i, τ_i), $1 \leq i \leq n$ $(n \geq 1)$ τοπολογικοί χώροι. Θέτουμε

$X = \prod_{i=1}^{n} X_i$, $\beta = \{ G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n \mid G_i \in \tau_i, 1 \leq i \leq n \}$.

Τότε, η β ικανοποιεί τις (i), (ii) των Προτ. 4, 5,

οπότε $\exists!$ τοπολογία τ στο X με βάση την β.

Η τ καλείται <u>τοπολογία γινόμενο</u> στο X.

Ισχύει: $G \in \tau$ ανν $\forall$ $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in G$,

$\exists$ $G_i \in \tau_i$, $1 \leq i \leq n$ $\mid$ $x \in \prod_{i=1}^{n} G_i \subset G$.

Υποβάσεις

Ορισμός 6: Έστω (X,τ) τοπολ. χ. κ' $\emptyset \neq \mathcal{J} \subset \mathcal{P}(X)$. Το $\mathcal{J}$ λέγεται **υποβάση** του (X,τ) ανν η κλάση

$$\mathcal{B} = \{\text{τομές πεπερασμένου πλήθους μελών της } \mathcal{J}\} \cup \{X\}$$

είναι βάση του (X,τ).

Παράδειγμα: Η $\mathcal{J} = \{(-\infty,b) : b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a,+\infty) : a \in \mathbb{R}\}$ αποτελεί υποβάση του $(\mathbb{R}, \tau_u)$. Πράγματι $\forall\ a,b \in \mathbb{R}$ με $a<b$,

$$(a,b) = (-\infty, b) \cap (a, +\infty).$$

Πρόταση 7: Έστω $X \neq \phi$, $\phi \neq \mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Τότε, $\exists!$ τοπολογία τ στο X με υποβάση την $\mathcal{J}$. Η τ καλείται η τοπολογία που παράγεται από την $\mathcal{J}$.

Απόδειξη: Θέτουμε

$$\mathcal{B} = \{\text{τομές πεπερασμένου πλήθους μελών της } \mathcal{J}\} \cup \{X\}.$$

Εάν $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, τότε προφανώς $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$, οπότε ικανοποιείται η (ii) της Πρότ. 5. Επίσης, ικανοπ. η (i).

Άρα, $\exists!$ τοπολογία τ με βάση την $\mathcal{B}$. $\boxtimes$

Βάση περιοχών σημείου.

Ορισμός 8: Έστω (X,τ) τοπολ. χώρος κ' $x\in X$. Ένα σύνολο $U\subset X$ λέγεται <u>περιοχή του x</u> ανν $\exists\, G\in\tau \mid x\in G\subset U$.

$\forall x\in X$, θέτουμε $\mathcal{N}_x=\{$οι περιοχές του $x\}$.

Παράδειγμα: Έστω (X,d) μετρικός χώρος κ' $x\in X$. Τα σύνολα

$$B(x,\varepsilon)=\{y\in X : d(x,y)<\varepsilon\},\quad \varepsilon>0,$$

$$B[x,\varepsilon]=\{y\in X : d(x,y)\leq\varepsilon\},\quad \varepsilon>0$$

είναι περιοχές του x. Σημ. ότι οι περιοχές του x <u>δεν είναι κατ' ανάγκη ανοικτά σύνολα</u>.

Ορισμός 9: Έστω (X, τ) τοπολ. χ., $x \in X$ κ' $\mathcal{B}_{x} \subset \mathcal{N}_x$.

Η $\mathcal{B}_x$ καλείται **βάση περιοχών του x** ανν

- $\forall B \in \mathcal{B}_x$, ισχύει $x \in B$.
- $\forall G \in \tau$ με $x \in G$, $\exists B \in \mathcal{B}_x \mid x \in B \subset G$.

Παραδείγματα:

(i) Εάν (X, d) μετρικός χώρος κ' $x \in X$, οι κλάσεις

$$\{ B(x, \varepsilon) : \varepsilon > 0 \}, \quad \{ B(x, 1/n) : n \geq 1 \}$$

αποτελούν βάσεις περιοχών του x.

(ii) Στον τοπολ. χώρο $(\mathbb{R}, \tau_S)$, η κλάση

$$\left\{ \left[x, x+\tfrac{1}{n}\right) : n \geq 1 \right\}$$

είναι βάση περιοχών του $x \in \mathbb{R}$.

Πρόταση 10: Έστω (X, τ) τοπολ. χώρος κ' $\forall x \in X$, έστω β_x βάση περιοχών του x. Τότε:

(i) $\forall x \in X$, $\forall B \in \beta_x$, ισχύει $x \in B$.

(ii) $\forall x \in X$, $\forall B_1, B_2 \in \beta_x$, $\exists B_3 \in \beta_x \mid B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

(iii) $G \in \tau$ ανν $\forall x \in G$, $\exists B \in \beta_x \mid B \subset G$.

(iv) Έστω $x \in X$, $B \in \beta_x$. Τότε, $\exists\, G \subset X$:

- $x \in G \subset B$.
- $\forall y \in G$, $\exists\, U \in \beta_y \mid U \subset G$.

