



Άσκηση 1: Επιλογή και Κάλυψη Μαθημάτων (2.5 μον.)

(α) Στο πρόβλημα της επιλογής μαθημάτων έχουμε n αιτήματα για διδασκαλία μαθημάτων, κάθε αίτημα i χαρακτηρίζεται από το χρονικό διάστημα $[s_i, f_i]$ στο οποίο θα πρέπει διδαχθεί το μάθημα, και στόχος είναι να επιλέξουμε ένα μέγιστο, ως προς τον πληθικό του αριθμό, σύνολο μαθημάτων που δεν έχουν επικαλύψεις μεταξύ τους.

Γνωρίζουμε ήδη ότι μπορούμε να υπολογίσουμε μια βέλτιστη λύση εφαρμόζοντας το άπληστο κριτήριο του *ελάχιστου χρόνου ολοκλήρωσης*, σύμφωνα με το οποίο επιλέγουμε το διαθέσιμο μάθημα με τον ελάχιστο χρόνο ολοκλήρωσης, αφαιρούμε όσα μαθήματα επικαλύπτονται με αυτό, και επαναλαμβάνουμε.

Να εξετάσετε ποια από τα παρακάτω εναλλακτικά κριτήρια εγγυώνται μια βέλτιστη λύση και ποια όχι. Για κάθε κριτήριο, πρέπει είτε να αποδείξετε ότι οδηγεί πάντα σε μία βέλτιστη λύση είτε να βρείτε ένα στιγμιότυπο όπου η λύση στην οποία οδηγούμαστε δεν είναι βέλτιστη. Για διευκόλυνση, μπορείτε να “σπάσετε” τις ισοπαλίες (ως προς το κριτήριο που εφαρμόζετε) με όποιον τρόπο επιθυμείτε.

1. *Λιγότερες επικαλύψεις* : Επιλέγουμε το μάθημα με τις λιγότερες επικαλύψεις με άλλα μαθήματα, αφαιρούμε όλα τα μαθήματα που επικαλύπτονται με αυτό, και επαναλαμβάνουμε.
2. *Μεγαλύτερη διάρκεια* : Αν δεν υπάρχουν επικαλύψεις, επιλέγουμε όλα τα μαθήματα. Διαφορετικά, αφαιρούμε το μάθημα με τη μεγαλύτερη διάρκεια και επαναλαμβάνουμε.
3. *Περισσότερες επικαλύψεις* : Αν δεν υπάρχουν επικαλύψεις, επιλέγουμε όλα τα μαθήματα. Διαφορετικά, αφαιρούμε το μάθημα που έχει τις περισσότερες επικαλύψεις με άλλα μαθήματα και επαναλαμβάνουμε.

(β) Το ΔΣ του Φοιτητικού Συλλόγου μόλις αποφάσισε να πραγματοποιηθεί Γενική Συνέλευση φοιτητών αύριο κιόλας, και εσείς αναλάβετε να περάσετε από όλα τα μαθήματα που γίνονται σήμερα στη Σχολή για να ενημερώσετε τους συμφοιτητές σας. Δυστυχώς, πρέπει να βρίσκεστε στα Παλιά Κτίρια όλη τη μέρα. Μπορείτε να φεύγετε μόνο στιγμιαία προκειμένου να μεταφερθείτε στα Νέα Κτίρια, να περάσετε από όλα τα αμφιθέατρα στα οποία γίνεται μάθημα εκείνη τη στιγμή και να κάνετε την ανακοίνωσή σας. Γνωρίζετε το πρόγραμμα των μαθημάτων για σήμερα, δηλαδή γνωρίζετε ότι κάθε μάθημα $i \in \{1, \dots, n\}$ διδάσκεται στο χρονικό διάστημα $[s_i, f_i]$. Στόχος σας είναι να βρείτε ποιες χρονικές στιγμές θα πάτε στα Νέα Κτίρια ώστε να μετακινηθείτε όσες λιγότερες φορές είναι δυνατόν (θεωρήστε ότι η μεταφορά και οι ανακοινώσεις γίνονται στιγμιαία). Διατυπώστε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που να λύνει αυτό το πρόβλημα. Αποδείξτε την ορθότητά του και βρείτε τη χρονική του πολυπλοκότητα.

