



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Διακριτά Μαθηματικά

Διδάσκοντες: Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου

3η Γραπτή Εργασία, Ημ/νια Παράδοσης: 17/6/2026

**Θέμα 1 (Συνδυαστική, 2,4 μον.).** Εξετάζουμε τους τρόπους να μοιραστούν βιβλία Διακριτών Μαθηματικών σε 1000 φοιτητές. Στα υποερωτήματα που ακολουθούν, οι φοιτητές θεωρούνται διακεκριμένοι και κανένας φοιτητής δεν μπορεί να πάρει δύο ή περισσότερα βιβλία Διακριτών Μαθηματικών.

1. Με πόσους τρόπους μπορούν να μοιραστούν 200 αντίτυπα Hunter, 250 αντίτυπα Rosen, 100 αντίτυπα Liu, και 50 αντίτυπα Err στους 1000 φοιτητές;
2. Έχουμε 1000 αντίτυπα από καθένα από τα βιβλία των Hunter, Rosen, Liu και Err. Με πόσους τρόπους μπορούν να επιλέξουν βιβλίο Διακριτών Μαθηματικών οι 1000 φοιτητές;
3. Έχουμε 1000 αντίτυπα από καθένα από τα βιβλία των Hunter, Rosen, Liu και Err. Με πόσους τρόπους μπορούν να επιλέξουν βιβλίο Διακριτών Μαθηματικών οι 1000 φοιτητές, αν πρέπει να διατεθεί τουλάχιστον ένα αντίτυπο από κάθε βιβλίο;
4. Έχουμε 4 (διακεκριμένα) σημεία διανομής όπου μοιράζεται μόνο το βιβλίο του Hunter. Με πόσους τρόπους μπορούν να κατανεμηθούν 1000 αντίτυπα του βιβλίου στα 4 σημεία διανομής, ώστε κάθε σημείο να μοιράσει 350 αντίτυπα το πολύ;
5. Έχουμε 4 σημεία διανομής, καθένα μοιράζει ένα από τα βιβλία των Hunter, Rosen, Liu, Err. Σε κάθε σημείο διανομής υπάρχουν διαθέσιμα 1000 αντίτυπα από το βιβλίο που μοιράζεται. Με πόσους τρόπους μπορούν να σταθούν οι 1000 φοιτητές στις 4 ουρές αναμονής για να πάρουν βιβλίο; Με πόσους τρόπους μπορεί να συμβεί αυτό, αν κάθε σημείο διανομής πρέπει να μοιράσει τουλάχιστον 5 βιβλία;
6. Όπως στο (5) (χωρίς τον περιορισμό για τουλάχιστον 5 βιβλία), αλλά σε κάθε σημείο διανομής υπάρχουν διαθέσιμα μόνο 350 αντίτυπα από το βιβλίο που μοιράζεται.

**Θέμα 2 (Συνδυαστική, 2 μον.).** Έστω  $n$  θετικός ακέραιος. Σχηματίζουμε τυχαίες πεντάδες  $(i, j, k, \ell, m)$ , με  $1 \leq i \leq j \leq k \leq \ell \leq m \leq n$ , ως εξής: επιλέγουμε τυχαία και ανεξάρτητα 5 φυσικούς στο σύνολο  $\{1, \dots, n\}$  και τους ταξινομούμε για να σχηματίσουμε μια τυχαία πεντάδα στην επιθυμητή μορφή (π.χ. σκεφτείτε ότι ρίχνουμε τυχαίες “ζαριές” για ένα παιχνίδι που παίζεται με 5 ίδια ζάρια και κάθε ζάρι έχει  $n$  πιθανά αποτελέσματα).

1. Πόσες διαφορετικές τέτοιες πεντάδες μπορούμε να σχηματίσουμε;
2. Να υπολογίσετε την πιθανότητα μια τυχαία πεντάδα να περιέχει έναν μόνο φυσικό (δηλ. να είναι της μορφής  $(i, i, i, i, i)$ , για κάποιο  $i \in \{1, \dots, n\}$ ).
3. Να υπολογίσετε την πιθανότητα μια τυχαία πεντάδα να περιέχει (ακριβώς) δύο διαφορετικούς φυσικούς. Εδώ υποθέτουμε ότι  $n \geq 2$ .

**Θέμα 3 (Συνδυαστική, Γεννήτριες Συναρτήσεις, 2 μον.).** Θεωρούμε μια σχολή ΗΜΜΥ με 200 εγγεγραμμένους φοιτητές σε καθένα από τα 5 έτη σπουδών (άρα έχουμε 1000 φοιτητές συνολικά). Στα πλαίσια μιας διαφημιστικής εκστρατείας, έχουμε 300 (ίδια) κόκκινα και 700 (ίδια) πράσινα μπλουζάκια, τα οποία θα μοιράσουμε στους φοιτητές, ώστε κάθε φοιτητής να πάρει ένα μπλουζάκι.

