

Δέντρα

Διδάσκοντες: **Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου**
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



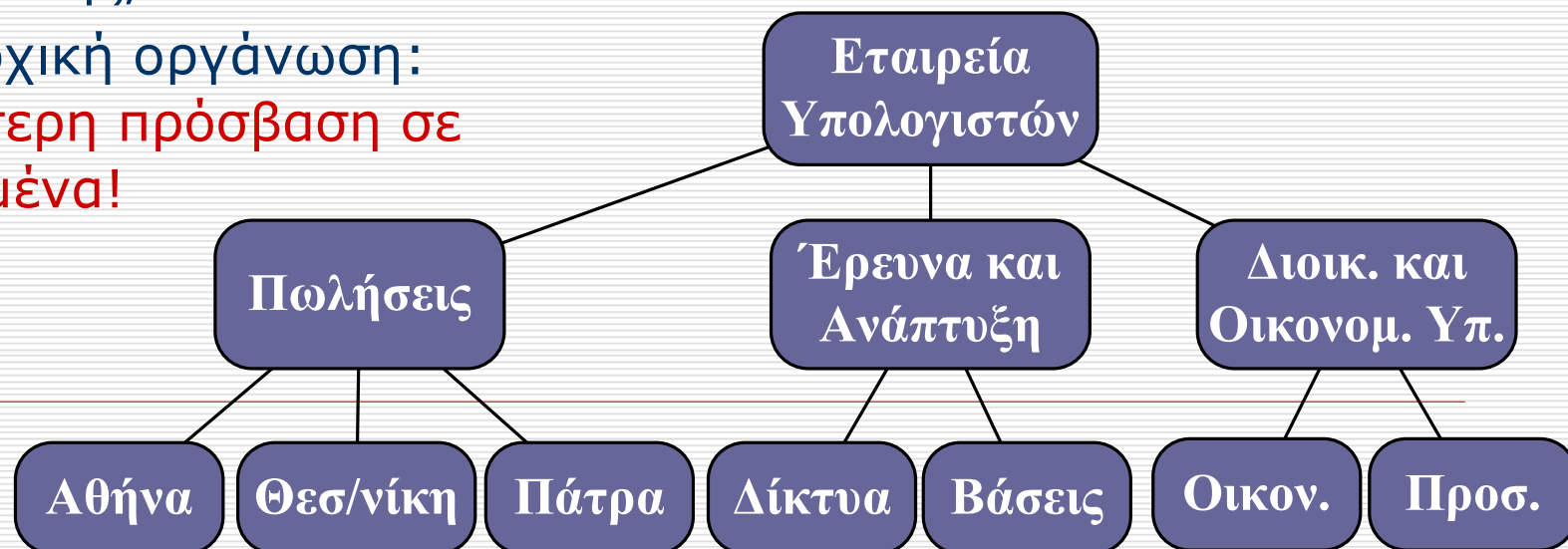
Δέντρα

□ **Δέντρο:** πρότυπο **ιεραρχικής δομής.**

- Αναπαράσταση (**ιεραρχικών**) σχέσεων: προγόνου-απογόνου, προϊσταμένου-υφισταμένου, όλου-μέρους, ...

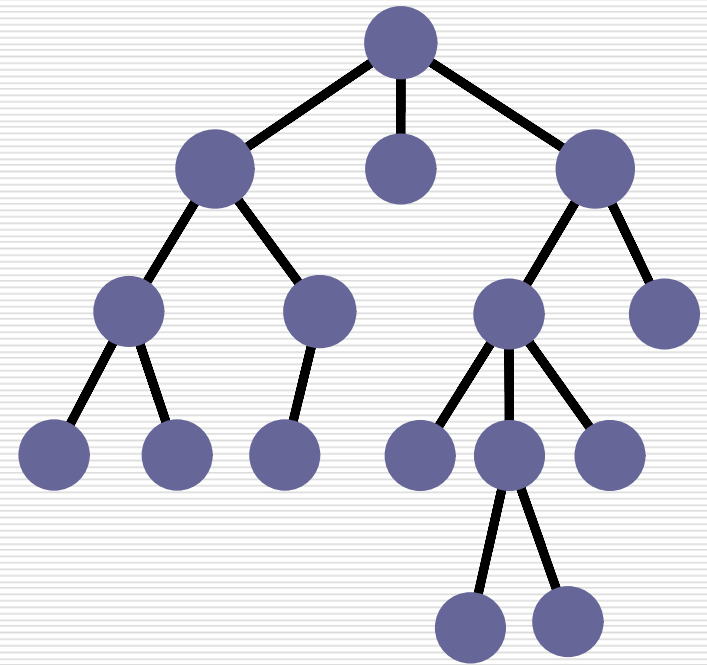
□ Εφαρμογές:

- Γενεαλογικά δέντρα.
- Οργανόγραμμα επιχείρησης, ιεραρχία διοίκησης.
- User interfaces, web sites, module hierarchy, δέντρα απόφασης, ...
- Ιεραρχική οργάνωση:
ταχύτερη πρόσβαση σε δεδομένα!



Δέντρα: Βασικές Ιδιότητες

- Γράφημα **ακυκλικό** και **συνεκτικό**.
- Τα παρακάτω είναι **ισοδύναμα** για κάθε απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$:
 - G είναι **δέντρο**.
 - Κάθε ζευγάρι κορυφών του G συνδέεται με **μοναδικό μονοπάτι**.
 - G ελαχιστικά συνεκτικό.
 - G συνεκτικό και $|E| = |V| - 1$.
 - G ακυκλικό και $|E| = |V| - 1$.
 - G μεγιστικά ακυκλικό.
- Άθροισμα βαθμών = $2(|V| - 1)$



Δέντρα: Βασικές Ιδιότητες

- Αν G δέντρο, τότε κάθε ζευγάρι κορυφών του G συνδέεται με μοναδικό μονοπάτι.
 - Αφού G συνεκτικό, κάθε ζευγάρι κορυφών συνδέεται με μονοπάτι.
 - Αν για κάποιο ζευγάρι κορυφών είχαμε δύο εναλλακτικά μονοπάτια, θα είχαμε κύκλο.
- Αν κάθε ζευγάρι κορυφών του G συνδέεται με μοναδικό μονοπάτι, τότε το G ελαχιστικά συνεκτικό.
 - Συνεκτικό γιατί όλες οι κορυφές συνδέονται.
 - Ελαχιστικά συνεκτικό γιατί τα μονοπάτια είναι μοναδικά.

Δέντρα: Βασικές Ιδιότητες

- Αν G είναι ελαχιστικά συνεκτικό, τότε το G είναι συνεκτικό και έχει $m = n - 1$.
 - Επαγωγή για το πλήθος των ακμών.
 - Βάση $n = 1$, τετριμμένη περίπτωση (μεμονωμένη κορυφή).
 - Βήμα: αφαίρεση ακμής δημιουργεί δύο συνεκτικές συνιστώσες με k και $n - k$ κορυφές.
 - Οι συνιστώσες είναι ελαχιστικά συνεκτικές: από επαγωγική υπόθεση έχουν $k - 1$ και $n - k - 1$ ακμές.
 - Άρα $(k - 1) + (n - k - 1) + 1 = n - 1$ ακμές συνολικά.