Πρόταση 11: Έστω $X \neq \emptyset$. $\forall x \in X$, υπάρχει $\beta_x \subset \mathcal{P}(X)$ έτσι ώστε:

(i) $\forall x \in X$, $\forall B \in \beta_x$, ισχύει $x \in B$.

(ii) $\forall x \in X$, εάν $B_1, B_2 \in \beta_x$, τότε $\exists\, B_3 \in \beta_x \mid B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

(iii) $\forall x \in X$, $B \in \beta_x$, $\exists\, G \subset X$:

- $x \in G \subset B$
- $\forall y \in G$, $\exists\, U \in \beta_y \mid U \subset G$.

Θέτουμε

$$\mathcal{T}=\{G\subset X : \forall x\in G,\ \exists B\in \beta_x \text{ με } B\subset G\}.$$

Τότε, η $\mathcal{T}$ είναι η μοναδική τοπολογία στο X με βάσεις περιοχών τις β_x, $x\in X$.

<u>Απόδειξη</u>: Αποδεικνύεται εύκολα ότι $\mathcal{T}$ τοπολογία.

Επιπλέον, <u>$\forall x\in X$, $\beta_x\subset \mathcal{N}_x$</u>. Πράγματι· έστω $B\in\beta_x$. Τότε,

<u>(iii)</u> $\Rightarrow$ $\exists G\subset X$: $x\in G\subset B$ κ' $\forall y\in G$, $\exists B_y\in\beta_y \mid B_y\subset G$.

Τότε, <u>$G\in\mathcal{T}$</u> $\Rightarrow$ B περιοχή του x.

Τέλος, αν $G\in\mathcal{T}$, $x\in G$, τότε $\exists B\in\beta_x \mid B\subset G$. $\boxtimes$

Κλειστά σύνολα.

Ορισμός 12: Έστω (X,τ) τοπολ. χώρος. Ένα σύνολο $F\subset X$ λέγεται κλειστό αν το $F^c = X\setminus F$ είναι ανοικτό.

Παραδείγματα:

(i) Εάν (X,τ_D) διακριτός τοπολ. χ., τότε όλα τα υποσύνολα του X είναι ανοικτά κ' κλειστά.

(ii) Έστω (X,d) μετρικός χώρος κ' $B[x,\varepsilon]=\{y\in X : d(x,y)\leq \varepsilon\}$, $x\in X$, $\varepsilon>0$. Τότε, το $B[x,\varepsilon]$ είναι τ_d-κλειστό. Πράγματι έστω $y_0\in X\setminus B[x,\varepsilon]$, δηλ. $d(y_0,x)>\varepsilon$. Εάν $0<\delta< d(y_0,x)-\varepsilon$, τότε $B(y_0,\delta)\subset X\setminus B[x,\varepsilon]$.

(iii) Στον $(\mathbb{R}, \tau_S)$, το $[a,b)$ $(a<b)$ είναι ανοικτό κ' κλειστό. Πράγματι

$\mathbb{R} \setminus [a,b) = (-\infty, a) \cup [b, +\infty)$ κ' $(-\infty, a) \in \tau_u \subset \tau_S$,

$$[b, +\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [b, n) \in \tau_S.$$

(iv) Στον $(\mathbb{R}, \tau_u)$, το $[a,b)$ $(a<b)$ δεν είναι ούτε ανοικτό ούτε κλειστό.

(v) Έστω $X \neq \emptyset$ κ' τ η συν-πεπερασμένη τοπολογία. Τα κλειστά υποσύνολα του (X, τ) είναι τα πεπερασμένα.

<u>Πρόταση 13:</u> Έστω (X,τ) τοπολ. χ.

<u>(i)</u> εάν $F_1, F_2, \dots, F_n \subset X$ κλειστά, τότε $\bigcup_{k=1}^{n} F_k$ κλειστό.

<u>(ii)</u> Εάν $F_i \subset X$, $i \in I$, κλειστά, τότε $\bigcap_{i \in I} F_i$ κλειστό.

<u>Σχόλιο:</u> Ένωση άπειρου πλήθους κλειστών δεν είναι κατ' ανάγκη κλειστό. π.χ. $(\mathbb{R}, \tau_u)$

$$F_n = \left[\frac{1}{n}, 1\right], \quad n \geq 1, \qquad \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = (0,1] \text{ (όχι κλειστό!)}$$

Σύγκλιση ακολουθιών.

Ορισμός 13: Έστω (X,τ) τοπολ. χ. κ' $(x_n) \subseteq X$, $x \in X$. Θα λέμε ότι $x_n \xrightarrow{\tau} x$ (συγκλίνει στο x ως προς την τοπολογία τ) ανν $\forall G \in \tau$ με $x \in G$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$, $x_n \in G$.

Παραδείγματα:

(i) Εάν (X,d) μετρικός χώρος, τότε $x_n \xrightarrow{\tau_d} x$ ανν $d(x_n,x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

(ii) Εάν (X,τ_D) διακριτός, τότε $x_n \xrightarrow{\tau_D} x$ ανν $x_n = x$, τελικώς.

Πράγματι· $\{x\}$ ανοικτό, οπότε $x_n \in \{x\}$ τελικώς.

