Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα
Διδάσκοντες: Α. Παγουρτζής, Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου, Π. Γροντάς
1η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 6/11/2023

Άσκηση 1: Πλησιέστερο Ζεύγος Σημείων (2.4 μον.)

Θεωρούμε το πρόβλημα του πλησιέστερου ζεύγους σημείων στις 3 διαστάσεις, όπου δίνονται οι συντεταγμένες n σημείων $(x_1, y_1, z_1), \ldots, (x_n, y_n, z_n)$ στον τρισδιάστατο χώρο, και ζητείται η ελάχιστη (Ευκλείδεια) απόσταση δ^* μεταξύ ενός ζεύγους από αυτά.

(α) Γενικεύοντας τον αλγόριθμο για τις 2 διαστάσεις που είδαμε στο μάθημα, να διατυπώσετε αλγόριθμο διαίρει-και-βασίλευε για το πρόβλημα του πλησιέστερου ζεύγους σημείων στις 3 διαστάσεις. Να διατυπώσετε αναλυτικά τον αλγόριθμό σας, και να αναλύσετε προσεκτικά την ορθότητα και την υπολογιστική του πολυπλοκότητα.

(β) Υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε μια ικανοποιητική προσέγγιση του δ^*. Ειδικότερα, υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε τιμές $\ell > 0$ και $c > 1$ τέτοιες ώστε $\delta^* \in [\ell, c\ell]$. Να διατυπώσετε αλγόριθμο με χρόνο εκτέλεσης γραμμικό στο n (ο χρόνος εκτέλεσης μπορεί να εξαρτάται από το c και από τη διάσταση του Ευκλείδειου χώρου). Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας, και να γενικεύσετε τον αλγόριθμο και την ανάλυση για τον υπολογισμό του πλησιέστερου ζεύγους σημείων σε $d \geq 2$ διαστάσεις.

Άσκηση 2: Πόρτες Ασφαλείας στο Κάστρο (1.4 μον.)

Με την άφιξή σας στο Schloss Neuschwanstein για το ονειρεμένο τριήμερο που σχεδιάζατε, έρχεστε αντιμέτωποι με μια δυσάρεστη έκπληξη: ξεχάσατε στην Αθήνα τον χάρτη με την αντιστοίχιση των ηλεκτρονικών διακοπτών στις πόρτες ασφαλείας του κάστρου! Το κάστρο έχει n πόρτες ασφαλείας, αριθμημένες από 1 μέχρι n, κατά μήκος ενός μεγάλου διαδρόμου, και n ηλεκτρονικούς διακόπτες στην είσοδο, επίσης αριθμημένους από 1 μέχρι n, που καθένας ανοίγει μία από αυτές τις πόρτες. Κάθε διακόπτης έχει δύο θέσεις on και off, η μία διατηρεί την αντίστοιχη πόρτα ανοικτή και η άλλη κλειστή (αλλά δεν γνωρίζετε ποια θέση κάνει τι). Για λόγους ασφαλείας, κάθε εβδομάδα επιλέγεται μια τυχαία αντιστοίχιση των διακοπτών στις πόρτες. Επιλέγεται ακόμη με τυχαίο τρόπο για κάθε διακόπτη η θέση που διατηρεί την αντίστοιχη πόρτα ανοικτή. Αυτή η πληροφορία δίνεται στους επισκέπτες του κάστρου στον χάρτη που έμεινε στην Αθήνα.

Πρέπει λοιπόν να ανακατασκευάσετε τον χάρτη, δοκιμάζοντας διαφορετικές διαμορφώσεις για τους διακόπτες (κάθε διαμόρφωση αντιστοιχεί σε μια δυαδική συμβολοσειρά μήκους n). Για κάθε διαμόρφωση των διακοπτών, μπορείτε να περπατήσετε στον διάδρομο μέχρι την πρώτη πόρτα που παραμένει κλειστή (προφανώς δεν μπορείτε να ξέρετε τι συμβαίνει πίσω από κλειστές πόρτες). Οπότε η μόνη πληροφορία που έχετε στη διάθεσή σας για κάθε διαμόρφωση είναι ποια είναι η πρώτη πόρτα στο διάδρομο που παραμένει κλειστή.