Δέντρα: Βασικές Ιδιότητες

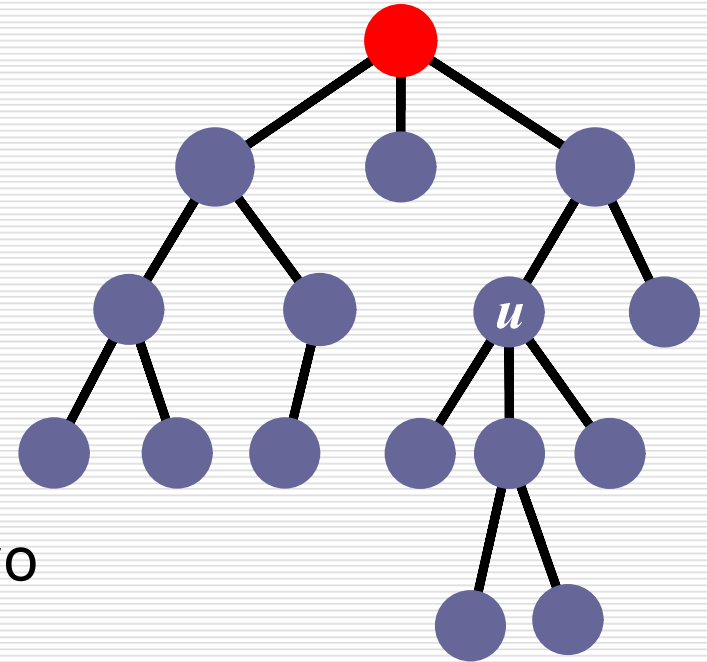
- Αν G είναι **συνεκτικό** και έχει $m = n - 1$, τότε το G είναι **ακυκλικό** και έχει $m = n - 1$.
 - Αν G έχει **κύκλο**, αφαιρούμε ακμή και παραμένει **συνεκτικό**.
 - Άτοπο, δεν υπάρχει **συνεκτικό** γράφημα με $< n - 1$ ακμές.
- Αν G είναι **ακυκλικό** και έχει $m = n - 1$, τότε το G είναι **μεγιστικά ακυκλικό**.
 - Αρκεί να δείξουμε ότι το G είναι **συνεκτικό** (μετά η προσθήκη μιας **ακμής** δημιουργεί **κύκλο** με μονοπάτι στα άκρα της).
 - Αν G μη **συνεκτικό**, κάθε **συνεκτική συνιστώσα** είναι **ακυκλική**, άρα **δέντρο** (και άρα έχει $n_p - 1$ ακμές).
 - Αν k **συνεκτικές συνιστώσες**, $n - k$ **ακμές συνολικά**.
 - Άρα έχουμε $k = 1$ **συνεκτική συνιστώσα**.

Δέντρα: Βασικές Ιδιότητες

- Αν G είναι **μεγιστικά ακυκλικό**, τότε το G είναι **ακυκλικό** και **συνεκτικό** (δέντρο).
 - Αν G μη συνεκτικό, προσθήκη ακμής μεταξύ συνεκτικών συνιστωσών δεν δημιουργεί κύκλο, αντίφαση!
- Ένα γράφημα με n κορυφές και $< n - 1$ ακμές δεν είναι **συνεκτικό**.
- Απλό γράφημα με n κορυφές και **τουλάχιστον n ακμές** έχει τουλάχιστον έναν **κύκλο**.
- Μη συνεκτικό **ακυκλικό** γράφημα είναι **δάσος**.
 - Συνεκτικές συνιστώσες ενός δάσους είναι δέντρα.
- **Φύλλο**: κορυφή (δέντρου) με **βαθμό 1**.
 - Κάθε δέντρο έχει **τουλάχιστον 2 φύλλα**.

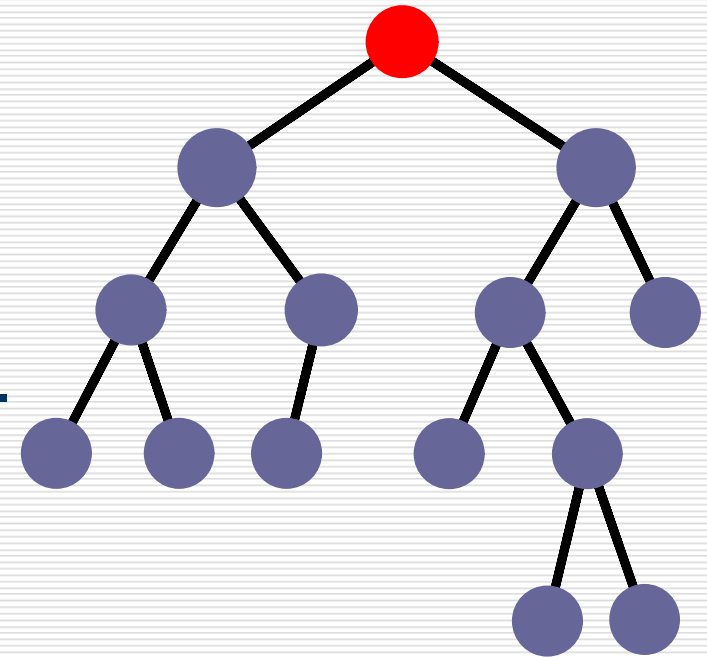
Δέντρα (με Ρίζα): Ορολογία

- **Ρίζα** : κόμβος χωρίς πρόγονο.
 - Δέντρο με **ρίζα** : **ιεραρχία**
- **Πρόγονοι u** : κόμβοι στο (μοναδικό) μονοπάτι u προς ρίζα.
- **Απόγονοι u** : κόμβοι σε μονοπάτια από u προς φύλλα.
- **Υποδέντρο u** : Δέντρο αποτελούμενο από u και απόγονούς του.



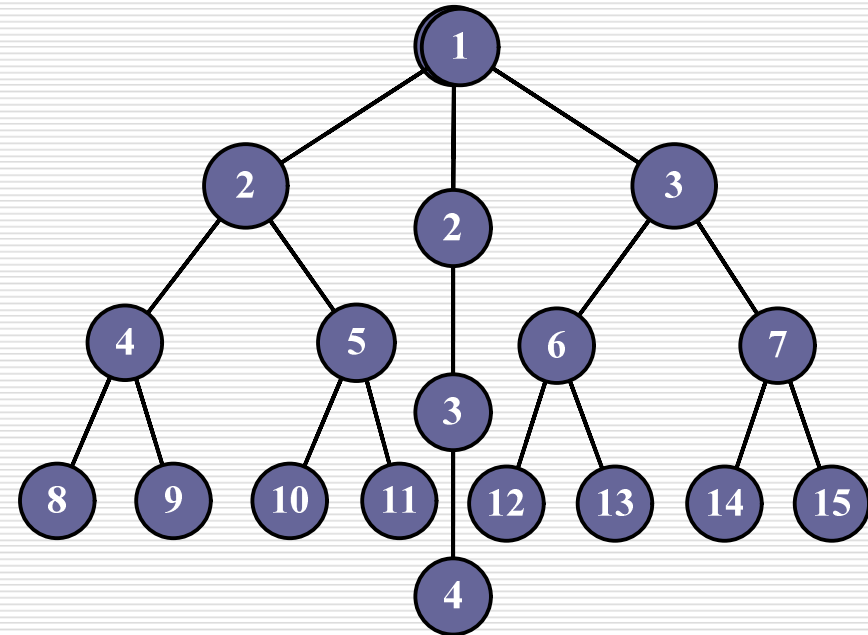
Δέντρα (με Ρίζα): Ορολογία

- **Επίπεδο u** : μήκος μονοπατιού από u προς ρίζα.
- **Ύψος** : μέγιστο επίπεδο κόμβου (φύλλου).
 - Μέγιστη απόσταση φύλλου από ρίζα.
- **Δυαδικό δέντρο** :
κάθε κορυφή ≤ 2 **παιδιά**
 - **Αριστερό** και **δεξιό**.
- Κάθε **υποδέντρο** είναι δυαδικό δέντρο.