(iii) Θεωρούμε τον $(\mathbb{R}, \tau_S)$. Τότε, $\frac{1}{n} \xrightarrow{\tau_S} 0$ αλλά $-\frac{1}{n} \overset{\tau_S}{\not\to} 0$.

[Πράγματι: $[0,1) \in \tau_S$, $0 \in [0,1)$ αλλά $-\frac{1}{n} \notin [0,1)$, $\forall n \geq 1$.]

(iv) Έστω $X = \mathbb{R}$ κ' τ η συν-πεπερασμένη τοπολογία.

Θέτουμε $x_n = n$, $n \geq 1$. Τότε, $x_n \xrightarrow{\tau} x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Πράγματι:

Έστω $x \in \mathbb{R}$ κ' G ανοικτό με $x \in G$. Τότε, $X \setminus G$ πεπερασμένο. Επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geq 1$ με

$$n_0 > \max(X \setminus G).$$

Τότε, $\forall n \geq n_0$, $x_n = n \notin X \setminus G \Rightarrow x_n \in G$.

Κλειστή θήκη συνόλου.

Ορισμός 1.4: Έστω (X, τ) τοπολ. χ. κ' $A \subset X$. Θέτουμε

$$\overline{A} = \bigcap \{ F \subset X : F \text{ κλειστό με } A \subset F \}.$$

Το $\overline{A}$ λέγεται <u>κλειστή θήκη ή κλειστότητα του A</u>. Προφανώς, $A \subseteq \overline{A}$.

Παράδειγμα:

Θεωρούμε τον $(\mathbb{R}, \tau_u)$. Τότε, $\overline{(a, b)} = [a, b]$ $(a < b)$ κ'

$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, όπου $\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών.

Πρόταση 15: Έστω (X,τ) τοπολ. χ. κ' $A, B \subset X$. Τότε:

(i) A κλειστό ανν $\overline{A} = A$.

(ii) $x \in \overline{A} \Leftrightarrow$ [$\forall$ G ανοικτό με $x \in G$, ισχύει $G \cap A \neq \phi$.]

(iii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. Εάν $A \subseteq B$, τότε $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

(iv) Εάν $U \subset X$ ανοικτό, τότε $\overline{A} \cap U \subseteq \overline{A \cap U}$

Απόδ. μόνο του (iv): Έστω $x \in \overline{A} \cap U$ κ' G ανοικτό $\ni x$.

Τότε, $G \cap U$ ανοικτό $\ni x \xRightarrow{(ii)} G \cap U \cap A \neq \phi$

$\Rightarrow G \cap (A \cap U) \neq \phi$. Από το (ii) έπεται ότι $x \in \overline{A \cap U}$.

Πρόταση 16: Έστω (X,d) μετρικός χώρος κ' $A \subseteq X$. Τότε,

$x \in \overline{A} \Leftrightarrow [\ \exists$ ακολουθία $(x_n) \subseteq A$ με $x_n \to x$, δηλ.

$d(x_n, x) \xrightarrow{n\to\infty} 0.\ ]$

Εφαρμογή: Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα, $x \in X$, $\varepsilon > 0$. Τότε,

$$B[x,\varepsilon] = \overline{B(x,\varepsilon)}.$$

Πράγματι· $B[x,\varepsilon]$ κλειστό $\supseteq B(x,\varepsilon) \Rightarrow B[x,\varepsilon] \supseteq \overline{B(x,\varepsilon)}$.

Έστω $y \in B[x,\varepsilon]$, δηλ. $\|y-x\| \leq \varepsilon$. Θέτουμε

$$z_n = x + \left(1 - \frac{1}{n}\right)(y-x), \quad n \geq 1.$$

Τότε, $\|z_n - x\| = \left(1-\frac{1}{n}\right)\|y-x\| \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)\varepsilon < \varepsilon$, $\forall n \geq 1$.

$\Rightarrow \quad z_n \in B(x,\varepsilon), \quad \forall\, n \geq q$. Επιπλέον,

$$z_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x + (y-x) = y.$$

Άρα, $y \in \overline{B(x,\varepsilon)}$.

Εσωτερικό συνόλου.

Πρόταση 17: Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολ. χ. κ' $A \subset X$. Θέτουμε

$$\mathring{A} = \{x \in A : \exists G \in \mathcal{T} \text{ με } x \in G \subset A\}.$$

Το $\mathring{A}$ λέγεται <u>εσωτερικό</u> του A. Προφανώς, $\mathring{A} \subseteq A$.

Παράδειγμα: Έστω $\mathcal{T}_\varepsilon$ η ευκλείδια τοπολογία στον $\mathbb{R}$. Τότε,

$$\overset{\circ}{\widehat{[a,b]}} = (a,b), \quad \mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset, \quad \overset{\circ}{\widehat{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}} = \emptyset.$$

Πρόταση 18: Έστω (X, τ) τοπολ. χ. κ' $A, B \subseteq X$. Τότε:

(i) $\mathring{A} = \bigcup \{G : G$ ανοικτό με $G \subset A\}$.

(ii) $(\mathring{A})^{\circ} = \mathring{A}$.

(iii) A ανοικτό ανν $\mathring{A} = A$.

(iv) Εάν $A \subseteq B$, τότε $\mathring{A} \subseteq \mathring{B}$.

(v) $(A \cap B)^{\circ} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.

