Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα
Διδάσκοντες: Α. Παγουρτζής, Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου
1η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 14/11/2024

Άσκηση 1: Υπολογισμός Κυρίαρχων Θέσεων (1.0 μον.)

Θεωρούμε πίνακα $A[1 \dots n]$ με n φυσικούς αριθμούς. Για κάθε $i = 2, \dots, n$, η θέση που *κυριαρχεί* της θέσης i στον πίνακα A είναι η πλησιέστερη θέση που προηγείται της i και η τιμή της ξεπερνά την τιμή $A[i]$. Τυπικά, θεωρώντας ότι $A[0] = \infty$, η θέση που *κυριαρχεί* της θέσης i στον A είναι η μέγιστη θέση j, $0 \leq j < i$, για την οποία ισχύει $A[j] > A[i]$ (βλ. ότι η θέση που κυριαρχεί της 1 είναι η 0). Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει τη θέση που κυριαρχεί της θέσης i, για κάθε $i = 1, \dots, n$, στον πίνακα $A[1 \dots n]$. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

Άσκηση 2: Επιλογή (2.2 μον.)

(α) Έστω πολυσύνολο (multiset) S με n θετικούς ακέραιους που όλοι είναι μικρότεροι ή ίσοι δεδομένου ακεραίου M. Έχουμε πρόσβαση (μόνο) στην κατανομή F_S των στοιχείων της συλλογής. Συγκεκριμένα, έχουμε στη διάθεσή μας συνάρτηση $F_S(\ell)$ που για κάθε φυσικό ℓ, επιστρέφει το πλήθος των στοιχείων του S που δεν ξεπερνούν το ℓ, δηλ. $F_S(\ell) = \big|\{x \in S : x \leq \ell\}\big|$. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που δέχεται ως είσοδο φυσικό k, $1 \leq k \leq n$, και υπολογίζει (καλώντας την F_S) το k-οστό μικρότερο στοιχείο του S. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα του αλγορίθμου σας και να προσδιορίσετε το πλήθος των απαιτούμενων κλήσεων στην F_S (στη χειρότερη περίπτωση). Προσπαθήστε το πλήθος των κλήσεων στην F_S να μην εξαρτάται από το n (μπορεί όμως να εξαρτάται από το M).

(β) Έστω πίνακας διαφορετικών θετικών ακεραίων $A[1 \dots n]$ και έστω M το μέγιστο στοιχείο του A. Θεωρούμε το πολυσύνολο S που αποτελείται από όλες τις μη αρνητικές διαφορές ζευγών στοιχείων του A. Δηλαδή, έχουμε:

$$S = \big\{A[i] - A[j] : i \neq j \text{ και } A[i] > A[j]\big\}$$

Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει το k-οστό μικρότερο στοιχείο του S. Να προσδιορίσετε την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας (συναρτήσει των n και M) και να αιτιολογήσετε την ορθότητά του. *Υπόδειξη:* Υλοποιείστε αποδοτικά την F_S και χρησιμοποιείστε τον αλγόριθμο του (α).

Άσκηση 3: Άθροισμα Στοιχείων Υποσυνόλων και Υπακολουθιών (2.3 μον.)

(α) Θεωρούμε σύνολο $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ με $n \geq 3$ θετικούς ακέραιους. Για δεδομένους ακεραίους $B \geq 1$ και $k \geq 1$, θέλουμε να υπολογίσουμε το πλήθος των υποσυνόλων $A \subseteq S$ με $|A| \leq k$ στοιχεία και άθροισμα στοιχείων ίσο με B, δηλαδή $\sum_{s_i \in A} s_i = B$. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο για αυτό το πρόβλημα, και να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική του πολυπλοκότητα. Είναι ο αλγόριθμος που προτείνατε πολυωνυμικού χρόνου (εξηγήστε);

(β) Θεωρούμε ακολουθία $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ αποτελούμενη από $n \geq 3$ θετικούς ακεραίους αριθμούς. Για δεδομένο ακέραιο k, $1 \leq k \leq n-1$, θέλουμε να υπολογίσουμε μια k-σχεδόν γνησίως αύξουσα υπακολουθία της α, τα στοιχεία της οποίας επιτυγχάνουν μέγιστο συνολικό άθροισμα (μεταξύ όλων των k-σχεδόν γνησίως αυξουσών υπακολουθιών της α). Μια (υπακ)ακολουθία $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ είναι k-σχεδόν γνησίως αύξουσα αν η ιδιότητα ότι η $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ είναι γνησίως αύξουσα "διακόπτεται" σε k σημεία το πολύ, δηλ. αν υπάρχουν k δείκτες

$\{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n-1\}$ ώστε να ισχύει ότι για κάθε $i \in \{1, \ldots, n-1\} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}$, $\beta_i < \beta_{i+1}$. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο για αυτό το πρόβλημα. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

Παράδειγμα: Θεωρούμε την ακολουθία $(2, 15, 4, 6, 6, 14, 2)$ με $n = 7$. Μια 1-σχεδόν γνησίως αύξουσα υπακολουθία της με μέγιστο συνολικό άθροισμα στοιχείων είναι η $(2, 15, 4, 6, 14)$, με άθροισμα στοιχείων 41. Μια 2-σχεδόν γνησίως αύξουσα υπακολουθία με μέγιστο συνολικό άθροισμα στοιχείων είναι η $(2, 15, 4, 6, 6, 14)$, με άθροισμα στοιχείων 47.

Άσκηση 4: Μη Επικαλυπτόμενα Διαστήματα Μέγιστου Συνολικού Μήκους (2.2 μον.)

