Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα
Διδάσκοντες: Α. Παγουρτζής, Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου
3η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 10/1/2025

Άσκηση 1: Διαφημίσεις στο Διαδίκτυο (1.6 μον.)

Είμαστε υπεύθυνοι για τη λειτουργία ενός ειδησεογραφικού web site που δέχεται καθημερινές επισκέψεις από τους ίδιους n ανθρώπους. Οι επισκέπτες του site κατηγοριοποιούνται με βάση συγκεκριμένες ιδιότητες (π.χ., άνδρας ή γυναίκα, παντρεμένος ή όχι, εργαζόμενος ή άνεργος, δημόσιος ή ιδιωτικός τομέας εργασίας, ηλικιακή κατηγορία, κάτοικος Ελλάδας ή εξωτερικού). Κάθε επισκέπτης μπορεί να ανήκει σε μία ή περισσότερες από τις k δημογραφικές κατηγορίες που ορίζονται με βάση αυτές τις ιδιότητες. Τα έσοδά μας προέρχονται αποκλειστικά από τις διαφημίσεις m εταιρειών που προβάλλονται στο site μας. Με βάση τα χρήματα που διαθέτει κάθε εταιρεία i, μπορεί να εμφανίζονται το πολύ c_i διαφημίσεις της κάθε ημέρα (υποθέτουμε ότι $c_1 + \cdots + c_m \geq n$). Επιπλέον, κάθε εταιρεία i επιθυμεί οι διαφημίσεις της να προβάλλονται μόνο σε επισκέπτες που ανήκουν σε ένα συγκεκριμένο υποσύνολο $S_i \subseteq \{1, \dots, k\}$ από τις k δημογραφικές κατηγορίες στις οποίες ανήκουν οι επισκέπτες.

Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που με βάση τα παραπάνω δεδομένα, αποφασίζει αν είναι δυνατόν να εμφανίζεται μια διαφήμιση σε κάθε επισκέπτη ώστε να προβάλλονται το πολύ c_i διαφημίσεις κάθε εταιρείας i και οι διαφημίσεις της εταιρείας i να απευθύνονται μόνο σε επισκέπτες που ανήκουν στις δημογραφικές κατηγορίες του S_i. Αν κάτι τέτοιο είναι εφικτό, ο αλγόριθμος θα πρέπει να υπολογίζει ποιοι επισκέπτες θα βλέπουν τις διαφημίσεις κάθε εταιρείας. Να αιτιολογήσετε προσεκτικά την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

Άσκηση 2: Κυκλικές συμβολοσειρές (2 μον.)

Μια κυκλική συμβολοσειρά μήκους n είναι μια συμβολοσειρά στην οποία ο χαρακτήρας n θεωρείται ότι προηγείται του χαρακτήρα 1. Παράδειγμα: Οι συμβολοσειρές rc, arc, $arcacarcar$ είναι όλες υπο-συμβολοσειρές της κυκλικής συμβολοσειράς car. Δώστε έναν αλγόριθμο για να προσδιορίσετε αν μια συμβολοσειρά p_1 είναι υποσυμβολοσειρά μιας κυκλικής συμβολοσειράς p_2. Αναλύστε τον ασυμπτωτικό χρόνο εκτέλεσης του αλγορίθμου σας και αιτιολογήστε την ορθότητά του.

Άσκηση 3: Huffman coding [από βιβλίο Dasgupta-Papadimitriou-Vazirani] (1.5 μον.)

Χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο του Huffman για να πάρουμε μια κωδικοποίηση του αλφαβήτου $\{a, b, c\}$ με συχνότητες εμφάνισης f_a, f_b, f_c αντίστοιχα. Σε καθεμία από τις περιπτώσεις που ακολουθούν, είτε δώστε ένα παράδειγμα συγκεκριμένων συχνοτήτων (f_a, f_b, f_c) που θα μπορούσαν να δώσουν τον αντίστοιχο κώδικα, είτε εξηγήστε γιατί δεν μπορεί με κανέναν τρόπο να προκύψει ο κώδικας αυτός (ανεξάρτητα από το ποιές είναι οι συχνότητες).

