

# Μετασχηματισμοί, Αναπαράσταση και Ισομορφισμός Γραφημάτων

---

Διδάσκοντες: **Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου**  
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

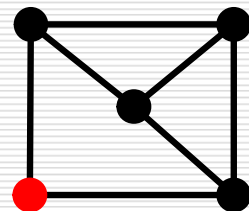
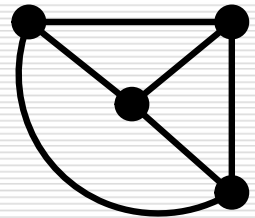
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών  
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



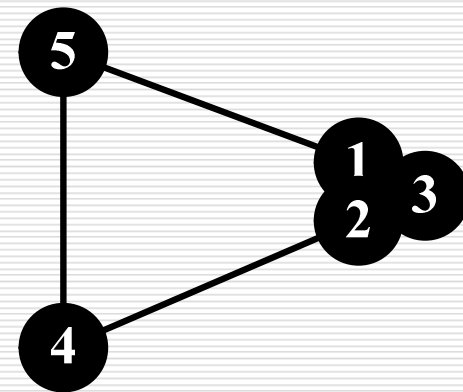
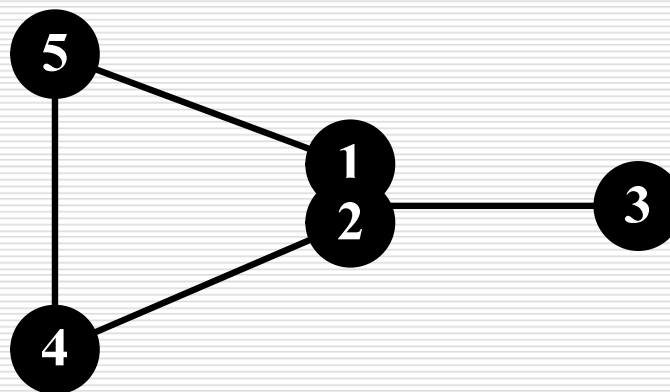
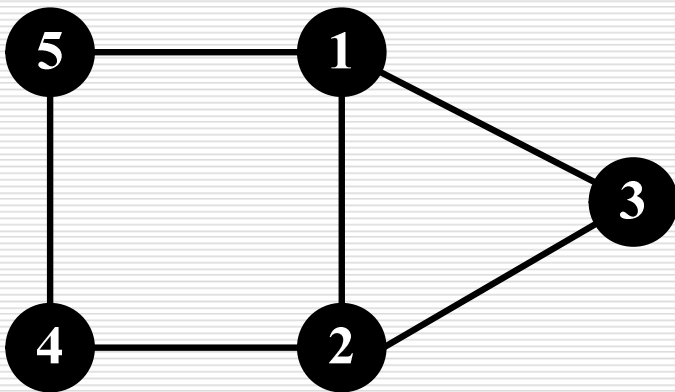
# Τοπικοί Μετασχηματισμοί

- Δεδομένου γραφήματος  $G(V, E)$ :
  - Διαγραφή / προσθήκη ακμής  $e$ :  $G - e$  και  $G + e$
  - Διαγραφή κορυφής  $v$ :  $G - v$ 
    - Αφαιρούμε  $v$  και όλες τις ακμές που προσπίπτουν στη  $v$ .
  - Υποδιαίρεση ακμής  $\{u, v\}$ : νέα κορυφή  $w$  «παρεμβάλλεται» στην  $\{u, v\}$  και έχουμε  $\{u, w\}, \{w, v\}$  αντί της  $\{u, v\}$ .
  - Απλοποίηση σειράς (κορυφής  $w$  βαθμού 2): ακμές  $\{u, w\}, \{w, v\}$  αντικαθίστανται από  $\{u, v\}$ .
  - $k$ -οστή δύναμη του  $G$ :  $G^k$ 
    - Ίδιο σύνολο κορυφών  $V$ .
    - Κορυφές  $u$  και  $v$  ενώνονται με ακμή στο  $G^k$  αν συνδέονται με μονοπάτι μήκους  $\leq k$  στο  $G$ .



