

# Χρωματικός Αριθμός, Κάλυμμα Κορυφών

---

Διδάσκοντες: **Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου**  
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

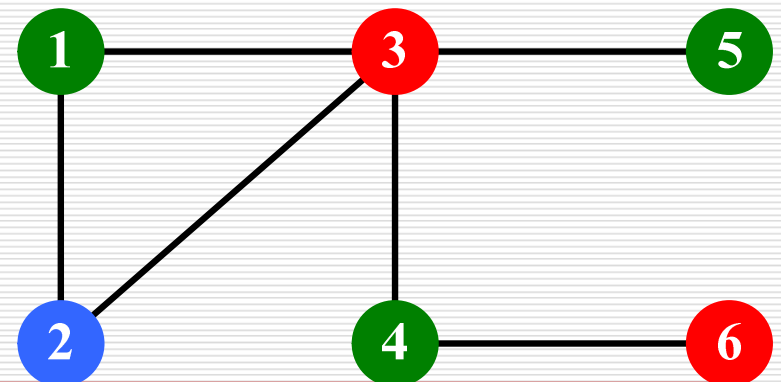
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών  
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



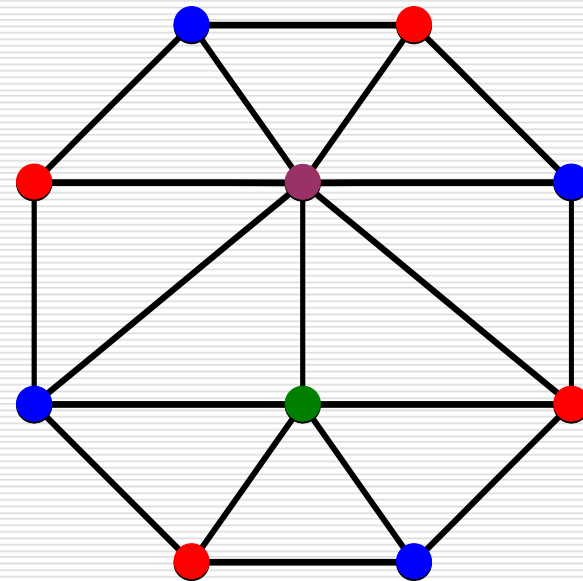
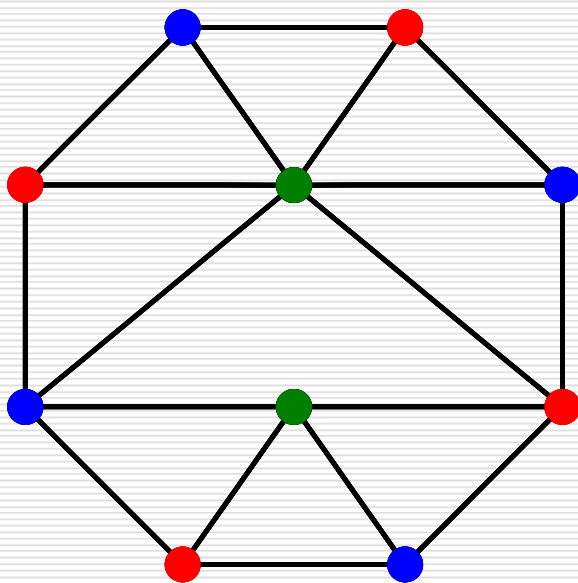
# Χρωματικός Αριθμός

- **k-μερές γράφημα:** κορυφές του διαμερίζονται σε  $k$  ανεξάρτητα σύνολα.
  - Ενδιαφέρει **ελάχιστο**  $k$  για το οποίο γράφημα  $G$  είναι  $k$ -μερές.
  - Αυτό ταυτίζεται με **χρωματικό αριθμό**  $\chi(G)$  γραφήματος  $G$ .
- **Χρωματικός αριθμός:** **ελάχιστος αριθμός χρωμάτων** για χρωματισμό κορυφών ώστε όλες οι **ακμές να έχουν άκρα διαφορετικού χρώματος**.
  - Κορυφές ίδιου χρώματος: ανεξάρτητο σύνολο.
  - Αν  $G$  περιέχει  $K_m$ ,  $\chi(G) \geq m$
  - $\chi(C_n) = 2$ , αν  $n$  άρτιος, και  $3$ , αν  $n$  περιττός.
  - Επίπεδο γράφημα  $G$ ,  $\chi(G) \leq 4$ .



# Χρωματικός Αριθμός

- **Χρωματικός αριθμός:** ελάχιστος αριθμός χρωμάτων για χρωματισμό κορυφών ώστε όλες οι ακμές να έχουν άκρα διαφορετικού χρώματος.
  - Κορυφές ίδιου χρώματος: ανεξάρτητο σύνολο.