Να διατυπώσετε μια αποδοτική διαδικασία αναζήτησης που υπολογίζει ποιος διακόπτης αντιστοιχεί σε ποια πόρτα και ποια θέση αυτού του διακόπτη διατηρεί την αντίστοιχη πόρτα ανοικτή. Οι φίλοι σας αμφιβάλουν ότι θα τα καταφέρετε και ρωτούν τι ώρα να επιστρέψουν από τη βόλτα τους στην κοντινή πόλη για να επιστρέψετε στην Αθήνα. Χρειάζεται λοιπόν να αιτιολογήσετε την ορθότητα της διαδικασίας αναζήτησης που προτείνατε και να υπολογίσετε πόσες διαμορφώσεις θα πρέπει να δοκιμάσετε (ως συνάρτηση του n).

Άσκηση 3: Κρυμμένος Θησαυρός (1.4 μον.)

Όταν οι εισβολείς της φυλής Heuristics αποχώρησαν νικημένοι από τη χώρα των Αλγορίθμων, δεν κατάφεραν να πάρουν μαζί τους κανένα λάφυρο. Τα έθαψαν όλα σε άγνωστη θέση x κατά μήκος της κεντρικής αρτηρίας της χώρας. Ο Πρόεδρος της χώρας σας ανέθεσε να φέρετε στο φως αυτόν τον σημαντικό θησαυρό. Για τον σκοπό αυτό, έχετε προμηθευτεί έναν ανιχνευτή μετάλλων που μπορεί να ανιχνεύσει τον θησαυρό, αν βρεθεί έστω και στιγμιαία πάνω από αυτόν.

Θεωρείτε ότι η κεντρική οδική αρτηρία της χώρας αντιστοιχεί στην ευθεία των ακεραίων αριθμών, και θα ξεκινήσετε την αναζήτησή σας από τη θέση 0. Η θέση x του κρυμμένου θησαυρού είναι άγνωστη και μπορεί να είναι οποιοσδήποτε αριθμός του $\mathbb{Z}$. Το μόνο που μπορείτε να κάνετε είναι να κινείστε, πέρα - δώθε, στην κεντρική αρτηρία, μέχρι να περάσετε πάνω από τη θέση x και ο ανιχνευτής σας να εντοπίσει τον θησαυρό. Για τον προγραμματισμό των κινήσεών σας, θέλετε να χρησιμοποιήσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που θα σας επιτρέψει να ανακαλύψετε τη θέση x διανύοντας απόσταση $O(|x|)$. Να διατυπώσετε έναν τέτοιο αλγόριθμο και να δείξετε ότι υπάρχει σταθερά c (για την οποία πρέπει να υπολογίσετε ένα, κατά το δυνατόν ακριβές, άνω φράγμα) έτσι ώστε ο αλγόριθμος σας να εξασφαλίζει ότι (στη χειρότερη περίπτωση) θα βρείτε τον θησαυρό μετά από $c\,|x|$ βήματα, το πολύ.

Άσκηση 4: Μη Επικαλυπτόμενα Διαστήματα Μέγιστου Συνολικού Μήκους (2.4 μον.)

Θεωρούμε n διαστήματα $[s_1, f_1), \ldots, [s_n, f_n)$ στην ευθεία των φυσικών αριθμών (έχουμε λοιπόν ότι $s_i, f_i \in \mathbb{N}$ και $s_i < f_i$, για κάθε $1 \leq i \leq n$). Θέλουμε να επιλέξουμε κάποια από αυτά τα n διαστήματα, ώστε τα επιλεγμένα διαστήματα να μην επικαλύπτονται μεταξύ τους και να έχουν μέγιστο συνολικό μήκος. Το μήκος ενός διαστήματος $[s_i, f_i)$ είναι ίσο με $f_i - s_i$.

