

# Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού

---

Διδάσκοντες: **Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου**  
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών  
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

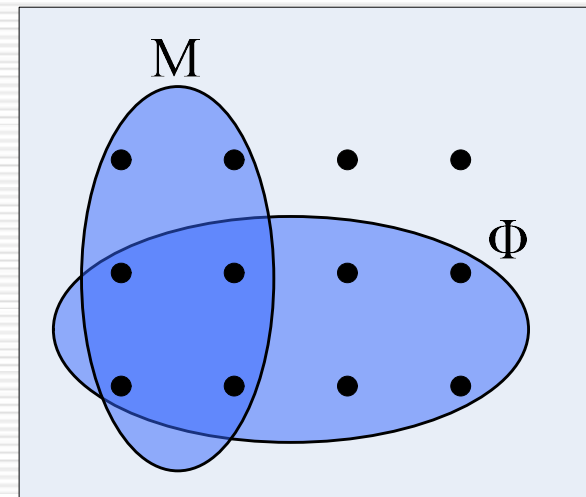


# Πληθικός Αριθμός Ένωσης

- Πληθικός αριθμός (πεπερασμένων) συνόλων που προκύπτουν από πράξεις (ένωση, τομή) συνόλων:
  - Π.χ.  $|A \cup B|$ ,  $|A \cap B|$ ,  $|A - B|$ ,  $|\bar{A}|$  σε σχέση με  $|A|$ ,  $|B|$ .
  - $|A \cup B| \leq |A| + |B|$ ,  $|A \cap B| \leq \min\{|A|, |B|\}$ ,  
 $|A - B| \geq |A| - |B|$ ,  $|\bar{A}| = |U| - |A|$ . Πότε ισχύουν ισότητες;
- Σύνολο 12 βιβλίων: 6 βιβλία μαθηματικά, 8 βιβλία φυσική, και 4 μαθηματικά και φυσική.
  - Πόσα μαθηματικά ή φυσική;  
Πόσα ούτε μαθηματικά ούτε φυσική;

$$|M \cup \Phi| = |M| + |\Phi| - |M \cap \Phi| = 6 + 8 - 4 = 10$$

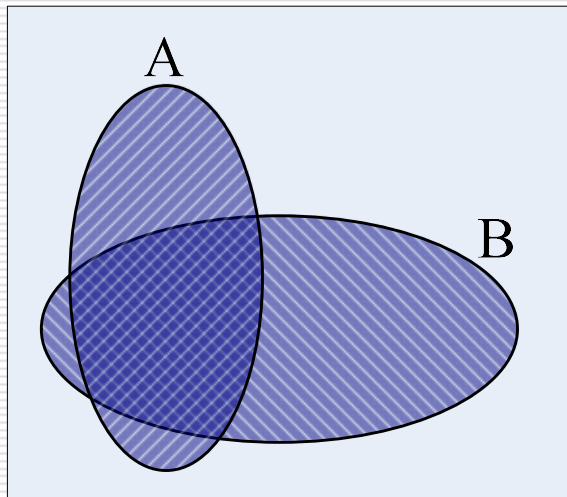
$$|\overline{M \cup \Phi}| = |U| - |M \cup \Phi| = 12 - 10 = 2$$



# Εγκλεισμός – Αποκλεισμός

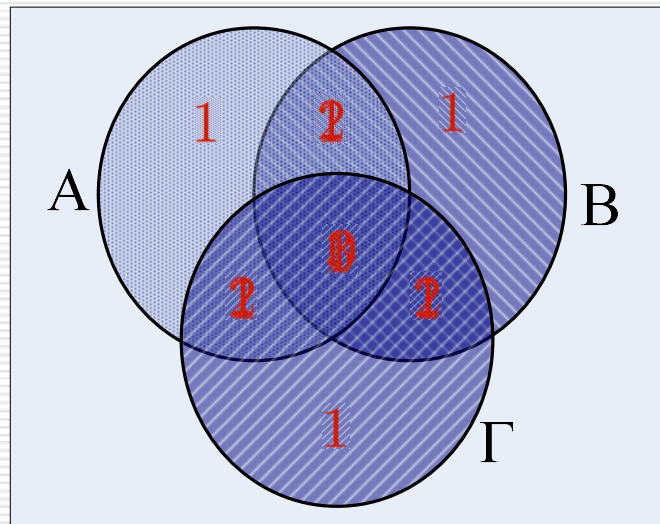
---

- Πληθικός αριθμός ένωσης πεπερασμένων συνόλων.
- Δύο σύνολα  $A, B$ :  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ 
  - Στο  $|A| + |B|$  μετράμε **διπλά** τα στοιχεία στο  $|A \cap B|$ .  
Ο όρος  $- |A \cap B|$  διορθώνει το λάθος.