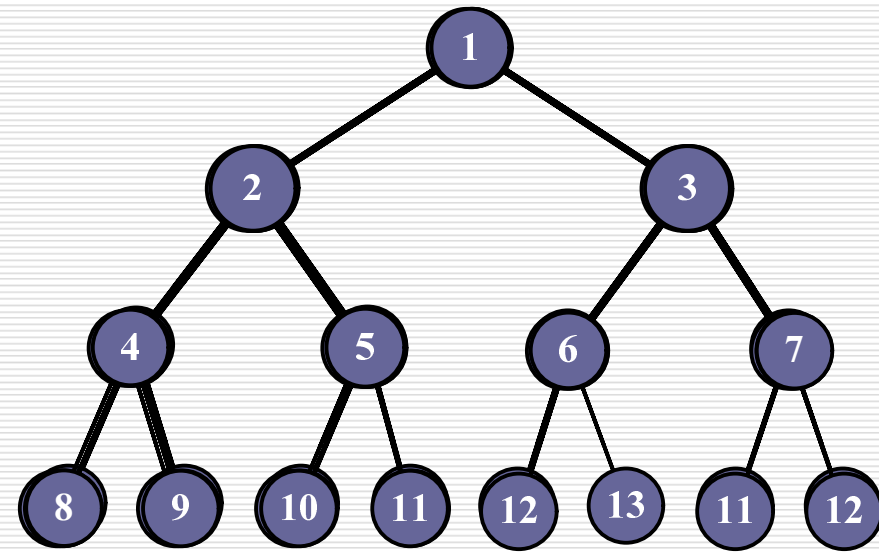
Δυαδικά Δέντρα

- #κορυφών για ύψος = h :
 $h+1 \leq \#κορυφών \leq 2^{h+1} - 1$
 - $h+1$ επίπεδα, ≥ 1 κορ. / επίπ.
 - $\leq 2^i$ κορυφές στο επίπεδο i .
 $1 + 2 + \dots + 2^h = 2^{h+1} - 1$
- Ύψος για $\#κορυφών = n$:
 $\log_2(n+1) - 1 \leq \text{ύψος} \leq n - 1$
- **Γεμάτο** (full):
 - Κάθε κορυφή είτε φύλλο είτε 2 παιδιά.
- **Πλήρες** (complete) :
 - Όλα τα επίπεδα συμπληρωμένα (εκτός ίσως τελευταίο).
- **Τέλειο** (perfect) : $n = 2^{h+1} - 1$



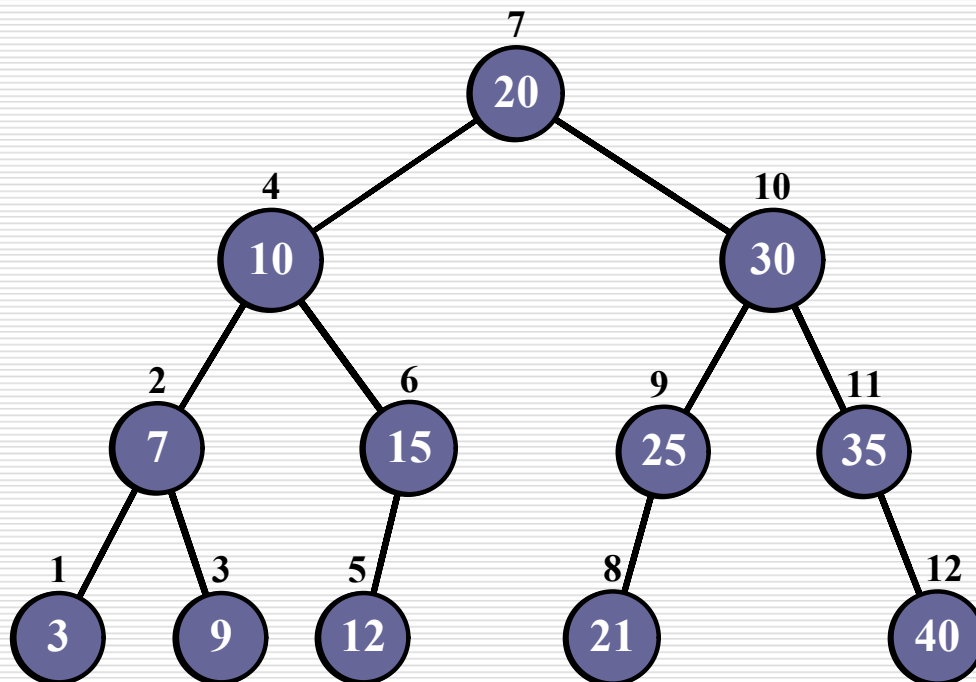
Πλήρες

- Όλα τα επίπεδα **συμπληρωμένα** **εκτός ίσως από τελευταίο** που γεμίζει από αριστερά προς τα δεξιά.
- $n(h)$: #κορυφών για ύψος h :
 $2^h \leq n(h) \leq 2^{h+1} - 1$
 - τέλειο(h) : $2^{h+1} - 1$
 - τέλειο($h - 1$) + 1 : $(2^h - 1) + 1 = 2^h$.
- $h(n)$: ύψος για n κορυφές:
 $\log_2(n+1) - 1 \leq h(n) \leq \log_2 n$
- Ύψος : $h(n) = \lfloor \log_2 n \rfloor$
- #φύλλων = $\lceil n / 2 \rceil$



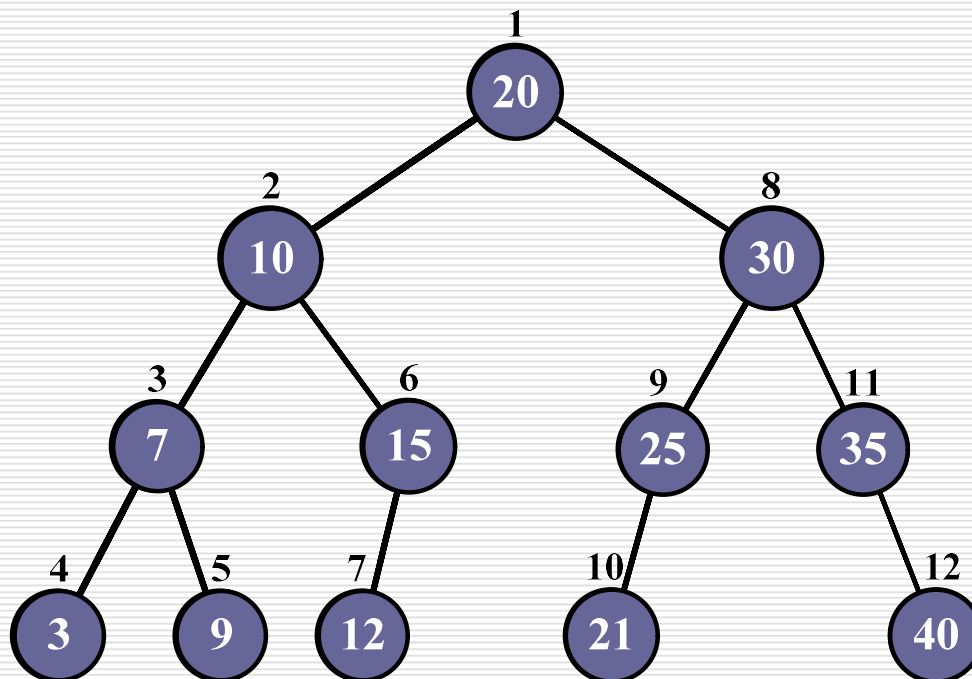
Inorder

- **Ενδο**-διατεταγμένη (inorder) διέλευση:
 - Αριστερό – Ρίζα – Δεξί.
 - Κόμβος εξετάζεται **μετά** από κόμβους αριστερού υποδέντρου και **πριν** από κόμβους δεξιού υποδέντρου.