# Σύμπτυξη Ακμής

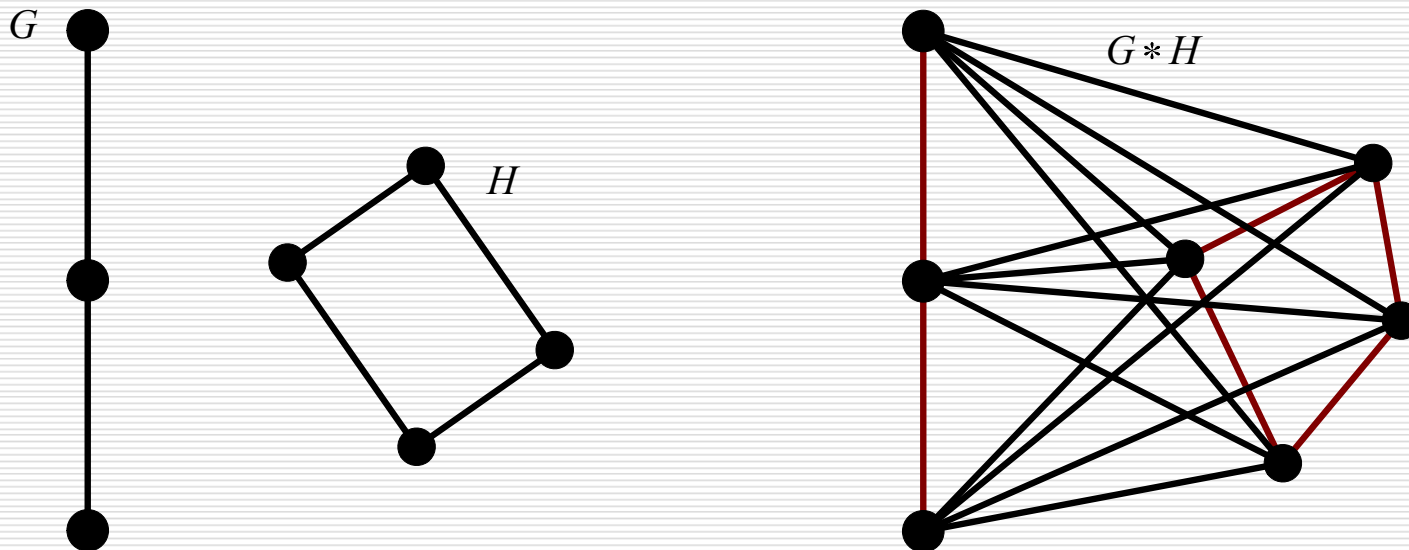
- Σύμπτυξη (contraction) ακμής  $\{u, v\}$ :
  - Αντικατάσταση  $u, v$  από μία νέα κορυφή  $uv$ .
  - Κάθε ακμή  $\{x, u\} / \{x, v\}$  αντικαθίσταται από ακμή  $\{x, uv\}$ .
  - Ακμή  $\{u, v\}$  και πιθανές παράλληλες ακμές παραλείπονται (εκτός αν θεωρούμε πολυγραφήματα).



# Σύνδεση Γραφημάτων

- **Σύνδεση** (join)  $G*H$  δύο γραφημάτων  $G$  και  $H$ :
  - Διατηρούμε τα γραφήματα  $G$  και  $H$  ως έχουν.
  - Συνδέουμε όλες τις κορυφές του  $G$  με όλες τις κορυφές του  $H$ .

$$G*H = (V(G) \cup V(H), E(G) \cup E(H) \cup \{\{u, v\} : u \in V(G), v \in V(H)\})$$