1. Να δείξετε, μέσω αντιπαραδείγματος, ότι ο άπληστος αλγόριθμος που επιλέγει, σε κάθε επανάληψη, το διαθέσιμο διάστημα $[s_i, f_i)$ με μέγιστο μήκος $f_i - s_i$ δεν οδηγεί απαραίτητα στη βέλτιστη λύση. Να επαναλάβετε για τον άπληστο αλγόριθμο που επιλέγει το διαθέσιμο διάστημα $[s_i, f_i)$ με ελάχιστο χρόνο ολοκλήρωσης f_i.
2. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο για το πρόβλημα της επιλογής μη επικαλυπτόμενων διαστημάτων με μέγιστο συνολικό μήκος. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

Παράδειγμα: Θεωρούμε $n = 5$ διαστήματα $[1,3), [2,6), [4,7), [5,8), [7,8)$. Κάποιες εφικτές λύσεις (δηλ. επιλογές διαστημάτων που δεν επικαλύπτονται μεταξύ τους) είναι οι $([1,3], [5,8))$ και $([2,6], [7,8))$, με συνολικό μήκος επιλεγμένων διαστημάτων 5, και η $([1,3), [4,7), [7,8))$, με συνολικό μήκος επιλεγμένων διαστημάτων 6. Η τελευταία συλλογή αποτελεί και την βέλτιστη λύση για το συγκεκριμένο στιγμιότυπο.

Άσκηση 5: Παραλαβή Πακέτων (2.4 μον.)

Η περίοδος των εκπτώσεων ήταν πραγματικά θριαμβευτική για την επιχείρησή σας. Οι πωλήσεις ξεπέρασαν τις προσδοκίες σας και τώρα είναι η στιγμή που οι πελάτες σας θα παραλάβουν τα δέματά τους. Από το πρωί, έχουν μαζευτεί έξω από το κατάστημά σας n πελάτες που πρέπει να παραλάβουν τα δέματά τους. Η προετοιμασία του δέματος κάθε πελάτη i χρειάζεται χρόνο $p_i \in \mathbb{N}^*$, τον οποίο γνωρίζετε με ακρίβεια. Η πελατεία σας είναι σχετικά σταθερή, οπότε για κάθε πελάτη i έχετε εκτιμήσει ένα θετικό βάρος $w_i \in \mathbb{N}^*$, που ποσοτικοποιεί τη σημασία του i για την επιχείρησή σας.

Θέλετε να δρομολογήσετε την παραλαβή των δεμάτων ώστε να ελαχιστοποιηθεί ο συνολικός βεβαρυμένος χρόνος εξυπηρέτησης για τους πελάτες σας. Αν π.χ. έχουμε διαθέσιμο έναν μόνο υπάλληλο και 4 πελάτες, που εξυπηρετούνται με σειρά $(1, 2, 3, 4)$, ο συνολικός βεβαρυμένος χρόνος εξυπηρέτησης είναι:

$$\begin{aligned} w_1p_1 + &w_2(p_1 + p_2) + w_3(p_1 + p_2 + p_3) + w_4(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) = \\ &p_1(w_1 + w_2 + w_3 + w_4) + p_2(w_2 + w_3 + w_4) + p_3(w_3 + w_4) + p_4w_4 \,. \end{aligned}$$

Αν π.χ. έχουμε δύο υπαλλήλους, ο πρώτος εξυπηρετεί τους πελάτες 1 και 2 με σειρά $(1, 2)$, και ο δεύτερος εξυπηρετεί τους πελάτες 3 και 4 με σειρά $(4, 3)$, ο συνολικός βεβαρυμένος χρόνος εξυπηρέτησης είναι:

$$w_1p_1 + w_2(p_1 + p_2) + w_4p_4 + w_3(p_4 + p_3)\,.$$

1. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που δρομολογεί την παραλαβή των δεμάτων με στόχο την ελάχιστοποίηση του βεβαρυμένου χρόνου εξυπηρέτησης, αν έχουμε μόνο έναν υπάλληλο που προετοιμάζει τα δέματα και εξυπηρετεί τους πελάτες.
2. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο για το ίδιο πρόβλημα, αν έχουμε δύο υπαλλήλους στην εξυπηρέτηση. Να σκιαγραφήσετε τη γενίκευση του αλγορίθμου σας για την περίπτωση που έχουμε $m \geq 3$ υπαλλήλους.