(vi) $X \setminus \mathring{A} = \overline{X \setminus A}$, $X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^{\circ}$.

Συνεχείς συναρτήσεις.

Ορισμός 19: Έστω (X,τ), (Y,τ') δύο τοπολ. χώροι κ' $f: X \to Y$, $x_0 \in X$. Η f λέγεται <u>συνεχής στο x_0</u> ανν για κάθε ανοικτό $H \subset Y$ με $f(x_0) \in H$, $\exists$ G ανοικτό $\subset X \mid$

$$x_0 \in G, \quad f(G) \subset H.$$

Η f λέγεται <u>συνεχής</u> στο X ανν f συνεχής στο $x_0 \in X$, $\forall x_0 \in X$.

Πρόταση 20: Έστω X, Y τοπολ. χ. κ' $f: X \to Y$, $x_0 \in X$ με f συνεχή στο x_0. Εάν $(x_n) \subseteq X$ με $x_n \to x_0$, τότε $f(x_n) \to f(x_0)$.

<u>Πρόταση 21:</u> Έστω (X,d) μετρικός χώρος, (Y,τ') τοπολ. χ., $f: X \to Y$, $x_0 \in X$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

<u>(i)</u> f συνεχής στο x_0.

<u>(ii)</u> $\forall (x_n) \subseteq X$ με $x_n \xrightarrow{d} x_0$, ισχύει $f(x_n) \xrightarrow{\tau'} f(x_0)$.

<u>Απόδειξη:</u> <u>(ii) ⇒ (i)</u> Υποθέτουμε ότι f <u>ασυνεχής στο x_0</u>.

Τότε, $\exists\, H \in \tau'$ ώστε $f(x_0) \in H$ κ'

$\forall\, G \in \tau_d$ με $x_0 \in G$, ισχύει $f(G) \not\subseteq H$.

Τα σύνολα $B(x_0, \frac{1}{n}) = \{ y \in X : d(y, x_0) < \frac{1}{n} \}$, $n \geq 1$

είναι ανοικτά κ' περιέχουν το x_0, οπότε

$\forall n \geq 1, \quad f\left(B(x_0, \tfrac{1}{n})\right) \not\subseteq H$

$\Rightarrow \forall n \geq 1, \quad \exists\, x_n \in B\left(x_0, \tfrac{1}{n}\right)$ με $f(x_n) \notin H$.

Τότε, $\quad d(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \xrightarrow{(n\to\infty)} 0 \Rightarrow x_n \xrightarrow{\tau_d} x_0$. Λόγω της

υπόθεσης, $f(x_n) \xrightarrow{\tau'} f(x_0) \Rightarrow f(x_n) \in H$ τελικώς (Άτοπο!). $\boxtimes$

<u>**Πρόταση 22:**</u> Έστω (X,τ), (Y,τ') τοπολ. χ. κ' $f: X \to Y$.

Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

<u>(i)</u> $\quad f$ συνεχής

<u>(ii)</u> $\forall\, H \subset Y$ ανοικτό, το $f^{-1}(H)$ είναι τ-ανοικτό.

<u>(iii)</u> $\forall\, F \subset Y$ κλειστό, το $f^{-1}(F)$ είναι τ-κλειστό.

<u>(iv)</u> $\forall\, A \subset X, \quad f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

<u>Παράδειγμα:</u> Έστω $f:(\mathbb{R},\tau_S)\to(\mathbb{R},\tau_u)$ με

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x\geq 0.\end{cases}$$

Τότε, $\forall\, H\subset\mathbb{R}$, $f^{-1}(H)=(-\infty,0)$ ή $[0,+\infty)$ ή $\emptyset$ ή $\mathbb{R}$

κ' $(-\infty,0)\in\tau_u\subset\tau_S$, $[0,+\infty)=\bigcup_{n=1}^{\infty}[0,n)\in\tau_S$

$\Longrightarrow$ f συνεχής.

Σημείωση: η $f:(\mathbb{R},\tau_u)\to(\mathbb{R},\tau_u)$ <u>δεν</u> είναι συνεχής.

Ομοιομορφισμοί:

Ορισμός 23: Έστω (X,τ), (Y,τ') τοπολ. χώροι κ' $f: X \to Y$, 1-1, επί. Η f λέγεται ομοιομορφισμός ανν οι $f: X \to Y$, $f^{-1}: Y \to X$ είναι συνεχείς.

Παράδειγμα: Η $f: (\mathbb{R}, \tau_u) \to ((-1,1), \tau_u)$ με $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ είναι ομοιομορφισμός.

Πρόταση 24: Έστω X, Y τοπολ. χώροι κ' $f: X \to Y$ 1-1, επί. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(i) f ομοιομορφισμός.

(ii) f συνεχής κ' $\forall F \subset X$ κλειστό, το $f(F)$ είναι κλειστό.

(iii) f συνεχής κ' $\forall G \subset X$ ανοικτό, το $f(G)$ είναι ανοικτό.

(iv) $\forall A \subset X$, $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

Συνάρτηση "απόσταση".