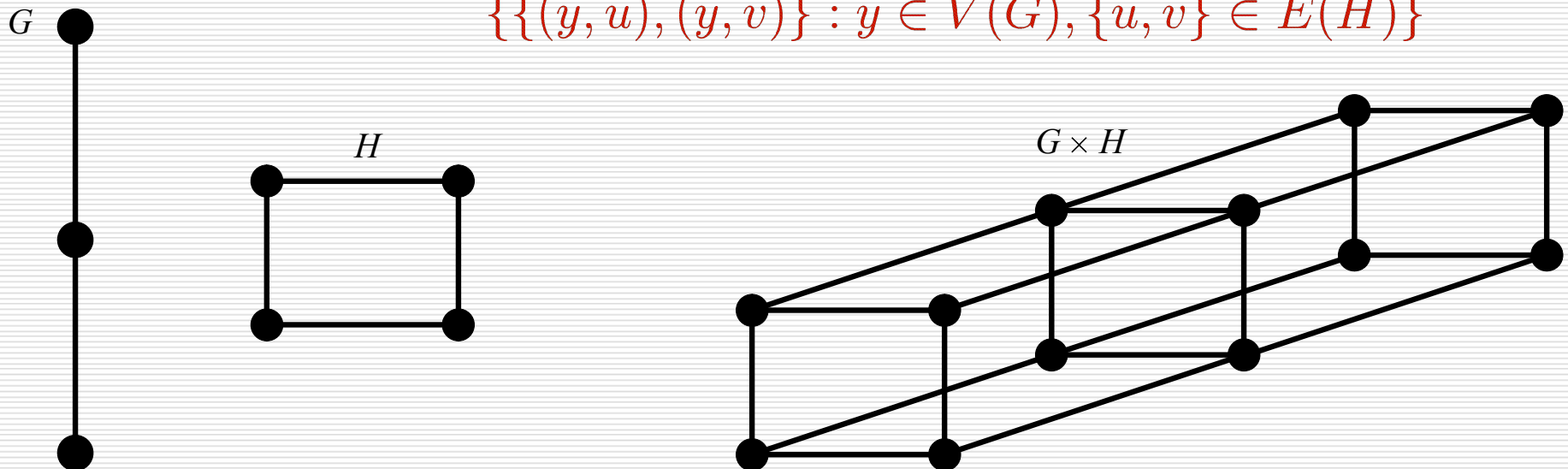


# Γινόμενο Γραφημάτων

- (Καρτεσιανό) γινόμενο (product)  $G \times H$  γραφημάτων  $G$  και  $H$ :
  - Γράφημα με  $V(G) \times V(H)$  κορυφές που περιέχει ένα αντίγραφο του  $H$  για κάθε κορυφή του  $G$  και ένα αντίγραφο του  $G$  για κάθε κορυφή του  $H$ .

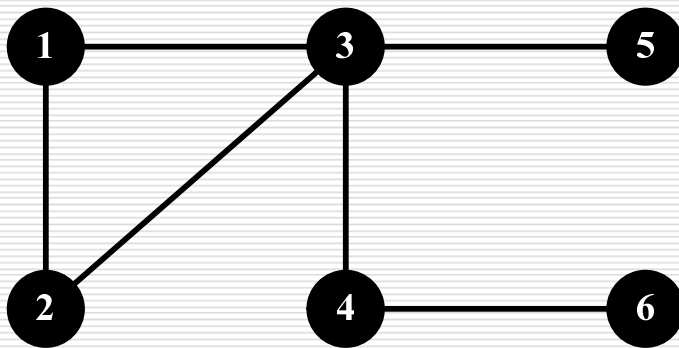
$$V(G \times H) = \{(u, v) : u \in V(G), v \in V(H)\}$$

$$E(G \times H) = \{ \{(u, x), (v, x)\} : \{u, v\} \in E(G), x \in V(H) \} \cup \{ \{(y, u), (y, v)\} : y \in V(G), \{u, v\} \in E(H) \}$$



# Αναπαράσταση Γραφημάτων

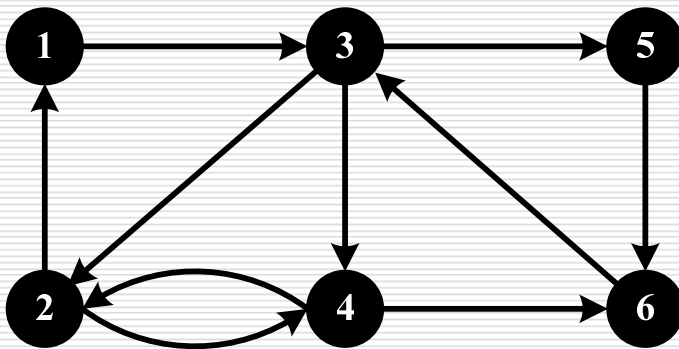
- ... με **πίνακα γειτνίασης**:  $A[i, j] = \begin{cases} 1 & (v_i, v_j) \in E \\ 0 & (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$
- Αν έχουμε βάρη,  $A[i, j] = w(v_i, v_j)$
- (Απλό) μη κατευθυνόμενο: **συμμετρικός**, διαγώνιος 0.
- Άθροισμα στοιχείων γραμμής (στήλης): **βαθμός** κορυφής.