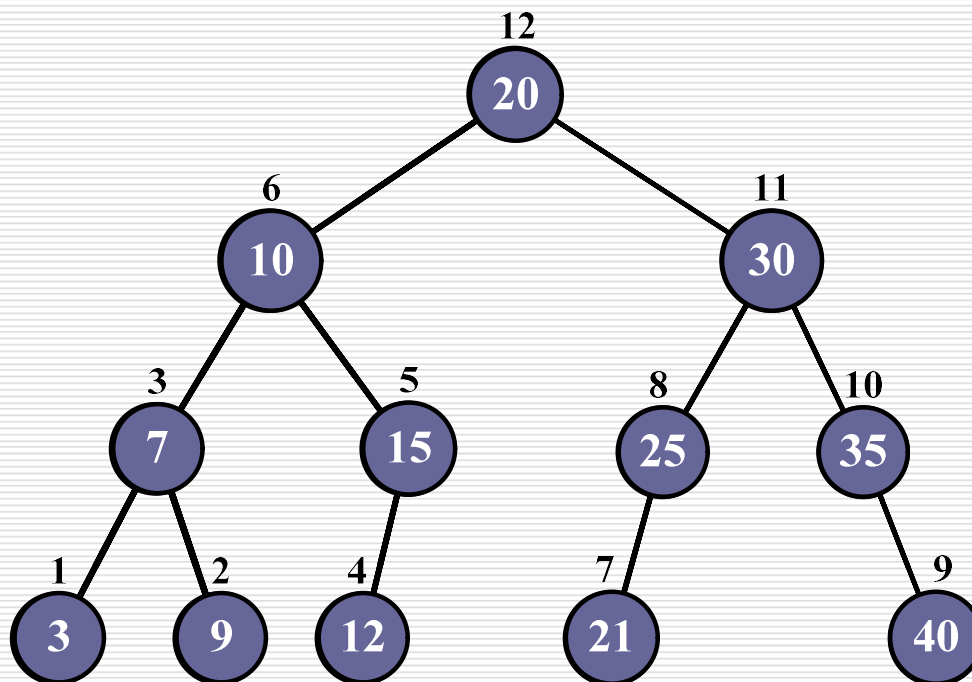
Preorder

- Προ-διατεταγμένη (preorder) διέλευση:
 - Ρίζα – Αριστερό – Δεξί.
 - Κόμβος εξετάζεται **πριν** από κόμβους αριστερού και δεξιού υποδέντρου.



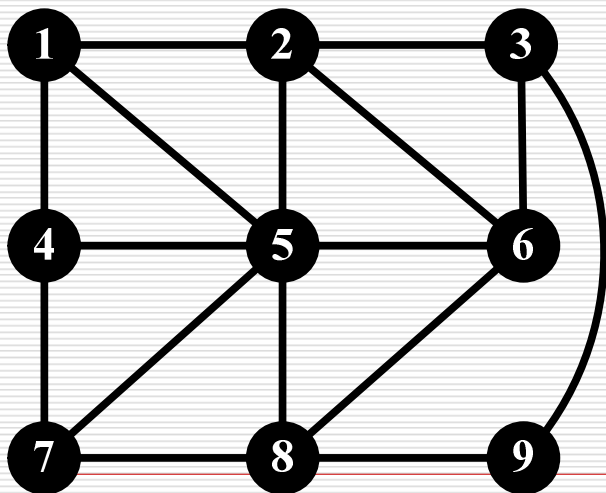
Postorder

- **Μετα**-διατεταγμένη (preorder) διέλευση:
 - Αριστερό – Δεξί – Ρίζα
 - Κόμβος εξετάζεται **μετά** από κόμβους αριστερού και δεξιού υποδέντρου.

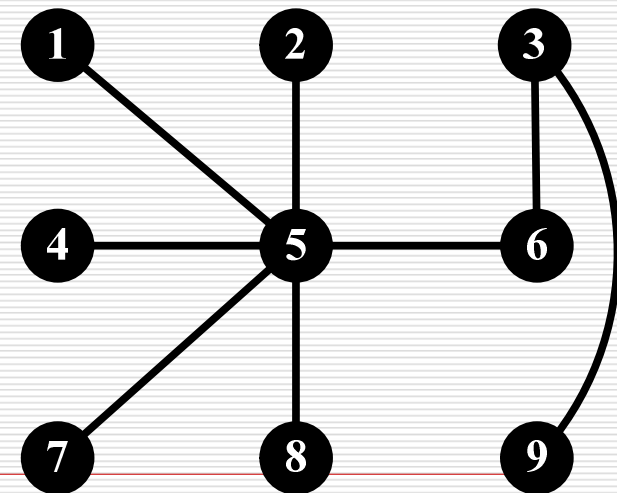
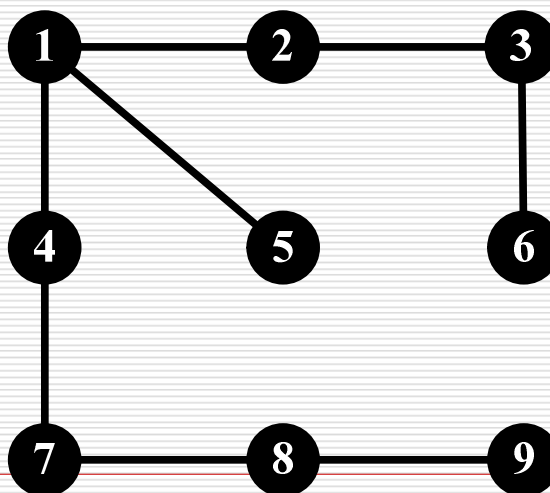


Συνδετικό (Επικαλύπτον) Δέντρο (Spanning Tree)

- Έστω συνεκτικό γράφημα $G(V, E)$:
 - Κάθε δέντρο $T(V, E')$, με $E' \subseteq E$, που «καλύπτει» όλες τις κορυφές είναι **επικαλύπτον** (ή συνδετικό, spanning) δέντρο του G .
 - Γράφημα G συνεκτικό ανν έχει συνδετικό δέντρο.
 - Υπολογισμός ενός συνδετικού δέντρου με Αναζήτηση κατά Πλάτος ή Αναζήτηση κατά Βάθος.



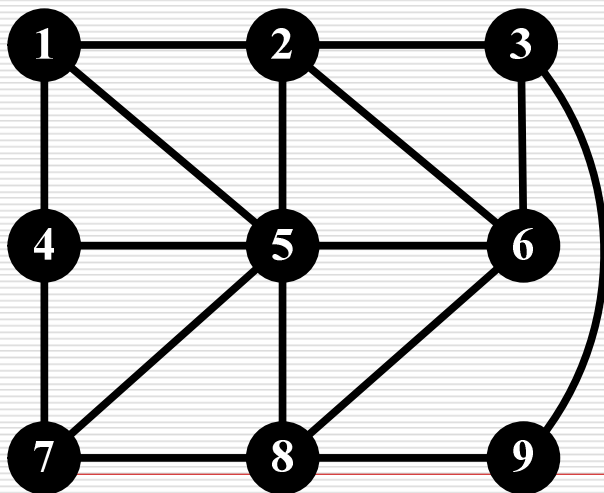
Διακριτά Μαθηματικά (Άνοιξη 2026)