- Έστω (X,d) μετρικός χώρος κ' $A \subset X$, $x \in X$. Θέτουμε
$$d(x,A) = \inf\{d(x,a) : a \in A\}.$$
- Εάν $F \subset X$ κλειστό, τότε $d(x,F) = 0$ ανν $x \in F$.
- Εάν $A \subset X$, η συνάρτηση $x \mapsto d(x,A)$ είναι συνεχής.

Διαχωριστικά Αξιώματα.

Ορισμός 25: Έστω (X,τ) τοπολ. χ. κ' $A, B \subset X$ με $A \cap B = \emptyset$.

Τα A, B **διαχωρίζονται** ανν $\exists\ G, H \in \tau$: $A \subset G$, $B \subset H$, $G \cap H = \emptyset$.

Ορισμός 26: Ένας τοπολ. χ. X λέγεται

- **T_1** ανν $\forall x, y \in X$ με $x \neq y$, $\exists\ G \in \tau$: $x \in G$, $y \notin G$.
- **T_2 (Hausdorff)** ανν $\forall x, y \in X$ με $x \neq y$, τα $\{x\}, \{y\}$ διαχωρίζονται.
- **T_3** ανν $\forall F \subset X$ κλειστό κ' $\forall x \notin F$, τα $\{x\}, F$ διαχωρίζονται.
- **T_4** ανν $\forall F_1, F_2 \subset X$ κλειστά ξένα, τα F_1, F_2 διαχωρίζονται.

Πρόταση 27: Έστω (X,τ) τοπολ. χ.

(i) Ο X είναι T_1 ανν $\forall x\in X$, το $\{x\}$ είναι κλειστό.

(ii) Εάν ο X είναι T_2, τότε είναι κ' T_1.

(iii) $[\text{Ο } X \text{ είναι } T_3] \Leftrightarrow [\forall x\in X, \forall U\in\tau \text{ με } x\in U, \exists G\in\tau \mid x\in G\subset\overline{G}\subset U]$.

(iv) $[\text{ο } X \text{ είναι } T_4] \Leftrightarrow [\forall F_1, F_2\subset X$ κλειστά ξένα, $\exists G_1, G_2\in\tau$ ώστε $F_1\subset G_1$, $F_2\subset G_2$, $\overline{G}_1\cap\overline{G}_2=\emptyset$.$]$

Απόδειξη: **(iii)** **($\Rightarrow$)** Έστω ότι X T_3 κ' $x \in X$, $\mathcal{U} \in \tau$ με $x \in \mathcal{U}$.

Τότε, $x \notin \mathcal{U}^c$ = κλειστό, οπότε $\exists\ G, H \in \tau$ με $x \in G$, $\mathcal{U}^c \subset H$, $G \cap H = \emptyset$. Τότε, $x \in G \subset H^c \subset \mathcal{U}$. Αλλά H^c κλειστό, οπότε $\overline{G} \subset H^c$, οπότε $x \in G \subset \overline{G} \subset H^c \subset \mathcal{U}$.

($\Leftarrow$) Έστω $F \subset X$ κλειστό, $x \notin F$. Τότε, $x \in F^c \in \tau$, οπότε

$\exists\ G \in \tau \mid x \in G \subset \overline{G} \subset F^c$ κ' $F \subset (\overline{G})^c = H \in \tau$.

Άρα, $x \in G$, $F \subset H$, $H \cap G = \emptyset$.

(iv) ($\Rightarrow$) Έστω ότι X είναι T_4 κ' $F_1, F_2 \subset X$ κλειστά, ξένα.

Τότε, $\exists\ U_1, U_2 \in \tau$ με $F_1 \subset U_1$, $F_2 \subset U_2$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Έχουμε $U_1 \subset U_2^c =$ κλειστό, οπότε $\overline{U_1} \subset U_2^c \Rightarrow \overline{U_1} \cap U_2 = \emptyset$

$\Rightarrow \overline{U_1} \cap F_2 = \emptyset \overset{(X\ T_4)}{\Longrightarrow} \exists\ G, H \in \tau \mid \overline{U_1} \subset G$, $F_2 \subset H$, $G \cap H = \emptyset$.

Αλλά τότε, $H \subset G^c =$ κλειστό $\Rightarrow \overline{H} \subset G^c \Rightarrow \overline{H} \cap G = \emptyset$.

Επομένως, $F_1 \subset U_1$, $F_2 \subset H$, $\overline{U_1} \cap \overline{H} \subset G \cap \overline{H} = \emptyset$

($\Leftarrow$) προφανές.

Σχόλια:

(i) ($T_1 \not\Rightarrow T_2$). Έστω X άπειρο σύνολο κ' $\mathcal{T}$ η συμπεπερ. τοπολογία στο X.

- Ο X είναι T_1, διότι $\forall x \in X$, $X \setminus (X \setminus \{x\}) = \{x\}$ πεπερ.

$\Rightarrow$ $X \setminus \{x\}$ ανοικτό $\Rightarrow$ $\{x\}$ κλειστό.

- Ο X δεν είναι T_2. Δύο μη κενά ανοικτά τέμνονται.

Πράγματι· έστω G, H ανοικτά, μη κενά, ξένα. Τότε,

$G \subset X \setminus H =$ πεπερ. επί $X \setminus G$ πεπερ. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $X = G \cup (X \setminus G)$ πεπερ. (Άτοπο!).

(ii) (T_1 & T_3) $\Rightarrow$ T_2 (εύκολο).