	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	0	0	0
2	1	0	1	0	0	0
3	1	1	0	1	1	0
4	0	0	1	0	0	1
5	0	0	1	0	0	0
6	0	0	0	1	0	0

# Αναπαράσταση Γραφημάτων

- ... με **πίνακα γειτνίασης**:  $A[i, j] = \begin{cases} 1 & (v_i, v_j) \in E \\ 0 & (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$
- Αν έχουμε βάρη,  $A[i, j] = w(v_i, v_j)$
- Άθροισμα στοιχείων γραμμής / στήλης σε κατευθυνόμενο:  
έξω-βαθμός / έσω-βαθμός κορυφής.



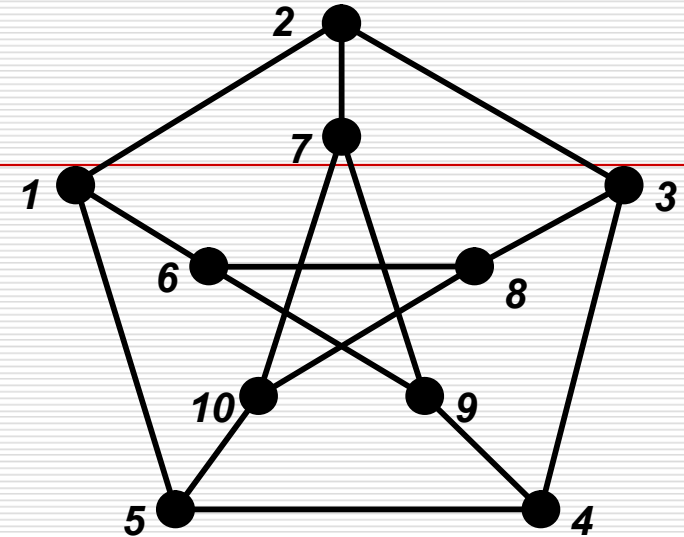
	1	2	3	4	5	6
1	0	0	1	0	0	0
2	1	0	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0	1
6	0	0	1	0	0	0

# Πίνακας Γειτνίασης

- $A^k[u_i, u_j]$  = # διαδρομών  $u_i - u_j$  μήκους  $k$  (απλά γραφήματα).
  - Απόδειξη με επαγωγή και πολλαπλασιασμό πινάκων.
  - Διαγώνιος τετραγώνου (μη κατευθυνόμενα):  $A^2[u_i, u_i]$  = βαθμός( $u_i$ ).
  - $A^3[u_i, u_i]$  =  $2 \times$  #τριγώνων που συμμετέχει  $u_i$ .
  - Πλήθος τριγώνων =  $\sum_{i=1}^n A^3[u_i, u_i]/6$
- $Y[u_i, u_j]$  = # διαδρομών  $u_i - u_j$  μήκους  $\leq n - 1$ .  $Y = \sum_{k=1}^{n-1} A^k$ 
  - Μονοπάτια έχουν μήκος  $\leq n - 1$ , και διαδρομή ανν μονοπάτι.
  - Γράφημα **συνεκτικό** ανν **όλα** τα **στοιχεία** του  $Y$  **θετικά** ( $> 0$ ).
- Μήκος ελάχιστου (# ακμών)  $u_i - u_j$  μονοπατιού:
  - **Ελάχιστη** τιμή  $k$  ώστε  $A^k[u_i, u_j] > 0$ .