Άσκηση 2: Θέσεις Στάθμευσης (2 μον.)

Έχουμε N αυτοκίνητα που θέλουν να παρκάρουν κατά μήκος του διαστήματος $(0, L]$ (σκεφτόμαστε το διάστημα $(0, L]$ ως μια ευθεία οδό μήκους L όπου τα αυτοκίνητα παρκάρουν μόνο στη μία πλευρά). Κάθε αυτοκίνητο i χαρακτηρίζεται από μια τριάδα $C_i = (v_i, d_i, s_i)$ θετικών ακεραίων, όπου το v_i δηλώνει αξία, το d_i μέγιστη απόσταση από το 0 και το s_i το μήκος του αυτοκινήτου.

Το αυτοκίνητο i προσφέρει v_i ευρώ για να παρκάρει σε διάστημα $(t, t + s_i]$ μήκους s_i με $t + s_i \leq d_i$ (χβτγ. θεωρούμε πως η αρχή κάθε διαστήματος είναι ακέραιος). Δηλαδή, το αυτοκίνητο i δέχεται να παρκάρει (και προσφέρει v_i ευρώ) μόνο σε διάστημα μήκους s_i που το τέλος του δεν ξεπερνά το σημείο d_i . Το αυτοκίνητο i δεν

δέχεται να παρκάρει σε διάστημα που έχει μήκος μικρότερο από s_i ή τελειώνει μετά το d_i . Το ζητούμενο είναι να επιλέξουμε ποια αυτοκίνητα θα παρκάρουν και σε ποια διαστήματα, έτσι ώστε (ι) σε κάθε σημείο του $(0, L]$ να παρκάρει το πολύ ένα αυτοκίνητο, και (ii) να μεγιστοποιηθεί η συνολική αξία των αυτοκινήτων που παρκάρουν σύμφωνα με τις επιθυμίες τους.

Παράδειγμα: Θεωρούμε το διάστημα $(0, 4]$ και 4 αυτοκίνητα $C_1 = (1, 3, 1)$, $C_2 = (2, 2, 2)$, $C_3 = (1, 4, 1)$ και $C_4 = (1, 4, 2)$ (υπενθυμίζουμε ότι κάθε τριάδα δίνει (αξία, μέγιστη απόσταση, μήκος)). Η βέλτιστη λύση έχει συνολική αξία $2 + 1 + 1 = 4$, και προκύπτει αν το C_2 παρκάρει στο διάστημα $(0, 2]$, το C_1 στο διάστημα $(2, 3]$ και το C_3 στο διάστημα $(3, 4]$ (το C_4 δεν έχει χώρο να παρκάρει στη βέλτιστη λύση). $\square$

Να διατυπώσετε αποδοτικούς αλγόριθμους για αυτό το πρόβλημα, και να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα των αλγορίθμων σας, σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

1. Έχουμε $s_i = 1$ για κάθε αυτοκίνητο i (τα v_i και d_i είναι θετικοί ακέραιοι χωρίς περιορισμούς). Θεωρούμε δηλαδή την ειδική περίπτωση όπου τα αυτοκίνητα έχουν μοναδιαίο μήκος και αντιμετωπίζουμε το διάστημα $(0, L]$ ως σύνολο L διαθέσιμων θέσεων, με την ℓ -οστή θέση, $\ell = 1, \dots, L$, να αντιστοιχεί στο διάστημα $(\ell - 1, \ell]$. Το αυτοκίνητο i συνεισφέρει αξία v_i αν παρκάρει στη θέση $\ell \leq d_i$, και αξία 0 διαφορετικά.
2. Θεωρούμε τη γενική περίπτωση όπου τα v_i , d_i και s_i είναι θετικοί ακέραιοι χωρίς περιορισμούς.

Άσκηση 3: Διαγωνισμός Χορού (2 μον.)