(iii) ($T_2 \not\Rightarrow T_3$).

Θέτουμε $\mathcal{J} = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}, a<b\} \cup \{\mathbb{Q}\}$ κ' τ η

τοπολογία που έχει υποβάση την $\mathcal{J}$.

Τότε, $\tau_u \subset \tau \Rightarrow$ ο $(\mathbb{R}, \tau)$ είναι T_2.

Το $F = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι κλειστό κ' $0 \notin F$.

Υποθέτουμε ότι $\exists$ G, H ανοιχτά με

$$F \subset H, \quad 0 \in G, \quad G \cap H = \emptyset.$$

Τότε,

$0 \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists\, a, b \in \mathbb{R}$ με $a<b$, $0 \in (a,b) \cap \mathbb{Q} \subset G$.

Επιλέγω άρρητο $z \in (a, b)$. Τότε, $z \in F \subset H$

$\Rightarrow \exists\, c, d \in \mathbb{R} \mid c < d, \quad z \in (c, d) \subset H$.

Έχουμε $(a, b) \cap (c, d) \neq \emptyset$. Επιλέγουμε ρητό $p \in (a, b) \cap (c, d)$.

Τότε, $p \in (a, b) \cap \mathbb{Q} \subset G$ κ' $p \in (c, d) \subset H$

$\Rightarrow p \in G \cap H$ (Άτοπο!).

Άρα, ο $(\mathbb{R}, \tau)$ δεν είναι T_3.

(iv) $(T_1 \,\&\, T_4) \Rightarrow T_3$ (εύκολο).

Πρόταση 28: Κάθε μετρικός χώρος (X, d) είναι T_4.

Απόδειξη: Έστω $F_1, F_2 \subset X$ κλειστά, ξένα. Τότε, $\forall x \in X$,

$$d(x, F_1) + d(x, F_2) > 0.$$

Θέτουμε $f : X \to [0,1]$ με $f(x) = \dfrac{d(x, F_1)}{d(x, F_1) + d(x, F_2)}$.

Τότε, f συνεχής κ' $f(F_1) = \{0\}$, $f(F_2) = \{1\}$

$\Rightarrow F_1 \subset f^{-1}(\{0\}) \subset f^{-1}((-1/2, 1/2)) = G$,

$F_2 \subset f^{-1}(\{1\}) \subset f^{-1}((1/2, 3/2)) = H$.

Τότε, G, H ανοικτά με $G \cap H = \emptyset$. $\boxtimes$

Θεώρημα 29 (Λήμμα Urysohn):

Έστω X τοπολ. χ. T_4 & T_2 κ' $F_1, F_2 \subset X$ κλειστά ξένα.

Τότε, $\exists\, f: X \to [0,1]$ συνεχής με

$$f(F_1) = \{0\}, \qquad f(F_2) = \{1\}.$$

Συμπάγεια.

Έστω (X, τ) τοπολ. χ. κ' $K \subset X$.

Ορισμός 30: Ανοικτή κάλυψη του K είναι μια οικογένεια $\{G_i\}_{i\in I} \subset \tau$, ώστε $K \subset \bigcup_{i\in I} G_i$.

Π.χ. Η $\{(-n,n)\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ανοικτή κάλυψη του $(\mathbb{R}, \tau_u)$.

Ορισμός 31: Έστω $\{G_i\}_{i\in I}$ ανοικτή κάλυψη του K.

Εάν $J \subset I$, η $\{G_i\}_{i\in J}$ είναι μια υποκάλυψη του K αν $K \subset \bigcup_{i\in J} G_i$.

Ορισμός 31: Το K λέγεται **συμπαγές** αν κάθε ανοικτή κάλυψη του K έχει πεπερασμένη υποκάλυψη.

Παράδειγμα: Εάν $(x_n) \subset X$ κ' $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} x \in X$, τότε το $K = \{x_n : n \geq 1\} \cup \{x\}$ είναι συμπαγές. Πράγματι· έστω $\mathcal{G} \subset \mathcal{T}$ μια ανοικτή κάλυψη του K. Επιλέγουμε $\mathcal{U} \in \mathcal{G}$ με $x \in \mathcal{U}$.

Τότε, $\exists\, n_0 \geq 1 \mid x_n \in \mathcal{U},\ \forall n > n_0$. Επιλέγουμε $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots, \mathcal{U}_{n_0} \in \mathcal{G}$ με

$$x_i \in \mathcal{U}_i, \qquad 1 \leq i \leq n_0.$$

Τότε, η $\{\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots, \mathcal{U}_{n_0}, \mathcal{U}\}$ είναι πεπερ. υποκάλυψη του K.

Πρόταση 32: Εάν X συμπαγής κ' $F \subset X$ κλειστό, τότε F συμπαγές.

Θεώρημα 33 (Heine-Borel). Εάν $a, b \in \mathbb{R}$ με $a<b$, το $[a,b]$ είναι συμπαγές στον $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$.

Θεώρημα 33΄: Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα κ΄ $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$. Τότε, B_X $\|\cdot\|$-συμπαγές ανν $\dim X < \infty$.