# Πίνακας Πρόσπτωσης

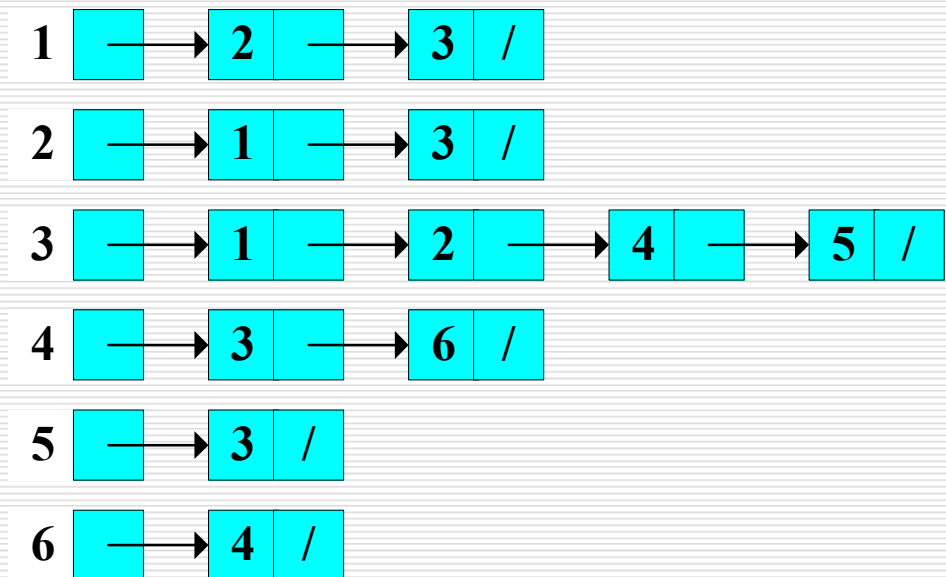
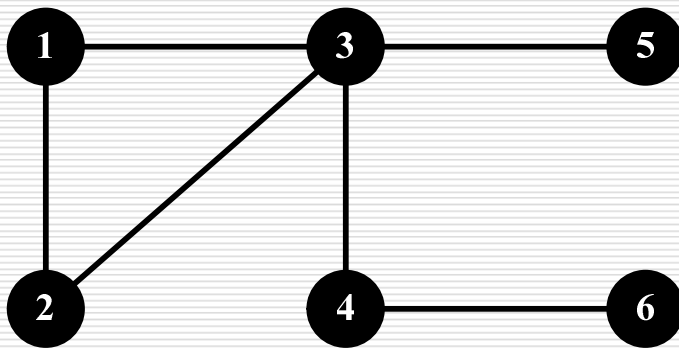
$$A[i, j] = \begin{cases} 1 & \text{αν } v_i \in e_j \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$



	1,2	1,5	1,6	2,3	2,7	3,4	3,8	4,5	4,9	5, 10	6,8	6,9	7,9	7, 10	8, 10
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
5	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
6	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
7	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
8	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1

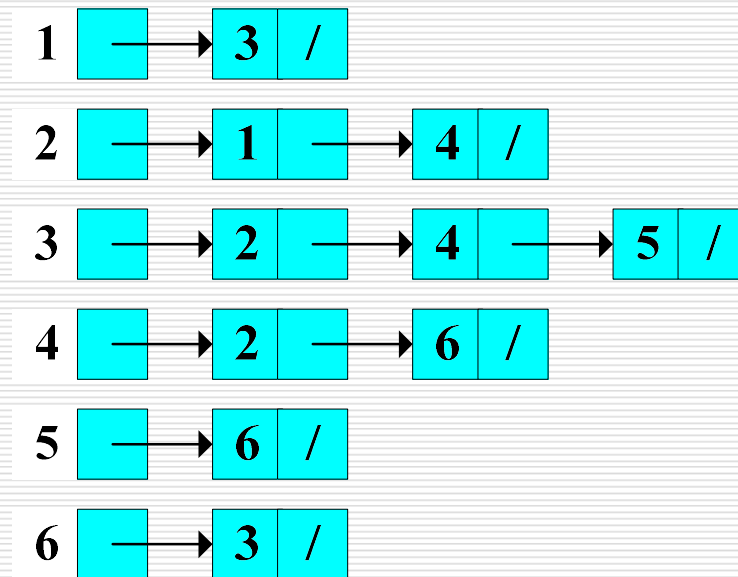
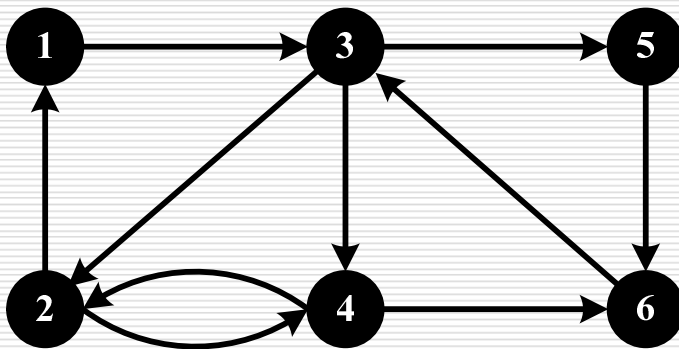
# Αναπαράσταση Γραφημάτων