(α) Πρόκειται να λάβετε μέρος σε έναν διαγωνισμό χορού! Αύριο είναι η μεγάλη μέρα! Γνωρίζετε τη λίστα με τα n κομμάτια του διαγωνισμού και τη σειρά με την οποία θα παιχτούν. Έχετε κάνει διεξοδική έρευνα και γνωρίζετε τους κριτές και τις ικανότητές σας, σε βαθμό που να μπορείτε να προβλέψετε με ακρίβεια τη βαθμολογία $\text{score}(i)$ που θα λάβετε αν χορέψετε το i -οστό κομμάτι της λίστας. Δυστυχώς, μετά από κάθε κομμάτι i , χρειάζεστε χρόνο να ξεκουραστείτε. Έτσι, αν χορέψετε το κομμάτι i , δεν μπορείτε να χορέψετε τα επόμενα $\text{rest}(i)$ κομμάτια, δηλ. τα κομμάτια $i + 1, \dots, i + \text{rest}(i)$. Δεν υπάρχει άλλος περιορισμός στο πλήθος των κομματιών που μπορείτε να χορέψετε. Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει τη μέγιστη συνολική βαθμολογία που μπορείτε να επιτύχετε. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

(β) Λίγες ώρες πριν αρχίσει ο διαγωνισμός, συνειδητοποιείτε ότι για κάθε κομμάτι θα πρέπει να φοράτε διαφορετικά ρούχα! Έτσι, πριν από κάθε κομμάτι, θα χρειαστείτε χρόνο προετοιμασίας. Προκειμένου λοιπόν να χορέψετε το i -οστό κομμάτι, θα πρέπει να μην έχετε χορέψει τα προηγούμενα $\text{prep}(i)$ κομμάτια, δηλ. τα κομμάτια $i - \text{prep}(i), \dots, i - 1$, ώστε να προετοιμαστείτε κατάλληλα. Ευτυχώς, καθώς προετοιμάζεστε, ξεκουράζεστε και από το προηγούμενό σας κομμάτι, δηλαδή οι χρόνοι ξεκούρασης και προετοιμασίας μπορεί να επικαλύπτονται. Με τα νέα δεδομένα, πρέπει να βρείτε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει τη μέγιστη συνολική βαθμολογία που μπορείτε να επιτύχετε. Για την ανάλυση της υπολογιστικής πολυπλοκότητας, μπορείτε να θεωρήσετε ότι ο μέγιστος χρόνος προετοιμασίας και ο μέγιστος χρόνος ξεκούρασης δεν ξεπερνούν το M .

Άσκηση 4: Βγάζοντας Βόλτα το Σκύλο (1.5 μον.)

Ενδιαφέρεστε να αγοράσετε καινούριο λουρί για να βγάζετε βόλτα το σκύλο σας και θέλετε να υπολογίσετε το μήκος του λουριού που θα αγοράσετε (το σχέδιο το έχετε ήδη αποφασίσει). Έχοντας βγάλει πολλές φορές το σκύλο σας βόλτα, ξέρετε ότι εσείς βαδίζετε σε μία πολυγωνική καμπύλη που διέρχεται από τα σημεία $p_1, \dots, p_n$, και ο σκύλος σας βαδίζει σε μία αντίστοιχη πολυγωνική καμπύλη που διέρχεται από τα σημεία $q_1, \dots, q_m$, καθώς τον κρατάτε από το λουρί. Υποθέτουμε πως τα βήματά σας αντιστοιχούν ακριβώς στα n (m , αντίστοιχα, για το σκύλο) σημεία των καμπύλων και επομένως κάθε χρονική στιγμή βρίσκεστε σε κάποιο από τα σημεία $p_1, \dots, p_n$ ($q_1, \dots, q_m$, αντίστοιχα, για το σκύλο). Τόσο εσείς όσο και ο σκύλος σας μπορείτε να σταματήσετε σε οποιοδήποτε σημείο της καμπύλης, για όσο χρόνο χρειαστεί, αλλά ποτέ δεν γυρίζετε σε προηγούμενο σημείο της καμπύλης σας. Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει το ελάχιστο μήκος λουριού που επαρκεί για την καθημερινή βόλτα του σκύλου. Μπορείτε να θεωρήσετε δεδομένη μία συνάρτηση d που υπολογίζει