Πρόταση 34: Έστω (X, d) μετρικός χώρος κ΄ $K \subset X$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(i) K συμπαγές

(ii) Εάν $(x_n) \subset K$, τότε η (x_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία με όριο μέσα στο K.

Έστω (X, τ) τοπολ. χ.

<u>Πρόταση 35:</u> Έστω $K \subset X$ συμπαγές.

<u>(i)</u> Έστω $F \subset X$ ώστε $\forall x \in K$, τα $\{x\}$, F διαχωρίζονται.

Τότε, τα F, K διαχωρίζονται.

<u>(ii)</u> Εάν X T_2 κ' F συμπαγές με $F \cap K = \emptyset$, τότε

τα F, K διαχωρίζονται.

<u>(iii)</u> Εάν X T_3 & T_2 κ' F κλειστό με $F \cap K = \emptyset$,

τότε τα F, K διαχωρίζονται.

Απόδειξη:

(i) $\forall x \in K$, $\exists\, G(x), H(x) \in \tau \mid$

$x \in G(x)$, $F \subset H(x)$, $G(x) \cap H(x) = \emptyset$.

Η $\{G(x)\}_{x \in K}$ είναι ανοικτή κάλυψη του K $\xRightarrow{[\text{συμπαγές}]}$

$\Rightarrow \exists\, x_1, x_2, \dots, x_n \in K \mid \quad K \subset \bigcup_{i=1}^{n} G(x_i) = U =$ ανοικτό.

Τότε, $F \subset \bigcap_{i=1}^{n} H(x_i) = W =$ ανοικτό.

Επιπλέον, $\forall j$, $G(x_j) \cap H(x_j) = \emptyset \Rightarrow G(x_j) \cap W = \emptyset$

$\Rightarrow U \cap W = \emptyset$.

(ii) Έστω $x \in K$. $\forall y \in F$, $y \neq x \overset{[X\ T_2]}{\Longrightarrow}$ τα $\{x\}, \{y\}$ διαχωρίζονται

$\underset{[F \text{ συμπαγές}]}{\overset{(i)}{\Longrightarrow}}$ τα $\{x\}, F$ διαχωρίζονται, $\forall x \in K$

$\underset{[K \text{ συμπαγές}]}{\overset{(i)}{\Longrightarrow}}$ τα K, F διαχωρίζονται.

(iii) $\forall x \in K$, έχουμε $x \notin F \overset{[X\ T_3]}{\Longrightarrow}$ τα $\{x\}, F$ διαχωρίζονται

$\underset{[K \text{ συμπαγές}]}{\overset{(i)}{\Longrightarrow}}$ τα K, F διαχωρίζονται.

Πόρισμα 36: Έστω (X,τ) τοπολ. χ. T_2.

(i) Αν X συμπαγής, τότε είναι T_4.

(ii) Αν $K \subset X$ συμπαγές, τότε K κλειστό.

Απόδειξη:

(i) Έστω $F_1, F_2 \subset X$ κλειστά, ξένα $\xRightarrow{[\text{Πρότ. } 32]}$ F_1, F_2 συμπαγή, ξένα $\xRightarrow{[\text{Πρότ. } 35(ii)]}$ τα F_1, F_2 διαχωρίζονται.

(ii) Έστω $x \in X \setminus K$. Τα $\{x\}, K$ είναι συμπαγή ξένα $\xRightarrow{[\text{Πρότ. } 35(ii)]}$ $\exists\ G, H$ ανοικτά $\mid$ $x \in G$, $K \subset H$, $G \cap H = \emptyset$. Τότε,

$x \in G \subset H^c \subset K^c \Rightarrow K^c$ ανοικτό. $\boxtimes$

Πρόταση 37: Έστω (X_i, T_i), $1 \leq i \leq n$, συμπαγείς τοπολ. χ. Τότε, ο $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ είναι συμπαγής ως προς την τοπολογία γινόμενο.

Πρόταση 38: Έστω X, Y τοπολογ. χώροι κ' $f : X \to Y$ συνεχής.

(i) Εάν K συμπαγές, τότε $f(K)$ συμπαγές.

(ii) Εάν X συμπαγής, Y T_2 κ' f 1-1, επί, τότε f ομοιομορφισμός.

<u>(iii)</u> Εάν $Y=(\mathbb{R},T_u)$ κ' K συμπαγές $\subset X$, τότε η $f|_K$ λαμβάνει μέγιστη κ' ελάχιστη τιμή.

<u>(iv)</u> Έστω (X,d), (Y,ρ) μετρικοί χώροι κ' $K\subset X$ συμπαγές, τότε $f|_K$ **ομοιόμορφα συνεχής**, δηλ.

$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0 \mid \forall\ x_1,x_2\in K$, αν $d(x_1,x_2)<\delta$, τότε

$\rho(f(x_1),f(x_2))<\varepsilon$.

Ασθενείς τοπολογίες.

Έστω $X \neq \emptyset$, (Y_i, τ_i), $i \in I$, τοπολογικοί χώροι κι

$f_i : X \to Y_i$, $i \in I$, συναρτήσεις. Θέτουμε

$\Phi = \{ f_i : i \in I \}$, $\mathcal{S} = \{ f_i^{-1}(G) : G \in \tau_i, \ i \in I \}$.