# Εγκλεισμός – Αποκλεισμός

- Τρία σύνολα A, B, Γ:  $|A \cup B \cup \Gamma|$ 
  - $|A| + |B| + |\Gamma|$
  - $|A| + |B| + |\Gamma| - |A \cap B| - |A \cap \Gamma| - |B \cap \Gamma|$
  - $|A| + |B| + |\Gamma| - |A \cap B| - |A \cap \Gamma| - |B \cap \Gamma| + |A \cap B \cap \Gamma|$



# Παράδειγμα

- 200 φοιτητές, 140 Πληροφορική, 50 Διακριτά, 24 αμφότερα.
  - Πόσοι φοιτητές Πληροφορική ή Διακριτά;
  - $|\Pi \cup \Delta| = |\Pi| + |\Delta| - |\Pi \cap \Delta| = 140 + 50 - 24 = 166.$
  - Πόσοι φοιτητές ούτε Πληροφορική ούτε Διακριτά;
  - $|\overline{\Pi \cap \Delta}| = |\overline{\Pi \cup \Delta}| = |\Phi| - |\Pi \cup \Delta| = 200 - 166 = 34$
- Από αυτούς τους 200 φοιτητές, 60 πήγαν στο ΣΦΗΜΜΥ. Από αυτούς 20 Διακριτά, 45 Πληροφορική, και 16 αμφότερα.
  - Πόσοι φοιτητές που δεν θα πάνε στο Συνέδριο δεν παρακολουθούν ούτε Πληροφορική ούτε Διακριτά.
  - $|\overline{\Sigma \cap \overline{\Pi \cap \Delta}}| = |\overline{\Sigma \cup \Pi \cup \Delta}| = |\Phi| - |\Sigma \cup \Pi \cup \Delta| = 23$
  - $|\Sigma \cup \Pi \cup \Delta| =$   
 $|\Sigma| + |\Pi| + |\Delta| - |\Sigma \cap \Delta| - |\Sigma \cap \Pi| - |\Pi \cap \Delta| + |\Sigma \cap \Pi \cap \Delta| =$   
 $60 + 140 + 50 - 20 - 45 - 24 + 16 = 177$

# Παράδειγμα

- Πόσοι ακέραιοι στο  $\{1, \dots, 1000\}$  διαιρούνται από το 7 ή το 11.
  - $A_7 = \{j \in [1000] : j \text{ διαιρείται από } 7\}$      $|A_7| = \lfloor 1000/7 \rfloor = 142$
  - $A_{11} = \{j \in [1000] : j \text{ διαιρείται από } 11\}$      $|A_{11}| = \lfloor 1000/11 \rfloor = 90$
  - $|\{j \in [M] : j \text{ διαιρείται από } k\}| = \lfloor M/k \rfloor$
  - Ακέραιος  $j$  διαιρείται από  $k_1$  και  $k_2$  ανν  $j$  διαιρείται από ΕΚΠ( $k_1, k_2$ ).
  - $|A_7 \cap A_{11}| = \lfloor 1000/(7 \cdot 11) \rfloor = 12$
  - $|A_7 \cup A_{11}| = |A_7| + |A_{11}| - |A_7 \cap A_{11}| = 142 + 90 - 12 = 220.$
- Πόσοι ακέραιοι στο  $\{1, \dots, 100\}$  διαιρούνται από 2, 3, ή 5.
  - $|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = |A_2| + |A_3| + |A_5|$   
 $- |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_5| - |A_3 \cap A_5| + |A_2 \cap A_3 \cap A_5|$
  - $\dots = 50 + 33 + 20 - 16 - 10 - 6 + 3 = 74$

# Γενίκευση

---

□ Τέσσερα σύνολα  $A, B, \Gamma, \Delta$ :  $|A \cup B \cup \Gamma \cup \Delta|$

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup \Gamma \cup \Delta| &= |A| + |B| + |\Gamma| + |\Delta| \\ &\quad - |A \cap B| - |A \cap \Gamma| - |A \cap \Delta| \\ &\quad - |B \cap \Gamma| - |B \cap \Delta| - |\Gamma \cap \Delta| \\ &\quad + |A \cap B \cap \Gamma| + |A \cap B \cap \Delta| \\ &\quad + |A \cap \Gamma \cap \Delta| + |B \cap \Gamma \cap \Delta| \\ &\quad - |A \cap B \cap \Gamma \cap \Delta| \end{aligned}$$

# Γενίκευση

□ η σύνολα  $A_1, A_2, \dots, A_n$ :  $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|$

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| \\ + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{J \subseteq [n]: |J|=k} |\bigcap_{j \in J} A_j|$$

- Αριθμός όρων για  $n$  σύνολα:  $2^n - 1$
- Απόδειξη με **επαγωγή** στον αριθμό των συνόλων  $n$ .
- Απόδειξη **συνδυαστικά**: κάθε στοιχείο της ένωσης «μετρείται» μία φορά στο άθροισμα δεξιά.