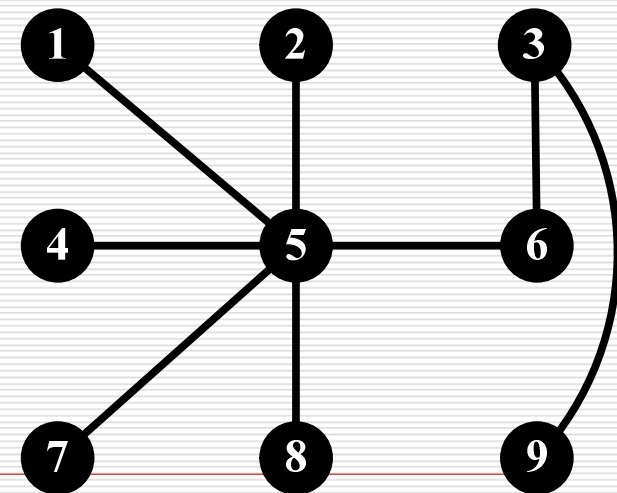
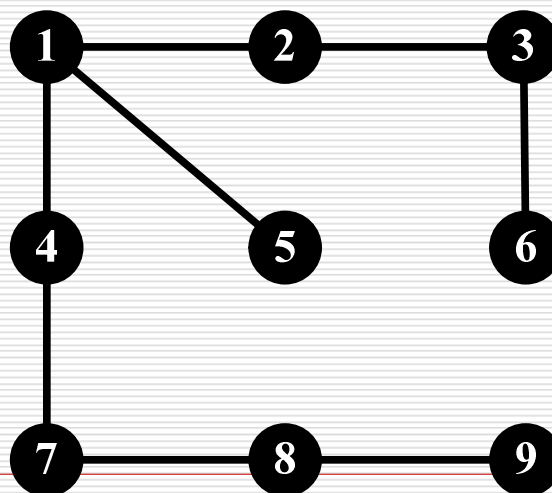
Δέντρα 15

Συνδετικό (Επικαλύπτον) Δέντρο (Spanning Tree)

- Συνεκτικό G μπορεί να έχει πολλά συνδετικά δένδρα.
 - Πότε G έχει μοναδικό συνδετικό δέντρο;
 - Θεώρημα Cayley (1889): K_n έχει n^{n-2} συνδετικά δένδρα



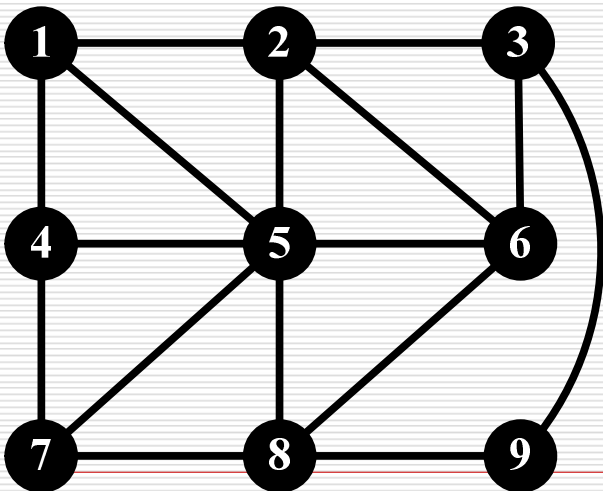
Διακριτά Μαθηματικά (Άνοιξη 2026)



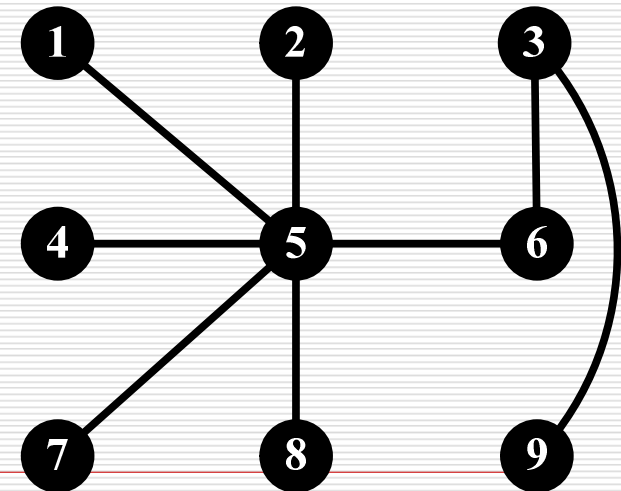
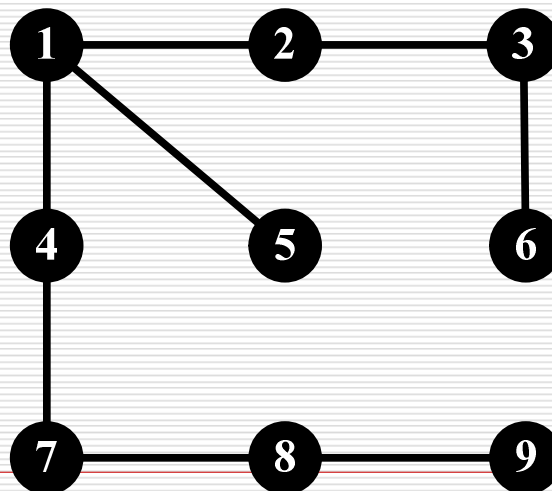
Δέντρα 16

Συνδετικό (Επικαλύπτον) Δέντρο (Spanning Tree)

- Έστω T και T' συνδετικά δέντρα G . Για κάθε ακμή $e \in T \setminus T'$, υπάρχει ακμή $e' \in T' \setminus T$, τ.ω. $(T'+e) - e'$ είναι συνδετικό δέντρο.
 - Για κάθε e εκτός του T' , το $T'+e$ περιέχει μοναδικό κύκλο C .
 - Αφαιρούμε οποιαδήποτε ακμή e' του C που δεν ανήκει στο T .
 - Υπάρχει τέτοια ακμή e' γιατί κύκλος C δεν σχηματίζεται στο T .
 - Η e' είναι διαφορετική της e γιατί $e \in T$.
 - $(T'+e) - e'$ συνδετικό δέντρο: συνεκτικό, ακυκλικό όλες τις κορυφές.



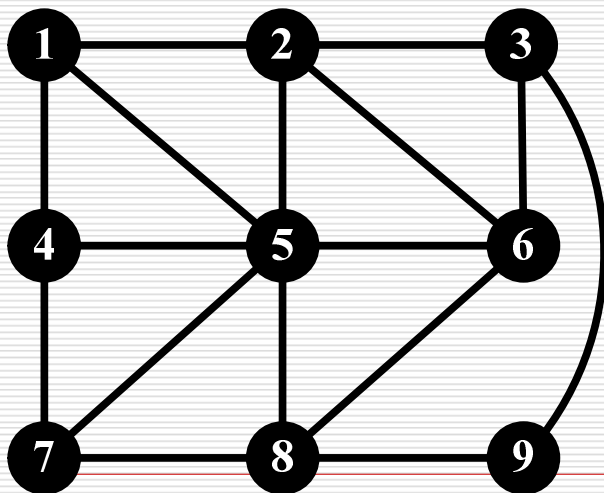
Διακριτά Μαθηματικά (Άνοιξη 2026)