Θεωρούμε την τοπολογία τ_Φ στο X που έχει υποβάση την $\mathcal{S}$.

Ορισμός 39: Η τ_Φ λέγεται **ασθενής τοπολογία** στο X που επάγεται

από την Φ.

Πρόταση 40:

(i) Η τ_ϕ είναι η μικρότερη τοπολογία στο X ώστε οι

$$f_i : (X, \tau_\phi) \to (Y_i, \tau_i), \quad i \in I$$

είναι συνεχείς.

(ii) Μια βάση για τον (X, τ_ϕ) είναι η

$$\beta = \left\{ \bigcap_{k=1}^{p} f_{i_k}^{-1}(G_{i_k}) : i_k \in I,\ G_{i_k} \in \tau_{i_k},\ 1 \leq k \leq p,\ p \geq 1 \right\}.$$

(iii) Έστω Z τοπολ. χώρος κ' $g : Z \to (X, \tau_\phi)$. Η g είναι συνεχής ανν $\forall i \in I$, $f_i \circ g : Z \to Y_i$ είναι συνεχής.

(iv) Έστω $(x_n) \subset X$, $x \in X$. Τότε, $x_n \xrightarrow{\tau_\phi} x$ ανν

$$f_i(x_n) \xrightarrow{\tau_i} f_i(x), \quad \forall i \in I.$$

Απόδειξη του (iv): Υποθέτουμε ότι $f_i(x_n) \xrightarrow{\tau_i} f_i(x)$, $\forall\, i \in I$.

Θα δ.ο. $x_n \xrightarrow{\tau_\Phi} x$. Έστω $H \in \tau_\Phi$ με $x \in H$. Τότε,

$\exists\, i_1, i_2, \ldots, i_\rho \in I$ $(\rho \geq 1)$ κ' $G_{i_k} \in \tau_{i_k}$, $1 \leq k \leq \rho$, ώστε

$$x \in \bigcap_{k=1}^{\rho} f_{i_k}^{-1}(G_{i_k}) \subset H.$$

$\forall k$, $f_{i_k}(x_n) \xrightarrow{\tau_{i_k}} f_{i_k}(x) \in G_{i_k} \Longrightarrow \exists\, n_k \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_k$,

$$f_{i_k}(x_n) \in G_{i_k} \Longrightarrow x_n \in f_{i_k}^{-1}(G_{i_k}).$$

Θέτουμε $n_0 = \max_{k=1}^{\rho} n_k$. Τότε, $\forall n \geq n_0$,

$$x_n \in \bigcap_{k=1}^{\rho} f_{i_k}^{-1}(G_{i_k}) \subset H.$$

$\boxtimes$

Πρόταση 41: Υποθέτουμε ότι:

- (Y_i, τ_i) T_2, $\forall i \in I$.
- Η $\Phi = \{f_i : X \to Y_i \mid i \in I\}$ χωρίζει σημεία στο X,

δηλ. $\forall x, x' \in X$ με $x \neq x'$, $\exists i \in I \mid f_i(x) \neq f_i(x')$.

Τότε, ο (X, τ_Φ) είναι T_2.

Απόδειξη: Έστω $x, x' \in \tau_\Phi$ με $x \neq x'$. Τότε, $\exists i \in I \mid$

$$f_i(x) \neq f_i(x').$$

Αφού (Y_i, τ_i) T_2, $\exists$ $G_i, W_i \in \tau_i$ ώστε

$$f_i(x) \in G_i, \quad f_i(x') \in W_i, \quad G_i \cap W_i = \emptyset.$$

Τότε, $x \in f_i^{-1}(G_i)$, $x' \in f_i^{-1}(W_i)$, $f_i^{-1}(G_i)$, $f_i^{-1}(W_i) \in \tau_\Phi$

κ' $f_i^{-1}(G_i) \cap f_i^{-1}(W_i) = \emptyset$. $\boxtimes$

<u>Παράδειγμα:</u> Έστω $X \neq \emptyset$, (Y, τ) τοπολ. χ. κ'

$$Y^X = \{\xi : X \to Y \mid \xi \text{ συνάρτηση}\}.$$

$\forall x \in X$, θέτουμε $\delta_x : Y^X \to Y$, $\delta_x(\xi) = \xi(x)$, $\forall \xi \in Y^X$.

Θέτουμε $\Phi = \{\delta_x : x \in X\}$. Τότε, η τ_Φ είναι <u>η τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης</u> <u>στο Y^X</u>.

Πράγματι· έστω $(\xi_n) \subset Y^X$, $\xi \in Y^X$. Τότε,

$\xi_n \xrightarrow{\tau_\phi} \xi$ ανν $\forall x \in X$, $\delta_x(\xi_n) \xrightarrow{\tau} \delta_x(\xi)$

ανν $\forall x \in X$, $\xi_n(x) \xrightarrow{\tau} \xi(x)$.

Η Φ χωρίζει σημεία στο Y^X διότι αν $\xi, \xi' \in Y^X$

με $\xi \neq \xi'$, τότε $\exists x \in X$: $\xi(x) \neq \xi'(x) \Leftrightarrow \delta_x(\xi) \neq \delta_x(\xi')$.

Επομένως, αν (Y, τ) T_2, τότε η τ_ϕ είναι T_2.