# Από 3 Σύνολα σε 4 Σύνολα

□ Εφαρμόζοντας τη βασική ιδέα της επαγωγικής απόδειξης:

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| &= |(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cup A_4| \\ &= |A_1 \cup A_2 \cup A_3| + |A_4| - |(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cap A_4| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cap A_4| &= |(A_1 \cap A_4) \cup (A_2 \cap A_4) \cup (A_3 \cap A_4)| \\ &= |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4| \\ &\quad - |A_1 \cap A_2 \cap A_4| - |A_1 \cap A_3 \cap A_4| - |A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\ &\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| &= |A_4| + |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| \\ &\quad - |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| - |A_2 \cap A_4| - |A_3 \cap A_4| \\ &\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| \\ &\quad + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \end{aligned}$$

# Παράδειγμα

- 100 φοιτητές κυλικείο για καφέ, πίτσα, και μπουγάτσα.
  - Καθένα κοστίζει 1 ευρώ.
  - Συνολική εισπραξη 200 ευρώ.
  - 75 χάλασαν τουλάχιστον 2 ευρώ.
  - 30 χάλασαν 3 ευρώ.
  - Πόσοι ήρθαν μόνο για παρέα (δεν αγόρασαν τίποτα).
- Απάντηση:  $100 - |K \cup \Pi \cup M|$
- Δεδομένα:
  - $|K \cap \Pi \cap M| = 30$
  - $|K \cap \Pi| + |K \cap M| + |\Pi \cap M| - 2|K \cap \Pi \cap M| = 75$
  - $|K \cap \Pi| + |K \cap M| + |\Pi \cap M| - |K \cap \Pi \cap M| = 105$
  - Συνολική εισπραξη 200 ευρώ, άρα  $|K| + |\Pi| + |M| = 200$ .
- $|K \cup \Pi \cup M| = 200 - 105 = 95$ .
- Απάντηση:  $100 - |K \cup \Pi \cup M| = 5$ .

# Παράδειγμα

- Πόσοι αριθμοί στο  $\{1, 2, \dots, 48\}$  είναι πρώτοι;
- Απάντηση:  $47 - (\# \text{ σύνθετων αριθμών} \leq 48)$ 
  - Αριθμός  $n$  σύνθετος: έχει πρώτο παράγοντα  $\leq \sqrt{n}$
  - Αριθμός  $n \in \{2, 3, \dots, 48\}$  σύνθετος:
    - Είναι διαφορετικός από 2, 3, 5, και διαιρείται από 2, 3, ή 5.
- Πόσοι αριθμοί στο  $\{2, 3, \dots, 48\}$  διαιρούνται από 2, 3, ή 5.
  - $|A_2| = 24, |A_3| = 16, |A_5| = 9, |A_2 \cap A_3| = 8, |A_2 \cap A_5| = 4,$   
 $|A_3 \cap A_5| = 3, |A_2 \cap A_3 \cap A_5| = 1.$
  - $|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = 24 + 16 + 9 - 8 - 4 - 3 + 1 = 35.$
  - Προσοχή: έχουμε συμπεριλάβει 2, 3, και 5.
- Άρα  $(\# \text{ σύνθετων αριθμών} \leq 48) = 35 - 3 = 32.$
- $(\# \text{ πρώτων αριθμών} \leq 48) = 47 - 32 = \mathbf{15}.$

# Κόσκινο του Ερατοσθένη

- Υπολογισμός πρώτων αριθμών  $\leq M$ .
  - Αρχικά **όλοι** οι φυσικοί στο  $\{2, \dots, M\}$ .
  - Σε κάθε γύρο, θεωρούμε **επόμενο διαθέσιμο** αριθμό (είναι **πρώτος**) και **διαγράφουμε** όλα τα **πολλαπλάσιά** του που ξεπερνούν τον αριθμό και δεν έχουν διαγραφεί ήδη.
    - 1<sup>ος</sup> γύρος: διαγράφουμε πολλαπλάσια του 2.
    - 2<sup>ος</sup> γύρος: διαγράφουμε πολλαπλάσια του 3 (όχι του 2)
    - 3<sup>ος</sup> γύρος: διαγράφουμε πολλαπλάσια του 5 (όχι των 2, 3), κοκ.
  - Τερματισμός όταν επόμενος διαθέσιμος αριθμός  $> \sqrt{M}$

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48		