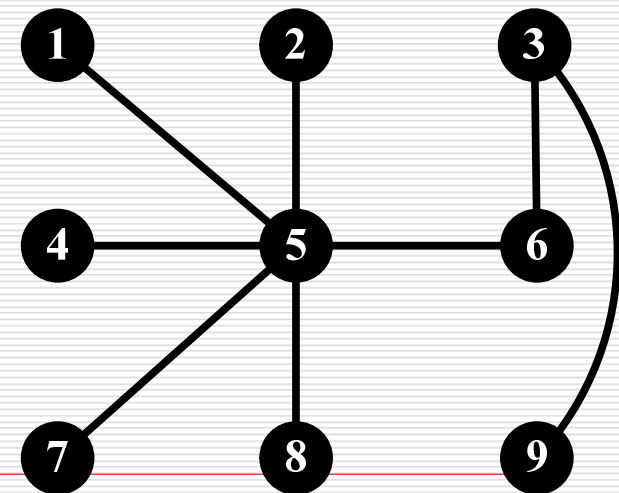
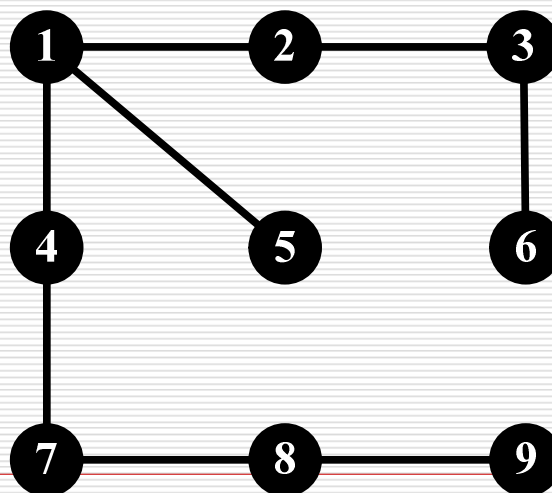
Δέντρα 17

Συνδετικό (Επικαλύπτον) Δέντρο (Spanning Tree)

- Έστω T και T' συνδετικά δέντρα G . Για κάθε ακμή $e \in T \setminus T'$, υπάρχει ακμή $e' \in T' \setminus T$, τ.ω. $(T - e) + e'$ είναι συνδετικό δέντρο.
- Από οποιοδήποτε συνδετικό δέντρο T μπορούμε να «μεταβούμε» σε οποιοδήποτε άλλο T' με διαδοχικές «ανταλλαγές» ακμών.
 - Χρειάζονται ακριβώς $|T \setminus T'|$ «ανταλλαγές» ακμών.
Από κάθε ανταλλαγή προκύπτει συνδετικό δέντρο.
 - (Διακριτό) σύνολο $\Sigma\Delta$ έχει παρόμοια δομή με (συνεχή) κυρτά σύνολα!



Διακριτά Μαθηματικά (Άνοιξη 2026)



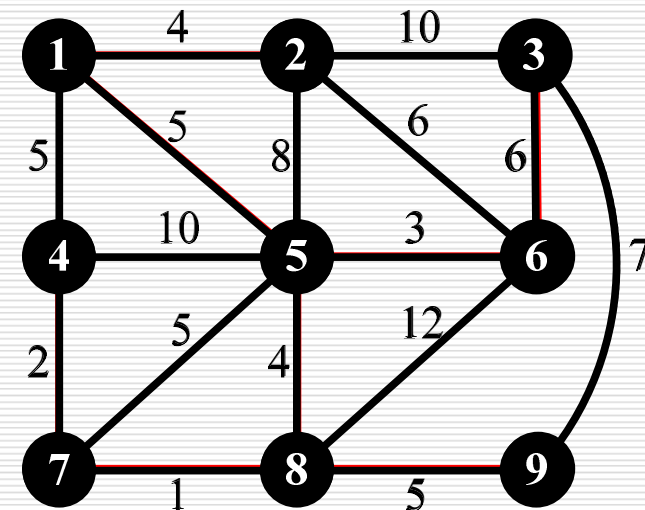
Δέντρα 18

Παραδείγματα

- Νδο κάθε δέντρο με $n \geq 2$ κορυφές έχει **τουλ. 2 κορυφές** που **δεν είναι σημεία κοπής**.
 - Τα **φύλλα** **δεν είναι σημεία κοπής**.
- Νδο κάθε συνεκτικό γράφημα με $n \geq 2$ κορυφές έχει **τουλ. 2 κορυφές** που **δεν είναι σημεία κοπής**.
 - Τα **φύλλα του συνδετικού δέντρου** **δεν είναι σημεία κοπής**.
- Να διατυπώσετε **αλγόριθμο** για την **εύρεση 2 κορυφών** που **δεν είναι σημεία κοπής**.
 - Βρίσκουμε **φύλλα στο δέντρο** της Αναζ. κατά Πλάτος (ή Βάθος).

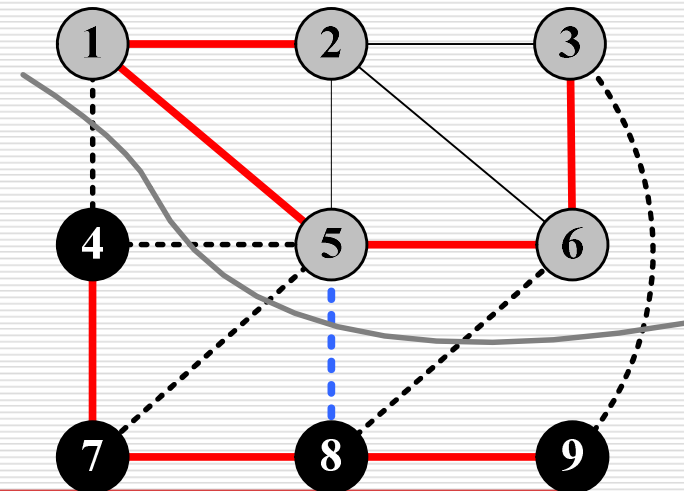
Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο (MST)

- Συνεκτικό μη-κατευθ. $G(V, E, w)$ με βάρη $w : E \mapsto \mathbb{R}_{>0}$
 - Βάρος υπογραφήματος $T(V, E_T)$: $w(T) = \sum_{e \in E_T} w(e)$
- Ζητούμενο: ελάχιστου βάρους **συνεκτικό** υπογράφημα που καλύπτει όλες τις κορυφές.
 - Συνεκτικό (εξ' ορισμού) + ακυκλικό (ελάχιστο) $\Rightarrow$ Δέντρο.
 - Minimum Spanning Tree (MST, ΕΣΔ).
- Πρόβλημα συνδυαστ. βελτιστοποίησης με πολλές και σημαντικές εφαρμογές.
 - Σχεδιασμός συνδετικού δικτύου (οδικού, τηλεπ/κου, ηλεκτρικού) με ελάχιστο κόστος.



Τομές, Σύνολα Τομής και Συνδετικά Δέντρα

- Τομή $(S, V \setminus S)$: διαμέριση κορυφών σε 2 σύνολα $S, V \setminus S$.
- Σύνολο τομής $\delta(S, V \setminus S)$: σύνολο ακμών με ένα άκρο στο S και το άλλο άκρο στο $V \setminus S$.
 - $\delta(S, V \setminus S)$: όλες οι ακμές που **διασχίζουν** τομή $(S, V \setminus S)$.
- Σύνολο E' **διασχίζει** τομή $(S, V \setminus S)$: $E' \cap \delta(S, V \setminus S) \neq \emptyset$
- Γράφημα $G(V, E)$ **συνεκτικό** ανν E **διασχίζει** κάθε τομή.
 - Για κάθε (μη κενό) $S \subseteq V$, υπάρχει ακμή με ένα άκρο στο S και άλλο άκρο στο $V \setminus S$.
 - Συνδετικό δέντρο: ελαχιστικό σύνολο ακμών που διασχίζει κάθε τομή.