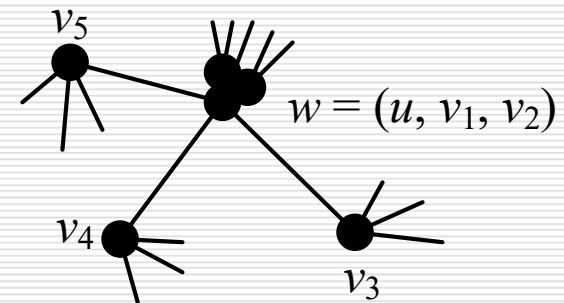
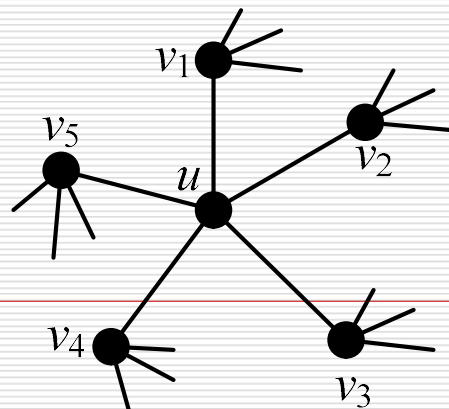
# Άσκηση

---

- Νδο σε κάθε γράφημα  $G(V, E)$ ,  $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$ .
  - Βάση: Ισχύει για κάθε γράφημα με  $n = 1, 2$  κορυφές.
  - Επαγωγική υπόθεση: για αυθαίρετα επιλεγμένο  $n \geq 2$ , ισχύει ότι  $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$  για κάθε γράφημα  $G$  με  $n$  κορυφές.
  - Επαγωγικό βήμα: Έστω γράφημα  $G'$  με  $n+1$  κορυφές. Θδο  $\chi(G') \leq \Delta(G')+1$ .
  - Έστω αυθαίρετη κορυφή  $u$  του  $G'$  και  $G_u = G' - u$ .
  - Από επαγωγική υπόθεση:  $\chi(G_u) \leq \Delta(G_u)+1 \leq \Delta(G')+1$ .
  - Η κορυφή  $u$  παίρνει ένα από τα  $\Delta(G')+1$  χρώματα.
  - Έγκυρος χρωματισμός γιατί  $\deg(u) \leq \Delta(G')$ : ένα από αυτά τα χρώματα δεν χρησιμοποιείται στη γειτονιά  $N(u)$ .
- Έστω συνεκτικό γράφημα  $G$  που δεν είναι πλήρες ούτε κύκλος περιττού μήκους. Τότε  $\chi(G) \leq \Delta(G)$ .

# Άσκηση

- Νδο σε κάθε **επίπεδο** γράφημα  $G(V, E)$ ,  $\chi(G) \leq 5$ .
  - **Βάση:** Ισχύει για κάθε επίπεδο γράφημα με  $n = 1, 2, \dots, 5$  κορυφές.
  - **Επαγωγική υπόθεση:** για αυθαίρετα επιλεγμένο  $n \geq 5$ , ισχύει ότι  $\chi(G) \leq 5$  για κάθε επίπεδο γράφημα  $G$  με  $n$  κορυφές.
  - **Επαγωγικό βήμα:** Επίπεδο γράφημα  $G'$  με  $n+1$  κορυφές:  $\chi(G') \leq 5$
  - Κορυφή  $u$  με βαθμό  $\leq 5$  και  $N(u) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ .
  - (Τουλ.) **δύο** κορυφές στο  $N(u)$  **δεν συνδέονται** (έστω οι  $v_1$  και  $v_2$ ).
  - $G''$  (επίπεδο) γράφημα όπου  $\{u, v_1\}, \{u, v_2\}$  έχουν συμπτυχθεί σε  $w$ .
  - Επαγ. Υπόθ.:  $\chi(G'') \leq 5$  με χρώμα( $w$ ) = 1, χρώμα( $v_k$ ) =  $k$ ,  $k = 3, 4, 5$
  - Θέτουμε χρώμα( $v_1$ ) = χρώμα( $v_2$ ) = 1, χρώμα( $u$ ) = 2.

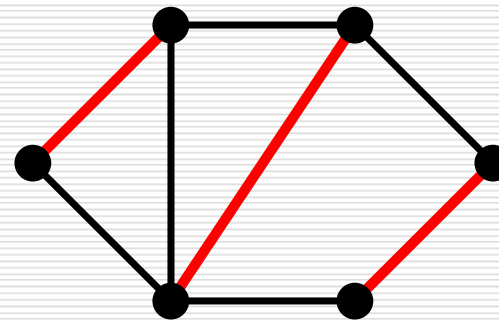
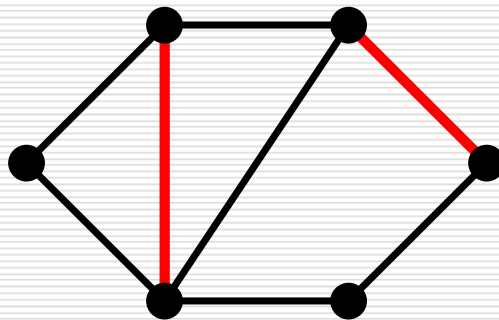