σε σταθερό χρόνο την απόσταση $d(p, q)$ μεταξύ ενός σημείου p στη δική σας διαδρομή και ενός σημείου q στη διαδρομή του σκύλου. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας. *Παράδειγμα:* Έστω ότι $n = 2$ και $m = 3$ και ότι οι αποστάσεις κάθε ζεύγους σημείων είναι: $d(p_1, q_1) = 1$, $d(p_1, q_2) = 2$, $d(p_1, q_3) = 3$, $d(p_2, q_1) = 2.5$, $d(p_2, q_2) = 2.2$, $d(p_2, q_3) = 1.8$. Το ελάχιστο μήκος λουριού που θα χρειαστείτε έχει μήκος 2. Μία βέλτιστη διάσχιση των καμπυλών P και Q είναι η εξής: Ξεκινάτε και οι δύο από τα σημεία p_1 και q_1 αντίστοιχα. Την επόμενη χρονική στιγμή, ο σκύλος προχωρά στο q_2 ενώ εσείς μένετε στο p_1 . Τέλος, μετακινείστε και οι δύο στα τελικά σημεία σας, p_2 και q_3 αντίστοιχα.

Σημείωση: Μια διαφορετική (και ευρύτερα χρησιμοποιούμενη) απόσταση μεταξύ πολυγωνικών καμπυλών και χρονοσειρών είναι η Dynamic Time Warping (DTW, https://en.wikipedia.org/wiki/Dynamic_time_warping), η οποία υπολογίζεται σε χρόνο $\Theta(nm)$ παρόμοια με το Edit Distance δύο συμβολοσειρών μήκους n και m .

Άσκηση 5: Ταξίδι σε Περίοδο Ενεργειακής Κρίσης (2 μον.)

Ταξιδεύετε από την πόλη s στην πόλη t μέσω οδικού δικτύου που περιγράφεται από κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ (με $s, t \in V$) με n κορυφές και m ακμές. Υπό κανονικές συνθήκες, θα ακολουθούσατε τη συντομότερη $s - t$ διαδρομή. Αλλά με τις τιμές της βενζίνης στα ύψη, έχετε αποφασίσει να ακολουθήσετε την *οικονομικότερη* διαδρομή, με βάση την τιμή της βενζίνης στις πόλεις κατά μήκος της διαδρομής σας. Το ντεπόζιτο του αυτοκινήτου σας χωράει μέχρι B λίτρα βενζίνης. Για κάθε ακμή $e \in E$, έχετε υπολογίσει με ακρίβεια την ποσότητα βενζίνης $b(e) \in \mathbb{N}$ (σε λίτρα) που απαιτείται για να διασχίσετε την e με το αυτοκίνητό σας. Έχετε ακόμη καταγράψει την τιμή $c(v)$ (σε ευρώ / λίτρο) της βενζίνης σε κάθε πόλη $v \in V$ (μπορείτε να ανεφοδιαστείτε μόνο στις πόλεις / κορυφές του οδικού δικτύου). Υποθέτοντας ότι ξεκινάτε με άδειο ντεπόζιτο από την s (οπότε αναγκαστικά θα αγοράσετε μια ποσότητα βενζίνης στην s), ότι θέλετε να καταλήξετε με άδειο ντεπόζιτο στην t , και ότι πρέπει πάντα η ποσότητα της βενζίνης στο ντεπόζιτό σας να κυμαίνεται μεταξύ 0 και B , θέλετε να υπολογίσετε τη διαδρομή (και το αντίστοιχο πλάνο ανεφοδιασμού) που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος για να ταξιδέψετε από την s στην t .

Για τις παρακάτω δύο περιπτώσεις, να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα των αλγορίθμων που θα διατυπώσετε.

1. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο για τον υπολογισμό του πιο οικονομικού πλάνου ανεφοδιασμού όταν το G είναι ένα $s - t$ μονοπάτι $(s, v_2, \dots, v_{n-1}, t)$ με n κορυφές.
2. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο για τον υπολογισμό της πιο οικονομικής $s - t$ διαδρομής (και του αντίστοιχου πλάνου ανεφοδιασμού), για τη γενική περίπτωση, όπου το G μπορεί να είναι οποιοδήποτε κατευθυνόμενο γράφημα.

Άσκηση 6: Προσεγγίσεις του Προβλήματος Σακιδίου (bonus, 2 μον.)

Σε αυτό το ερώτημα θα αναπτύξουμε αλγόριθμους πολυωνυμικού χρόνου που προσεγγίζουν ικανοποιητικά τη βέλτιστη λύση του Προβλήματος Σακιδίου. Θεωρούμε στιγμιότυπο του (Διακριτού) Προβλήματος Σακιδίου (Discrete Knapsack) με σακίδιο μεγέθους B και n αντικείμενα, όπου κάθε αντικείμενο i έχει μέγεθος $s_i \in \mathbb{N}^*$, με $s_i \leq B$, και αξία $p_i \in \mathbb{N}^*$. Συμβολίζουμε με $p_{\max} = \max_i \{p_i\}$ τη μέγιστη αξία ενός αντικειμένου.

(α) Θεωρούμε τον αλγόριθμο που επιλέγει την καλύτερη από τις παρακάτω λύσεις: (i) ένα αντικείμενο με αξία $p_{\max}$, και (ii) την άπληστη λύση, όπου εξετάζουμε τα αντικείμενα σε φθίνουσα σειρά p_i/s_i και συμπεριλαμβάνουμε στο σακίδιο κάθε αντικείμενο με μέγεθος που δεν ξεπερνά την υπολειπόμενη χωρητικότητα του σακιδίου. Να δείξετε ότι αυτός ο αλγόριθμος επιτυγχάνει τουλάχιστον το $\frac{1}{2}$ της αξίας της βέλτιστης λύσης.

(β) Για σταθερό $k \geq 2$, θεωρούμε τον αλγόριθμο που επιλέγει την καλύτερη από τις παρακάτω λύσεις: (i) τη μέγιστη αξία που μπορούμε να επιτύχουμε συμπεριλαμβάνοντας το πολύ k αντικείμενα στο σακίδιο (μπορεί να

υπολογισθεί σε χρόνο $O(kn^k)$ με εξαντλητική αναζήτηση), και (ii) την άπληστη λύση (όπως στο (α)). Να δείξετε ότι αυτός ο αλγόριθμος επιτυγχάνει τουλάχιστον το $\frac{k-1}{k}$ της αξίας της βέλτιστης λύσης.

(γ) Να δείξετε πως (με χρήση δυναμικού προγραμματισμού) μπορούμε να υπολογίσουμε το ελάχιστο μέγεθος σακιδίου που χρειαζόμαστε για συνολική αξία τουλάχιστον P από τα πρώτα i αντικείμενα (ας συμβολίσουμε αυτή την ποσότητα με $B(i, P)$). Ποια είναι η υπολογιστική πολυπλοκότητα για τον υπολογισμό της βέλτιστης λύσης σε αυτή την περίπτωση;

(δ) Έστω σταθερά $\epsilon > 0$ και $d = \epsilon p_{\max}/n$. Θέτουμε $\hat{p}_i = \lfloor p_i/d \rfloor$, και εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο του (γ) για μέγεθος σακιδίου B , μεγέθη αντικειμένων s_i και αξίες αντικειμένων $\hat{p}_i$. Ποια είναι η υπολογιστική πολυπλοκότητα του τροποποιημένου αλγόριθμου; Να δείξετε ότι η συνολική αξία (με βάση τα αρχικά p_i) της λύσης που υπολογίζει ο τροποποιημένος αλγόριθμος είναι τουλάχιστον $(1 - \epsilon)P^*$, όπου P^* η συνολική αξία μιας βέλτιστης λύσης για το αρχικό στιγμιότυπο.