Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Διακριτά Μαθηματικά

Διδάσκοντες: Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου

1η Γραπτή Εργασία, Ημ/νια Παράδοσης: 8/4/2026

Θέμα 1 (Διαδικασίες Απαρίθμησης, 0.7+0.7+0.8 μον.).

1. Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{F} = \{f \mid f : \mathbb{N} \to \{0,1\}\}$ όλων των λογικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού τους φυσικούς αριθμούς. Είναι το $\mathcal{F}$ αριθμήσιμο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
2. Να διερευνήσετε αν η επόμενη πρόταση είναι αληθής: "για κάθε λογική συνάρτηση $f \in \mathcal{F}$, υπάρχει C++ πρόγραμμα prog_f που υπολογίζει την f". Ένα τέτοιο πρόγραμμα prog_f θα πρέπει να δέχεται ως είσοδο έναν φυσικό αριθμό n και να παράγει ως έξοδο την τιμή $f(n)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
3. Ο κωδικός πρόσβασης ενός υπερυπολογιστή είναι ένας φυσικός αριθμός που αλλάζει κάθε δευτερόλεπτο, για λόγους ασφαλείας. Η αλλαγή γίνεται με βάση μια πολυωνυμική συνάρτηση $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ βαθμού d και έναν (πολυψήφιο) πρώτο αριθμό q. Αν ο κωδικός τη χρονική στιγμή t είναι x_t, ο κωδικός την επόμενη χρονική στιγμή είναι $x_{t+1} = p(x_t) \bmod q$. Ο αρχικός κωδικός x_0, οι συντελεστές $(a_d, a_{d-1}, \ldots, a_0)$ της πολυωνυμικής συνάρτησης p και ο πρώτος αριθμός q είναι γνωστά μόνο στον διαχειριστή του συστήματος. Γνωρίζετε όμως πόσα δευτερόλεπτα έχουν περάσει από το τελευταίο reset και έχετε εντοπίσει ένα κρίσιμο κενό ασφάλειας: αν δοκιμάζετε έναν κωδικό κάθε 30 (ή περισσότερα) δευτερόλεπτα, αυτό δεν πρόκειται πότε να προκαλέσει συναγερμό ή κλείδωμα του συστήματος (όσες φορές και αν αποτύχετε). Να διατυπώσετε μία αλγοριθμική μέθοδο που παράγει κωδικούς συστηματικά και εγγυάται ότι θα αποκτήσετε πρόσβαση στον υπερυπολογιστή σε πεπερασμένο χρόνο. Ποιος είναι ο λόγος που μπορούμε να εγγυηθούμε την ύπαρξη μιας τέτοιας αλγοριθμικής μεθόδου;

Θέμα 2 (Διαδικασίες Απαρίθμησης, 1.8 μον.). Έστω αλφάβητο Σ και πεπερασμένο σύνολο γλωσσών $\mathcal{L} = \{L_1, \ldots, L_n\}$ στο Σ. Θεωρούμε ότι κάθε γλώσσα $L_i \in \mathcal{L}$ αποτελείται από άπειρες συμβολοσειρές. Για κάθε γλώσσα L_i, δίνεται αλγόριθμος A_i που με είσοδο συμβολοσειρά $x \in \Sigma^*$, απαντάει $A_i(x) = 1$, αν $x \in L_i$, και $A_i(x) = 0$, διαφορετικά. Γνωρίζουμε ακόμη κατά πόσον $L_i \subset L_j$ για κάθε ζευγάρι γλωσσών με $1 \leq i, j \leq n$. Γνωρίζοντας όλα αυτά, η Αλίκη και ο Βασίλης αποφασίζουν να παίξουν το παρακάτω παιχνίδι:

- Η Αλίκη επιλέγει (κρυφά από τον Βασίλη) μια από τις γλώσσες του $\mathcal{L}$. Έστω $L_a \in \mathcal{L}$ η γλώσσα που επιλέγει η Αλίκη. Η Αλίκη υλοποιεί μια αυθαίρετη διαδικασία απαρίθμησης E_a των στοιχείων της L_a.
- Σε κάθε χρονική στιγμή $t = 0, 1, 2, \ldots$, η Αλίκη δίνει στο Βασίλη την επόμενη συμβολοσειρά x_t της L_a σύμφωνα με τη διαδικασία απαρίθμησης E_a που έχει υλοποιήσει (και η οποία δεν είναι γνωστή στον Βασίλη).
- Ο Βασίλης, βασιζόμενος στο σύνολο συμβολοσειρών $S_t = \{x_0, \ldots, x_t\}$ που έχει λάβει από την Αλίκη μέχρι τη στιγμή t, υπολογίζει μια γλώσσα $L_t \in \mathcal{L}$ και απαντάει στην Αλίκη με οποιαδήποτε συμβολοσειρά $y_t \in L_t \setminus S_t$. Θα λέμε ότι η επιλογή του Βασίλη είναι *επιτυχημένη* αν $y_t \in L_a$, και *αποτυχημένη* διαφορετικά. Η Αλίκη δεν ενημερώνει ποτέ τον Βασίλη για το αν η επιλογή του είναι επιτυχημένη ή αποτυχημένη.
- Ο Βασίλης κερδίζει το παιχνίδι αν και μόνο αν η στρατηγική του μπορεί να εγγυηθεί την ύπαρξη χρονικής στιγμής t^* τέτοιας ώστε όλες οι επιλογές του από τη στιγμή t^* και μετά είναι επιτυχημένες[1].

Να διατυπώσετε μια στρατηγική η οποία εγγυάται ότι ο Βασίλης κερδίζει το παιχνίδι (και να αποδείξετε ότι η στρατηγική σας εγγυάται νίκη του Βασίλη). Πως θα μπορούσε να γενικευθεί η στρατηγική σας για αριθμήσιμα άπειρο σύνολο γλωσσών $\mathcal{L}$; Αν είναι εφικτό, να γενικεύσετε τη στρατηγική σας και να εξηγήσετε γιατί εγγυάται νίκη του Βασίλη. Αν όχι, να εξηγήσετε (με τεχνικούς όρους) το σημείο που δυσκολεύει τη γενίκευση.

---

[1] Παρατηρούμε ότι ο Βασίλης μπορεί να μην μάθει ποτέ ποια είναι η στιγμή t^* μετά την οποία έχει μάθει να "μιλάει" σωστά τη γλώσσα που επέλεξε η Αλίκη. Επίσης μπορεί να μην μάθει ποτέ ποια είναι η γλώσσα L_a που επέλεξε η Αλίκη (και έμαθε να "μιλάει" σωστά). Αν όμως ακολουθήσει σωστή στρατηγική, ο Βασίλης μπορεί να είναι σίγουρος (και να αποδείξει στην Αλίκη) ότι κερδίζει το παιχνίδι.

Θέμα 3 (Κατηγορηματική Λογική, 2.5 μον.). (α) Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με μονομελή κατηγορηματικά σύμβολα M και I και διμελή κατηγορηματικά σύμβολα P και L. Ερμηνεύουμε αυτή τη γλώσσα στο σύμπαν που αποτελείται από την ένωση του συνόλου των μουσικών (βλ. π.χ., μαθητές ενός ωδείου) και του συνόλου των μουσικών οργάνων, με το $M(x)$ να δηλώνει ότι *"ο x είναι μουσικός"*, το $I(x)$ να δηλώνει ότι *"το x είναι μουσικό όργανο"*, το $P(x,y)$ να δηλώνει ότι *"ο (μουσικός) x παίζει το (όργανο) y"*, και το $L(x,y)$ να δηλώνει ότι *"ο (μουσικός) x συμπαθεί τον (μουσικό) y"* (για διευκόλυνση, μπορείτε να θεωρήσετε ότι η τελευταία σχέση είναι συμμετρική, δηλ. για κάθε ζευγάρι μουσικών x, y, $L(x,y)$ αν και μόνο αν $L(y,x)$). Σε αυτή την ερμηνεία, να γράψετε τύπους που δηλώνουν ότι:

1. Το ελάχιστο πλήθος οργάνων που παίζει κάποιος μουσικός είναι δύο.
2. Υπάρχουν δύο μουσικοί που δεν συμπαθεί ο ένας τον άλλο και υπάρχει όργανο που παίζουν και οι δύο.
3. Αν δύο μουσικοί παίζουν ακριβώς τα ίδια όργανα, τότε συμπαθεί ο ένας τον άλλο.
4. Υπάρχουν δύο μουσικοί που συμπαθεί ο ένας τον άλλο και υπάρχει ένα όργανο που παίζουν και οι δύο, αλλά δεν παίζουν ακριβώς τα ίδια όργανα.
5. Αν ένας μουσικός παίζει όλα τα όργανα, εκτός ίσως από ένα, τότε τον συμπαθούν όλοι οι άλλοι μουσικοί.