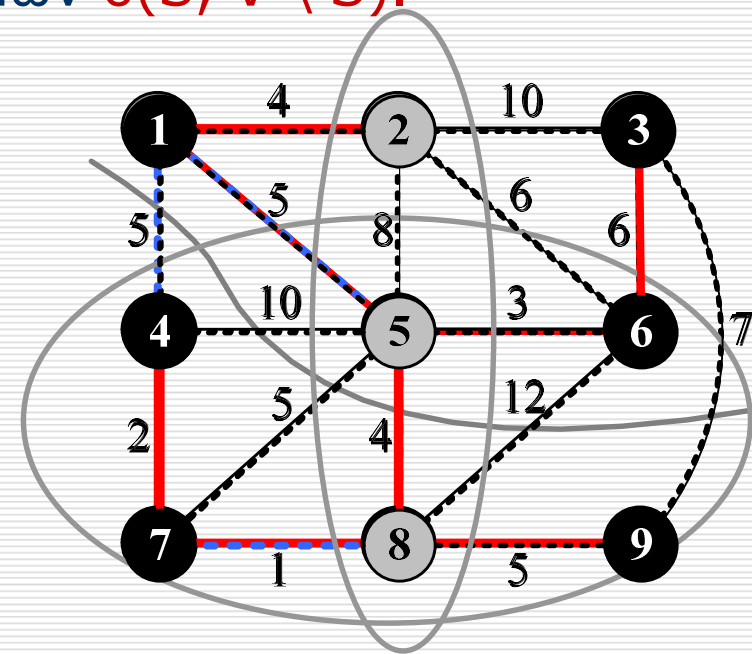


Κανόνες Σχηματισμού ΕΣΔ

- Ακμή e που για κάποια τομή $(S, V \setminus S)$, αποτελεί ελάχιστου βάρους ακμή που διασχίζει τομή $(S, V \setminus S)$:
 - e **ανήκει** σε κάποιο ΕΣΔ.
- Ακμή e που για κάποιον κύκλο C αποτελεί μέγιστου βάρους ακμή κύκλου C :
 - Αν βάρος e **μεγαλύτερο** από βάρος άλλων ακμών του C , e **δεν ανήκει** σε κανένα ΕΣΔ.
 - Αν όλες οι ακμές του C έχουν ίδιο βάρος, e **δεν ανήκει** σε κάποιο ΕΣΔ.
 - Ενόσω υπάρχει κύκλος C , **αποκλεισμός** (μιας) βαρύτερης ακμής C .

Άπληστος Αλγόριθμος για ΕΣΔ

- Έστω Δ δάσος (σύνολο ακμών χωρίς κύκλους).
- Ακμή $e \notin \Delta$ είναι **ακμή επαύξησης** για Δ αν:
 - e διασχίζει μια τομή $(S, V \setminus S)$ που δεν διασχίζει το Δ , και
 - e είναι ελάχιστου βάρους μεταξύ ακμών $\delta(S, V \setminus S)$.
- Ακμή επαύξησης για δάσος Δ οδηγεί σε ΕΣΔ έπειτα από $|V|-1$ βήματα:
 - Αν Δ δάσος και e ακμή επαύξησης για Δ , $\Delta \cup \{e\}$ δάσος.
 - e δεν δημιουργεί κύκλο.
 - Αν $\Delta \subset \text{ΕΣΔ}$ και e ακμή επαύξησης Δ , $\Delta \cup \{e\} \subseteq \text{ΕΣΔ}$.



Άπληστος Αλγόριθμος για ΕΣΔ

$\text{MST}(G(V, E, w))$

$\Delta \leftarrow \emptyset;$

while $|\Delta| < |V| - 1$ **do**

Υπολόγισε μια **ακμή επαύξησης** e για Δ ;

$\Delta \leftarrow \Delta \cup \{e\};$

return(Δ);

- Αρχικά $\Delta = \emptyset$ **δάσος** και **υποσύνολο** κάθε ΕΣΔ.
- Επαγωγικά, e ακμή επαύξησης για Δ :
 - $\Delta \cup \{e\}$ **δάσος** και **υποσύνολο** κάποιου ΕΣΔ.
- Όταν $|\Delta| = |V| - 1$, Δ δέντρο, άρα και **ΕΣΔ**.

Ορθότητα

□ Έστω δάσος $\Delta \subset \text{ΕΣΔ}$ και $e = \{u, v\}$ **ακμή επαύξησης** Δ .
Τότε $\Delta \cup \{e\} \subseteq \text{ΕΣΔ}$.

■ $(S, V \setminus S)$ τομή που δεν διασχίζει Δ και διασχίζει η ακμή e .

■ e ελάχιστου βάρους μεταξύ ακμών του $\delta(S, V \setminus S)$.

■ Έστω $T \in \text{ΕΣΔ}$ τ.ω. $\Delta \subseteq T$. Υποθέτουμε ότι $\Delta \cup \{e\} \not\subseteq T$

■ Έστω p μονοπάτι $u - v$ στο T , και
 $e' = \{x, y\}$ ακμή T που διασχίζει $(S, V \setminus S)$.

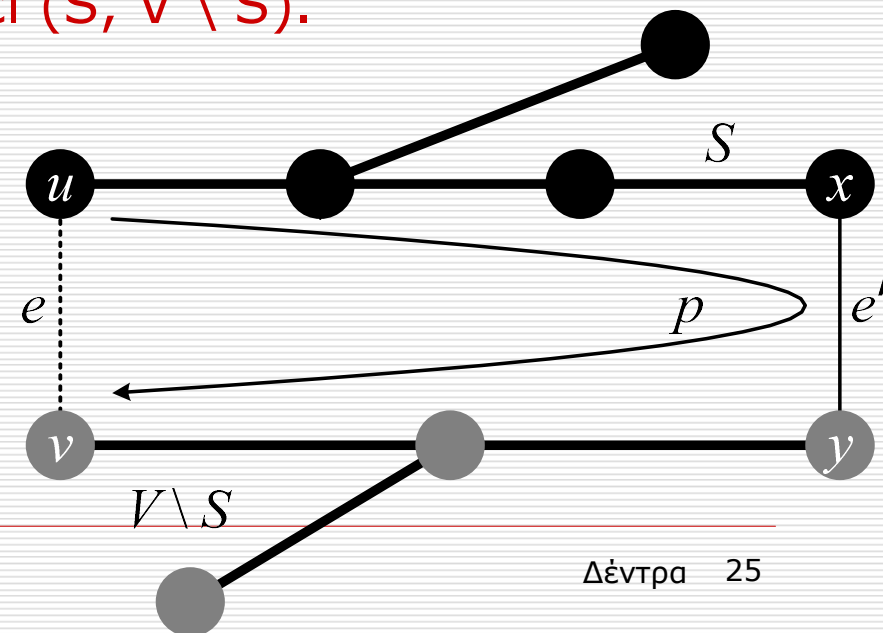
■ Αφού $w(e) \leq w(e')$, και το
 $T' = (T \cup \{e\}) \setminus \{e'\}$ είναι **ΕΣΔ**:

$$w(T') = w(T) + w(e) - w(e') \leq w(T)$$

■ Έχουμε ότι $\Delta \subseteq T$ και $e' \notin \Delta$.

Άρα $\Delta \subseteq T \setminus \{e'\} = T' \setminus \{e\}$

■ ... και $\Delta \cup \{e\} \subseteq T'$



Αλγόριθμος Kruskal

MST-Kruskal($G(V, E, w)$)

Ταξινόμησε ακμές σε αύξουσα σειρά βάρους, $w(e_1) \leq \dots \leq w(e_m)$.

