Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Διακριτά Μαθηματικά

Διδάσκοντες: Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου

2η Γραπτή Εργασία, Ημ/νια Παράδοσης: 18/5/2026

Θέμα 1 (Αρχή του Περιστερώνα, 1.4 μον.). (α) Θεωρούμε μια ακολουθία n ακεραίων $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Χρησιμοποιώντας την Αρχή του Περιστερώνα, να δείξετε ότι υπάρχει ένα σύνολο διαδοχικών όρων $a_i, a_{i+1}, \ldots, a_j$ (όπου $1 \leq i \leq j \leq n$) των οποίων το άθροισμα $\sum_{k=i}^{j} a_k$ είναι διαιρετό από το n.

(β) Να δείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$, υπάρχει ένα πολλαπλάσιο του n που η αναπαράστασή του στο δεκαδικό του σύστημα αποτελείται μόνο από τα ψηφία 0 και 7. Να βρείτε τέτοια πολλαπλάσια για όλες τις τιμές του $n \in \{2, \ldots, 10\}$ και για όλες τις τιμές του n που είναι δυνάμεις του 2.

Θέμα 2 (Γραφήματα - Βασικές Έννοιες, 3.0(+0.6) μον.). Έστω $\mathcal{G}$ η κλάση των απλών μη κατευθυνόμενων γραφημάτων $G(V, E)$ που οι βαθμοί των κορυφών τους παίρνουν όλες τις τιμές στο σύνολο $\{1, \ldots, |V| - 1\}$. Τυπικά, η κλάση $\mathcal{G}$ ορίζεται ως εξής:

> Ένα απλό συνεκτικό γράφημα $G(V, E)$ με $|V| \geq 2$ κορυφές ανήκει στην κλάση $\mathcal{G}$ αν και μόνο αν έχει δύο μόνο κορυφές $u, u' \in V$ με ίδιο βαθμό $\deg_G(u) = \deg_G(u')$ (για $|V| \geq 3$, όλες οι υπόλοιπες κορυφές του G πρέπει να έχουν βαθμό διαφορετικό από τις u και u' και διαφορετικό μεταξύ τους).

1. Να δείξετε ότι κάθε γράφημα $G(V, E) \in \mathcal{G}$ με $|V| \geq 4$ κορυφές έχει μία μόνο κορυφή βαθμού 1 και μία μόνο κορυφή βαθμού $|V| - 1$. Με βάση αυτό, να διερευνήσετε αν υπάρχει αυτοσυμπληρωματικό γράφημα $G(V, E) \in \mathcal{G}$.
2. Να δείξετε ότι για κάθε γράφημα $G(V, E) \in \mathcal{G}$ με $|V| \geq 4$ κορυφές, το γράφημα G' που προκύπτει από το G με αφαίρεση των κορυφών βαθμού 1 και $|V| - 1$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{G}$.
3. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή στο πλήθος των κορυφών, να δείξετε ότι κάθε γράφημα $G \in \mathcal{G}$ έχει μονοπάτι Hamilton (δηλ. απλό μονοπάτι που διέρχεται μία φορά από κάθε κορυφή του γραφήματος).
4. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή στο πλήθος των κορυφών, να δείξετε ότι για κάθε γράφημα $G(V, E) \in \mathcal{G}$, ο κοινός βαθμός των δύο κορυφών $u, u' \in V$ είναι $\deg_G(u) = \deg_G(u') = \lfloor |V|/2 \rfloor$.
5. Να υπολογίσετε το πλήθος κορυφών (ως συνάρτηση του $|V|$) του μεγαλύτερου πλήρους υπογραφήματος και του μεγαλύτερου ανεξάρτητου συνόλου ενός γραφήματος $G(V, E) \in \mathcal{G}$, αν (ι) το $|V|$ είναι άρτιος, και (ιι) το $|V|$ είναι περιττός. Να αιτιολογήσετε κατάλληλα την απάντησή σας.
6. Να περιγράψετε τη μορφή που έχουν τα γραφήματα της κλάσης $\mathcal{G}$ για άρτιο και περιττό αριθμό κορυφών. Π.χ., να περιγράψετε τη μορφή των γραφημάτων της κλάσης $\mathcal{G}$ με 100 και με 101 κορυφές. Να προσδιορίσετε ακόμη τον χρωματικό αριθμό (ως συνάρτηση του $|V|$) κάθε $G(V, E) \in \mathcal{G}$.