Θέμα 4 (Κατηγορηματική Λογική, 1.2+1.3 μον.). (α) Θεωρούμε τις παρακάτω προτάσεις:

$$\psi_1 = \forall x \neg P(x,x) \land \forall x \forall y \Big(x \neq y \to \big(P(x,y) \leftrightarrow \neg P(y,x) \big) \Big)$$
$$\psi_2 = \forall x \forall y \forall z \Big(P(x,y) \land P(y,z) \to P(x,z) \Big)$$
$$\psi_3 = \exists x \exists y \exists z \exists w \Big(P(x,y) \land P(y,z) \land P(z,w) \land P(w,x) \Big)$$

Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα. Οι απαντήσεις σας πρέπει να είναι αιτιολογημένες κατάλληλα.

1. Να δώσετε μια ερμηνεία σε σύμπαν 5 στοιχείων όπου αληθεύει η πρόταση $\psi_1 \land \psi_2$ (αν βοηθάει, μπορείτε να διατυπώσετε την ερμηνεία σας ως κατευθυνόμενο γράφημα)
2. Να περιγράψετε (σε απλή γλώσσα, χρησιμοποιώντας κατάλληλη ορολογία, και να αιτιολογήσετε) τη βασική ιδιότητα που πρέπει να έχει κάθε ερμηνεία σε πεπερασμένο σύμπαν όπου αληθεύει η πρόταση $\psi_1 \land \psi_2$.
3. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει ερμηνεία με πεπερασμένο σύμπαν όπου αληθεύει η πρόταση $\psi_1 \land \psi_2 \land \psi_3$ (αν βοηθάει, μπορείτε να επιχειρηματολογήσετε θεωρώντας κατευθυνόμενα γραφήματα).

(β) Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο Q. Έστω οι τύποι:

$$\psi_1 = \forall x Q(x,x) \land \forall x \forall y \forall z \big(Q(x,z) \to Q(x,y) \lor Q(y,z) \big)$$
$$\psi_2 = \forall x \forall y \big(Q(x,y) \lor Q(y,x) \big)$$
$$\psi_3 = \exists x \forall y Q(x,y)$$

1. Να δείξετε ότι ο τύπος $\psi_1 \to \psi_2$ είναι λογικά έγκυρος. (0.35 μον.)
2. Να δείξετε ότι ο τύπος $\psi_1 \to \psi_3$ δεν είναι λογικά έγκυρος. (0.35 μον.)
3. Να δείξετε ότι η πρόταση $\psi_1 \to \psi_3$ αληθεύει για οποιαδήποτε ερμηνεία του Q σε πεπερασμένο σύμπαν. Αν βοηθάει, σκεφθείτε κατευθυνόμενα γραφήματα, όπου το σύμπαν είναι οι κορυφές του γραφήματος και το $Q(x,y)$ δηλώνει την ύπαρξη ακμής από την κορυφή x προς την κορυφή y. (0.7 μον)

Θέμα 5 (Αναδρομικές Σχέσεις, 1.0 μον.). Έστω σύνολο θετικών φυσικών $X = \{w_1, \dots, w_n\}$. Για κάθε σύνολο $S \subseteq X$, συμβολίζουμε με $w(S) = \sum_{w_i \in S} w_i$ το άθροισμα των στοιχείων του S. Θεωρούμε συνάρτηση $C : \{1, \dots, n\} \times \{0, 1, \dots, w(X)\} \to \mathbb{N}$ που ορίζεται ως εξής: για κάθε $k \in \{1, \dots, n\}$ και κάθε $W \in \{0, 1, \dots, w(X)\}$, $C(k, W)$ είναι το πλήθος των υποσυνόλων $S \subseteq \{w_1, \dots, w_k\}$ με άθροισμα στοιχείων $w(S) = W$. Να διατυπώσετε αναδρομική σχέση για τον υπολογισμό όλων των τιμών $C(k, W)$ της C.

Παράδοση. Οι εργασίες πρέπει να αναρτηθούν στο `https://helios.ntua.gr/mod/assign/view.php?id=21485` μέχρι τα μεσάνυχτα της Μ. Τετάρτης 8 Απριλίου.

Καλή Επιτυχία!