1. Κώδικας:$\{0, 10, 11\}$
2. Κώδικας:$\{0, 1, 00\}$
3. Κώδικας:$\{10, 01, 00\}$

Άσκηση 4: Υπολογισιμότητα (2.1 μον.)

Η κλάση RE περιέχει όλα τα ημιαποκρίσιμα υπολογιστικά προβλήματα (δηλαδή αυτά για τα οποία υπάρχει αλγόριθμος που τα ημιαποφασίζει).

(α) Στο **Πρόβλημα Διοφαντικών Εξισώσεων** (γνωστό και ως '10ο πρόβλημα του Hilbert') δίνεται ως είσοδος μια πολυωνυμική εξίσωση με ακέραιους συντελεστές και πεπερασμένο αριθμό αγνώστων και ζητείται αν έχει ακέραιες λύσεις ή όχι.

Αποδείξτε ότι το **Πρόβλημα Διοφαντικών Εξισώσεων** ανήκει στην κλάση RE.[1]

(β) Αποδείξτε ότι το **Πρόβλημα Τερματισμού (HP)** είναι RE-πλήρες, περιγράφοντας αναγωγή από οποιοδήποτε ημιαποκρίσιμο πρόβλημα στο **HP**.

Υπόδειξη: ίσως σας βοηθήσει να αναγάγετε πρώτα το **Πρόβλημα Διοφαντικών Εξισώσεων** στο **HP**.

(γ) Αποδείξτε ότι το **Πρόβλημα Ελέγχου Αποδοχής Περιττών** (ορισμός παρακάτω) είναι RE-δύσκολο και επομένως μη επιλύσιμο. Ορισμός προβλήματος: Δίνεται μια μηχανή Turing M και ζητείται να απαντηθεί αν η M αποδέχεται *όλες* τις εισόδους της που είναι περιττοί αριθμοί και μόνον αυτές.

Υπόδειξη: για κάθε πρόβλημα που εξετάζετε διατυπώστε με σαφήνεια, και κατά το δυνατόν με μαθηματικό συμβολισμό, ποια είναι η είσοδος και ποια η επιθυμητή έξοδος/απάντηση.

Άσκηση 5: Πολυπλοκότητα - Αναγωγές (2.8 μον.)

Αποδείξτε τα παρακάτω (τα αποτελέσματα πληρότητας ζητούνται ως προς την αναγωγή πολυωνυμικού χρόνου $\leq_P$):

(α) Το πρόβλημα **Tautology** (δίνεται τύπος του προτασιακού λογισμού και ζητείται αν είναι ταυτολογία) είναι coNP-πλήρες.

(β) Αν ένα NP-πλήρες (ως προς την αναγωγή πολυωνυμικού χρόνου $\leq_P$) πρόβλημα ανήκει στην κλάση coNP τότε $\mathsf{NP} = \mathsf{coNP}$.

(γ) Το πρόβλημα **NAE3SAT** (Not-All-Equal 3-SAT: δίνεται ένας τύπος του προτασιακού λογισμού σε μορφή 3-SAT και ζητείται αν υπάρχει ανάθεση η οποία σε κάθε clause ικανοποιεί τουλάχιστον 1 και το πολύ 2 literals) είναι NP-πλήρες.

(δ) Το πρόβλημα **Dominating Set** που ορίζεται παρακάτω είναι NP-πλήρες. Ορισμός προβλήματος: Δίνεται γράφος $G = (V, E)$ και ακέραιος k. Ζητείται να απαντηθεί αν υπάρχει σύνολο κορυφών $V' \subseteq V$ τ.ώ. κάθε κορυφή του V είτε ανήκει στο V' είτε έχει έναν γείτονα στο V' και $V' \leq k$;

[1] Το 1970 αποδείχθηκε από τον Yuri Matiyasevich, ολοκληρώνοντας την πολυετή προσπάθεια των Martin Davis, Hilary Putnam, Julia Robinson, και του ίδιου, ότι το πρόβλημα είναι επιπλέον **RE**-δύσκολο, και επομένως RE-πλήρες και μη επιλύσιμο.