Θέμα 3 (Διμερή Γραφήματα, Δέντρα, 1.6 μον.). (α) Έστω $G = (V, E)$ (απλό μη κατευθυνόμενο) συνεκτικό γράφημα. Επιλέγουμε αυθαίρετα μια κορυφή $r \in V$ και ορίζουμε, για κάθε κορυφή $v \in V$, την απόσταση $d(r, v)$ ως το μήκος του συντομότερου μονοπατιού από την r στη v. Να δείξετε ότι το G είναι διμερές αν και μόνο αν για κάθε ακμή $\{u, v\} \in E$, ισχύει ότι $|d(r, u) - d(r, v)| = 1$.

(β) Έστω $n \geq 2$ θετικοί ακέραιοι $d_1, \ldots, d_n$. Να δείξετε ότι $d_1 + \cdots + d_n = 2(n-1)$ αν και μόνο αν υπάρχει δέντρο T με n κορυφές και βαθμούς κορυφών $d_1, \ldots, d_n$.

Θέμα 4 (Κύκλωμα Euler, Κύκλος Hamilton, 2.0 μον.). (α) Να δείξετε ότι μπορούμε πάντα να προσανατολίσουμε όλες τις ακμές ενός μη-κατευθυνόμενου συνεκτικού γραφήματος G ώστε για κάθε κορυφή u, ο προς-τα-έσω βαθμός και ο προς-τα-έξω βαθμός της u να διαφέρουν το πολύ κατά 1. (0.8 μον.)

(β) Θεωρούμε την κλάση των απλών μη κατευθυνόμενων γραφημάτων με $n \geq 4$ κορυφές που έχουν κύκλο Hamilton και διατηρούν αυτή την ιδιότητα αν αφαιρεθεί οποιαδήποτε ακμή τους.

1. Έστω G αυθαίρετα επιλεγμένο γράφημα αυτής της κλάσης με $n \geq 4$ κορυφές. Να δείξετε ότι το G έχει τουλάχιστον $3n/2$ ακμές. (0.4 μον.)
2. Να δείξετε ότι για κάθε άρτιο $n \geq 6$, υπάρχει διμερές γράφημα με n κορυφές και $3n/2$ ακμές που ανήκει σε αυτή την κλάση γραφημάτων. (0.8 μον.)

Θέμα 5 (Επιπεδότητα, Χρωματικός Αριθμός, 2.0 μον.). (α) Για κάθε $n \geq 3$, ορίζουμε το απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα $G_n(V_n, E_n)$ με n κορυφές $V_n = \{v_1, \ldots, v_n\}$ και σύνολο ακμών $E_n = \{\{v_i, v_j\} : |i - j| \leq 3\}$ (δηλαδή δυο κορυφές v_i και v_j ενώνονται με ακμή στο G_n αν και μόνο αν οι δείκτες τους i και j διαφέρουν το πολύ κατά 3).

1. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή στο πλήθος των κορυφών, να δείξετε ότι για κάθε $n \geq 3$, το G_n είναι επίπεδο γράφημα. (0.6 μον.)
2. Πόσες ακμές και πόσες όψεις έχει το γράφημα G_n, ως συνάρτηση του n; Να δείξετε ότι για κάθε $n \geq 5$, το G_n είναι ένα μεγιστικά επίπεδο γράφημα (δηλ. η προσθήκη ακμής μεταξύ οποιωνδήποτε δύο κορυφών που δεν συνδέονται στο G_n οδηγεί αναγκαστικά σε ένα απλό γράφημα που δεν είναι επίπεδο). (0.6 μον.)

(β) Για κάθε φυσικό $n \geq 2$, ορίζουμε το απλό μη-κατευθυνόμενο γράφημα H_n με σύνολο κορυφών $V_n = \{0, 1, \ldots, 2n - 1\}$ και σύνολο ακμών

$$E_n = \big\{\{i, i+1\} : i \in \{0, 1, \ldots, 2n-2\}\big\} \cup \big\{\{2n-1, 0\}\big\} \cup \big\{\{i, i+n\} : i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\big\}$$

Να προσδιορίσετε τον χρωματικό αριθμό των γραφημάτων H_n για κάθε $n \geq 2$. (0.8 μον.)

Παράδοση. Οι εργασίες πρέπει να αναρτηθούν στο `helios.ntua.gr/mod/assign/view.php?id=23366` μέχρι τα μεσάνυχτα της Δευτέρας 18/5.

Καλή Επιτυχία!