# Σχέση με Ανεξάρτητα Σύνολα

- $\alpha(G)$ : #κορυφών στο **μέγιστο** ανεξάρτητο σύνολο (independence number).
- Νδο σε κάθε γράφημα  $G$ ,  $n - \alpha(G) + 1 \geq \chi(G) \geq n / \alpha(G)$ 
  - Χρωματίζουμε **μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο** με ένα χρώμα και άλλες κορυφές με διαφορετικά χρώματα:  $\chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1$
  - $\alpha(G) \geq n / \chi(G)$  γιατί περισσότερες κορυφές με ίδιο χρώμα είναι τουλάχιστον τόσες.
- Νδο σε κάθε γράφημα  $G$ ,  $\chi(\overline{G}) \geq n / \chi(G)$ .
  - Μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο  $I$  έχει τουλάχιστον  $n / \chi(G)$  κορυφές.
  - Στο συμπληρωματικό γράφημα, οι κορυφές του  $I$  αποτελούν **πλήρες γράφημα** και χρειάζονται τουλάχιστον  $n / \chi(G)$  χρώματα.

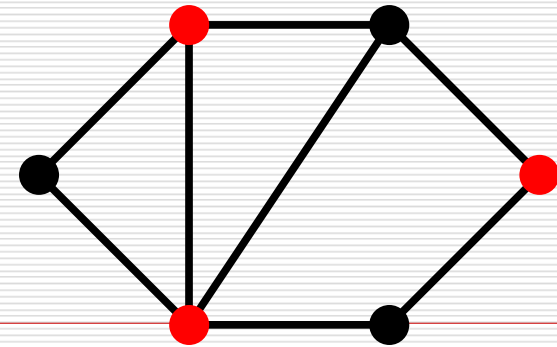
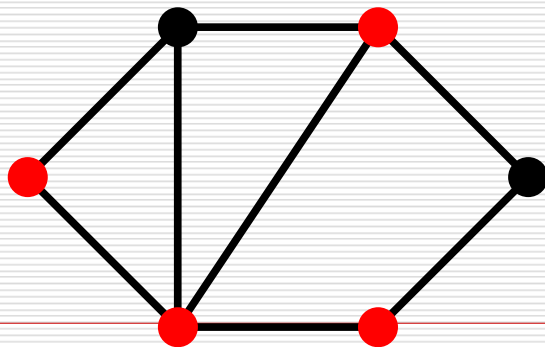
# Ταιριάσματα (Matchings)

- **Ταίριασμα** σε γράφημα  $G(V, E)$ : σύνολο ακμών  $M \subseteq E$  χωρίς κοινά άκρα.
  - Κορυφή βαθμού 1 στο  $M$ : **ταιριασμένη**. Διαφορετικά **ελεύθερη**.
  - $M$  **τέλειο ταίριασμα** αν **όλες** οι κορυφές του  $G$  **ταιριασμένες**.
  - $M$  **μέγιστο ταίριασμα** αν για κάθε ταίριασμα  $M'$ ,  $|M| \geq |M'|$ .
  - $M$  **μεγιστικό (maximal)** αν καμία ακμή στο  $E$  δεν έχει δύο ελεύθερα άκρα.
  - $M$  **μεγιστικό** ανν **ελεύθερες κορυφές** αποτελούν **ανεξάρτητο σύνολο**.



# Κάλυμμα Κορυφών (Vertex Cover)

- Γράφημα  $G(V, E)$ : **κάλυμμα κορυφών**  $C \subseteq V$  αν κάθε ακμή έχει τουλάχιστον **ένα από τα άκρα** της στο  $C$ .
  - $C$  **κάλυμμα κορυφών** αν  $V \setminus C$  ανεξάρτητο σύνολο.
  - $\beta(G)$ : #κορυφών στο **ελάχιστο** κάλυμμα κορυφών.
    - Σε κάθε γράφημα  $G$ ,  $\beta(G) + \alpha(G) = n$



# Κάλυμμα Κορυφών (Vertex Cover)

- Γράφημα  $G(V, E)$ : **κάλυμμα κορυφών**  $C \subseteq V$  αν κάθε ακμή έχει τουλάχιστον **ένα από τα άκρα** της στο  $C$ .
  - $C$  **κάλυμμα κορυφών** αν  $V \setminus C$  ανεξάρτητο σύνολο.
  - $\beta(G)$ : #κορυφών στο **ελάχιστο** κάλυμμα κορυφών.
    - Σε κάθε γράφημα  $G$ ,  $\beta(G) + \alpha(G) = n$
  - Έστω κάλυμμα κορυφών  $C$  και ταίριασμα  $M$ :  $|C| \geq |M|$ .
    - Αν  $|C| = |M|$ , το  $C$  είναι **ελάχιστο** κάλυμμα κορυφών και το  $M$  είναι **μέγιστο** ταίριασμα.