Θεωρούμε n διαστήματα $[s_1, f_1), \ldots, [s_n, f_n)$ στην ευθεία των φυσικών αριθμών (έχουμε λοιπόν ότι $s_i, f_i \in \mathbb{N}$ και $s_i < f_i$, για κάθε $1 \leq i \leq n$). Θέλουμε να επιλέξουμε κάποια από αυτά τα n διαστήματα, ώστε τα επιλεγμένα διαστήματα να μην επικαλύπτονται μεταξύ τους και να έχουν μέγιστο συνολικό μήκος. Το μήκος ενός διαστήματος $[s_i, f_i)$ είναι ίσο με $f_i - s_i$.

1. Να δείξετε, μέσω αντιπαραδείγματος, ότι ο άπληστος αλγόριθμος που επιλέγει, σε κάθε επανάληψη, το διαθέσιμο διάστημα $[s_i, f_i)$ με μέγιστο μήκος $f_i - s_i$ δεν οδηγεί απαραίτητα στη βέλτιστη λύση. Να επαναλάβετε για τον άπληστο αλγόριθμο που επιλέγει το διαθέσιμο διάστημα $[s_i, f_i)$ με ελάχιστο χρόνο ολοκλήρωσης f_i.
2. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο για το πρόβλημα της επιλογής μη επικαλυπτόμενων διαστημάτων με μέγιστο συνολικό μήκος. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

Παράδειγμα: Θεωρούμε $n = 5$ διαστήματα $[1, 3), [2, 6), [4, 7), [5, 8), [7, 8)$. Κάποιες εφικτές λύσεις (δηλ. επιλογές διαστημάτων που δεν επικαλύπτονται μεταξύ τους) είναι οι $([1, 3], [5, 8))$ και $([2, 6], [7, 8))$, με συνολικό μήκος επιλεγμένων διαστημάτων 5, και η $([1, 3), [4, 7), [7, 8))$, με συνολικό μήκος επιλεγμένων διαστημάτων 6. Η τελευταία συλλογή αποτελεί και την βέλτιστη λύση για το συγκεκριμένο στιγμιότυπο.

Άσκηση 5: Θέσεις Στάθμευσης (2.3 μον.)

Έχουμε N αυτοκίνητα που θέλουν να παρκάρουν κατά μήκος του διαστήματος $(0, L]$ (σκεφτόμαστε το διάστημα $(0, L]$ ως μια ευθεία οδό μήκους L όπου τα αυτοκίνητα παρκάρουν μόνο στη μία πλευρά). Κάθε αυτοκίνητο i χαρακτηρίζεται από μια τριάδα $C_i = (v_i, d_i, s_i)$ θετικών ακεραίων, όπου το v_i δηλώνει αξία, το d_i μέγιστη απόσταση από το 0 και το s_i το μήκος του αυτοκινήτου.

Το αυτοκίνητο i προσφέρει v_i ευρώ για να παρκάρει σε διάστημα $(t, t + s_i]$ μήκους s_i με $t + s_i \leq d_i$ (χβτγ. θεωρούμε πως η αρχή κάθε διαστήματος είναι ακέραιος). Δηλαδή, το αυτοκίνητο i δέχεται να παρκάρει (και προσφέρει v_i ευρώ) μόνο σε διάστημα μήκους s_i που το τέλος του δεν ξεπερνά το σημείο d_i. Το αυτοκίνητο i δεν δέχεται να παρκάρει σε διάστημα που έχει μήκος μικρότερο από s_i ή τελειώνει μετά το d_i. Το ζητούμενο είναι να επιλέξουμε ποια αυτοκίνητα θα παρκάρουν και σε ποια διαστήματα, έτσι ώστε (ι) σε κάθε σημείο του $(0, L]$ να παρκάρει το πολύ ένα αυτοκίνητο, και (ιι) να μεγιστοποιηθεί η συνολική αξία των αυτοκινήτων που παρκάρουν σύμφωνα με τις επιθυμίες τους.

Παράδειγμα: Θεωρούμε το διάστημα $(0, 4]$ και 4 αυτοκίνητα $C_1 = (1, 3, 1)$, $C_2 = (2, 2, 2)$, $C_3 = (1, 4, 1)$ και $C_4 = (1, 4, 2)$ (υπενθυμίζουμε ότι κάθε τριάδα δίνει (αξία, μέγιστη απόσταση, μήκος)). Η βέλτιστη λύση έχει συνολική αξία $2 + 1 + 1 = 4$, και προκύπτει αν το C_2 παρκάρει στο διάστημα $(0, 2]$, το C_1 στο διάστημα $(2, 3]$ και το C_3 στο διάστημα $(3, 4]$ (το C_4 δεν έχει χώρο να παρκάρει στη βέλτιστη λύση). $\square$

Να διατυπώσετε αποδοτικούς αλγόριθμους για αυτό το πρόβλημα, και να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα των αλγορίθμων σας, σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

1. Έχουμε $s_i = 1$ για κάθε αυτοκίνητο i (τα v_i και d_i είναι θετικοί ακέραιοι χωρίς περιορισμούς). Θεωρούμε δηλαδή την ειδική περίπτωση όπου τα αυτοκίνητα έχουν μοναδιαίο μήκος και αντιμετωπίζουμε το διάστημα $(0, L]$ ως σύνολο L διαθέσιμων θέσεων, με την ℓ-οστή θέση, $\ell = 1, \ldots, L$, να αντιστοιχεί στο διάστημα $(\ell - 1, \ell]$. Το αυτοκίνητο i συνεισφέρει αξία v_i αν παρκάρει στη θέση $\ell \leq d_i$, και αξία 0 διαφορετικά.
2. Θεωρούμε τη γενική περίπτωση όπου τα v_i, d_i και s_i είναι θετικοί ακέραιοι χωρίς περιορισμούς.