$\Delta \leftarrow \emptyset; i \leftarrow 1;$

while $|\Delta| < |V| - 1$ **and** $i \leq m$ **do**

if $\Delta \cup \{e_i\}$ δεν έχει κύκλο **then**

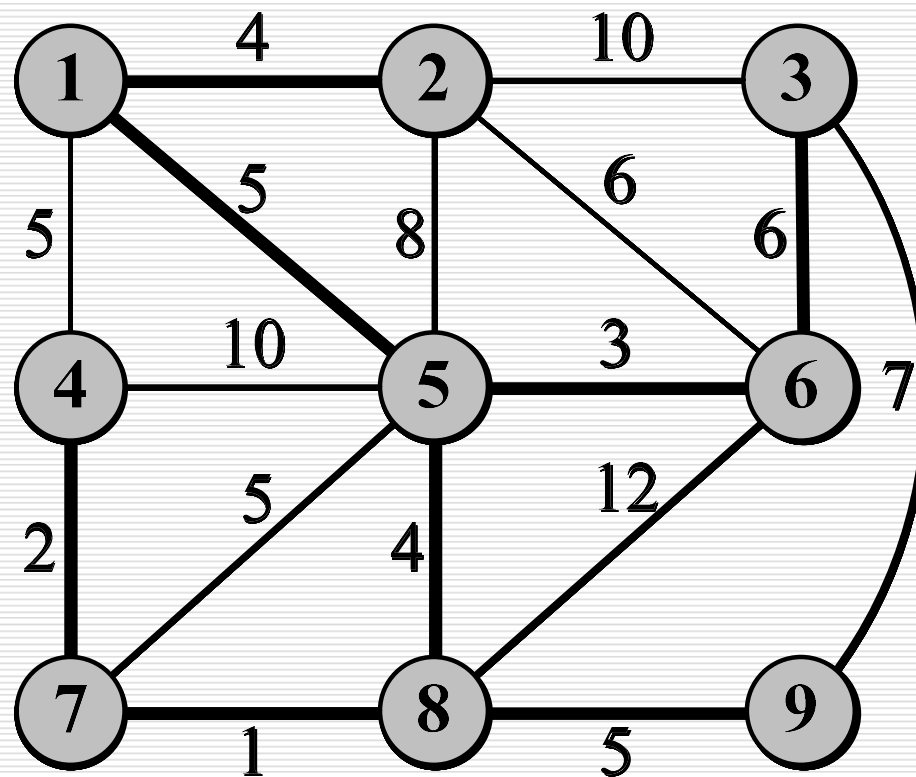
$\Delta \leftarrow \Delta \cup \{e_i\};$

$i \leftarrow i + 1;$

□ **Ορθότητα:** αν e_i προστεθεί τότε:

- Όχι κύκλος, άρα e_i διασχίζει μια τομή που δεν διασχίζει το Δ .
- Αύξουσα σειρά βάρους: e_i ελάχιστου βάρους (πρώτη που ελέγχεται) από όσες ακμές διασχίζουν συγκεκριμένη τομή.

Αλγόριθμος Kruskal: Παράδειγμα



Αλγόριθμος Prim

MST-Prim($G(V, E, w), s$)

for all $u \in V$ **do**

$c[u] \leftarrow \infty$; $p[u] \leftarrow \text{NULL}$;

$c[s] \leftarrow 0$; $S \leftarrow \emptyset$; $\Delta \leftarrow \emptyset$;

while $|S| < |V|$ **do**

$u \notin S : c[u] = \min_{v \notin S} \{c[v]\}$;

$S \leftarrow S \cup \{u\}$;

for all $v \in \text{AdjList}[u]$ **do**

if $v \notin S$ **and** $w(u, v) < c[v]$ **then**

$c[v] \leftarrow w(u, v)$;

$p[v] \leftarrow u$;

if $p[u] \neq \text{NULL}$ **then**

$\Delta \leftarrow \Delta \cup \{u, p[u]\}$;

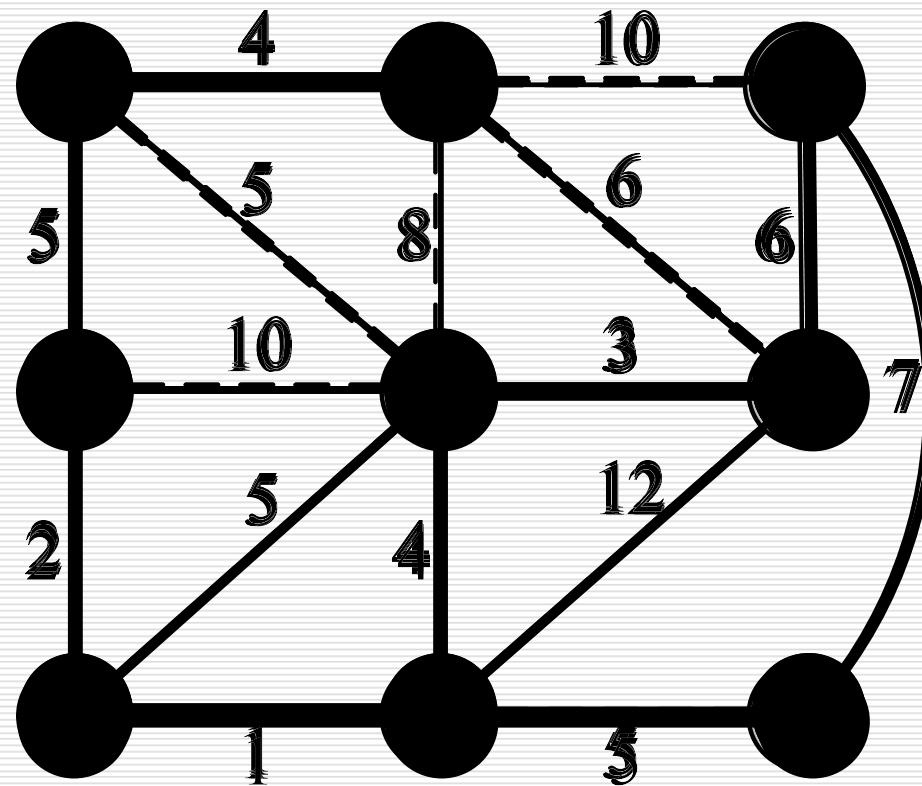
□ Ορθότητα:

■ Ακμή $\{v, p[v]\}$:

□ Διασχίζει τομή $(S, V \setminus S)$.

□ Ελάχιστου βάρους μεταξύ ακμών του $\delta(S, V \setminus S)$.

Αλγόριθμος Prim: Παράδειγμα



Ασκήσεις

- Έστω γράφημα G με διαφορετικά βάρη στις ακμές.
 - Νδο κάθε ΕΣΔ του G περιέχει την ακμή ελάχιστου βάρους.
 - Νδο G έχει μοναδικό ΕΣΔ.
 - Αληθεύει ότι η ακμή μέγιστου βάρους δεν ανήκει στο ΕΣΔ;
- Μεταβολή (αύξηση ή μείωση) βάρους ακμής μετά τον υπολογισμό ενός ΕΣΔ;
- Έστω γράφημα G με κύκλο C .
 - Νδο η ακμή μέγιστου βάρους του C (αν είναι μοναδική) δεν ανήκει σε κανένα ΕΣΔ του G .
- Έστω T ΕΣΔ για γράφημα $G(V, E, w)$.
 - Να δείξετε ότι T παραμένει ΕΣΔ για $G(V, E, w/2)$.
 - Αληθεύει ότι το T παραμένει ΕΣΔ για $G(V, E, w+k)$;

Ασκήσεις

- Υπολογισμός ΕΣΔ T υπό περιορισμούς ότι κάποιες ακμές πρέπει να (μην) ανήκουν στο T ;
- Υπολογισμός ΕΣΔ T (αν υπάρχει) όταν δεδομένο σύνολο κορυφών L πρέπει να είναι φύλλα του T ;
- Υπολογισμός ΣΔ με μέγιστο βάρος;