(α) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να μοιράσουμε τα μπλουζάκια αν θεωρήσουμε ότι οι φοιτητές δεν είναι διακεκριμένοι και το μόνο που μας ενδιαφέρει είναι πόσα κόκκινα και πόσα πράσινα μπλουζάκια μοιράστηκαν στους φοιτητές κάθε έτους;

(β) Να διατυπώσετε τη γεννήτρια συνάρτηση και να προσδιορίσετε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δίνει τους διαφορετικούς τρόπους να μοιράσουμε τα μπλουζάκια, αν σε κάθε έτος πρέπει να μοιράσουμε τουλάχιστον δύο και συνολικά άρτιο πλήθος από κόκκινα και από πράσινα μπλουζάκια, και:

1. θεωρήσουμε ότι οι φοιτητές δεν είναι διακεκριμένοι και το μόνο που μας ενδιαφέρει είναι πόσα κόκκινα και πόσα πράσινα μπλουζάκια μοιράστηκαν στους φοιτητές κάθε έτους.
2. θεωρήσουμε ότι οι φοιτητές είναι διακεκριμένοι.

**Θέμα 4 (Γεννήτριες Συναρτήσεις, 1.6 μον.).** (α) Θέλουμε να υπολογίσουμε το πλήθος των τρόπων να μοιράσουμε 1000 επιστημονικά βιβλία και 500 λογοτεχνικά βιβλία στις βιβλιοθήκες 10 διαφορετικών σχολείων. Να διατυπώσετε τη γεννήτρια συνάρτηση και να προσδιορίσετε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δίνει το ζητούμενο, αν θεωρήσουμε ότι:

1. Όλα τα βιβλία είναι διαφορετικά μεταξύ τους και κάθε βιβλιοθήκη πρέπει να πάρει τουλάχιστον 40 βιβλία και το πολύ 400 βιβλία (και δεν έχει σημασία η σειρά με την οποία τα βιβλία φτάνουν στις βιβλιοθήκες).
2. Τα βιβλία της ίδιας κατηγορίας δεν διακρίνονται μεταξύ τους (άρα το μόνο που ενδιαφέρει είναι πόσα επιστημονικά και πόσα λογοτεχνικά βιβλία θα πάρει κάθε βιβλιοθήκη), και κάθε βιβλιοθήκη θα πάρει 150 βιβλία συνολικά και τουλάχιστον 10 βιβλία από κάθε κατηγορία.

(β) Έχουμε 400 ίδια βιβλία Μαθηματικών με πάχος 5 εκατοστά το καθένα, 300 ίδια βιβλία Φυσικής με πάχος 10 εκατοστά το καθένα, 200 ίδια βιβλία Πληροφορικής με πάχος 8 εκατοστά το καθένα και 200 ίδια βιβλία Ιστορίας με πάχος 12 εκατοστά το καθένα. Θέλουμε να υπολογίσουμε το πλήθος των τρόπων να επιλέξουμε βιβλία συνολικού πάχους 60 μέτρων για τη βιβλιοθήκη ενός σχολείου, αν πρέπει να επιλέξουμε τουλάχιστον 20 βιβλία από κάθε είδος. Να διατυπώσετε την αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτηση και να προσδιορίσετε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δίνει το ζητούμενο.

**Θέμα 5 (Εγκλεισμός - Αποκλεισμός, 2.0 μον.).** Έστω  $S(m, n)$  το πλήθος των διαφορετικών επί συναρτήσεων από ένα σύνολο  $A$  με  $m$  στοιχεία σε ένα σύνολο  $B$  με  $n$  στοιχεία, όπου  $m \geq n$ . Θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού για να αποδείξουμε ότι:

$$S(m, n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (n-k)^m. \quad (1)$$

1. Έστω  $B = \{1, 2, \dots, n\}$ . Ορίζουμε ως  $A_i$  το σύνολο των συναρτήσεων από το  $A$  στο  $B$  που δεν περιέχουν το στοιχείο  $i$  στο πεδίο τιμών τους (δηλαδή το  $i$  δεν είναι εικόνα κανενός στοιχείου του  $A$ ). Να υπολογίσετε το πλήθος των στοιχείων του συνόλου  $A_i$  καθώς και το πλήθος των στοιχείων της τομής  $k$  τέτοιων συνόλων, δηλαδή το  $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}|$ .
2. Να αποδείξετε την (1) εφαρμόζοντας τον γενικό τύπο του εγκλεισμού-αποκλεισμού.
3. Να διατυπώσετε την (εκθετική) γεννήτρια συνάρτηση για το πλήθος των  $n$ -αδικών συμβολοσειρών μήκους  $m$  όπου καθένα από τα  $n$  διαφορετικά ψηφία εμφανίζεται τουλάχιστον μία φορά. Να προσδιορίσετε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δίνει το ζητούμενο και να υπολογίσετε τον ζητούμενο συντελεστή. Πως σχετίζεται ο συντελεστής που υπολογίσατε με το  $S(m, n)$  που ορίζεται στην (1) και γιατί;

**Παράδοση.** Οι εργασίες πρέπει να αναρτηθούν στο [helios.ntua.gr/mod/assign/view.php?id=24410](http://helios.ntua.gr/mod/assign/view.php?id=24410) μέχρι τα μεσάνυχτα της Τετάρτης 17/6.

**Καλή Επιτυχία!**