- Στον υπολογιστή: με **λίστα γειτνίασης**: γειτονικές κορυφές **σε λίστα**.
  - Βάρη αποθηκεύονται στους κόμβους της λίστας.



# Αναπαράσταση Γραφημάτων

- Στον υπολογιστή: με **λίστα γειτνίασης**: γειτονικές κορυφές **σε λίστα**.
  - Βάρη αποθηκεύονται στους κόμβους της λίστας.
  - Αλγόριθμοι συνήθως λειτουργούν κατά γειτονιές.
  - Οικονομία χώρου.



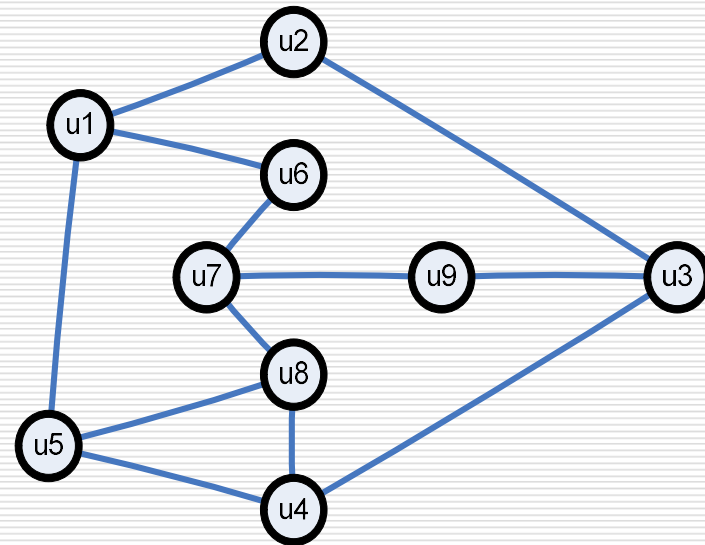
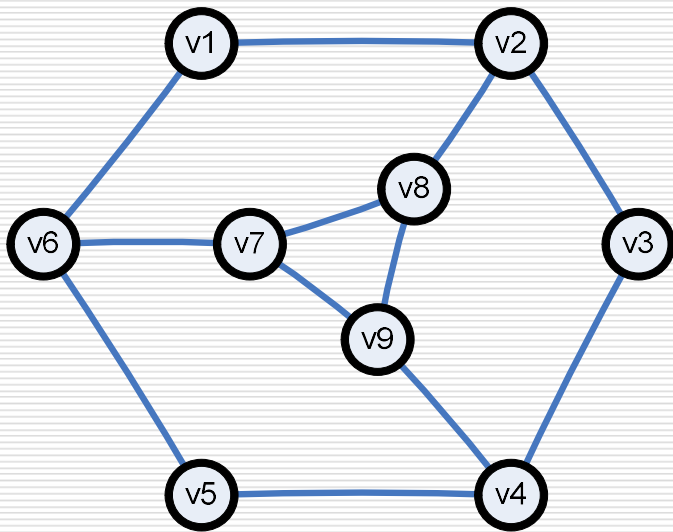
# Ισομορφικά Γραφήματα

---

- Γραφήματα  $G(V_G, E_G)$  και  $H(V_H, E_H)$  είναι **ισομορφικά** ανν υπάρχει **1-1 και επί** συνάρτηση  $f: V_G \rightarrow V_H$  (**ισομορφισμός**) ώστε για κάθε  $u, v \in V_G$ ,  $\{u, v\} \in E_G$  ανν  $\{f(u), f(v)\} \in E_H$ 
  - Υπάρχει **αντιστοιχία κορυφών** που διατηρεί τη **γειτονικότητα**.
  - Ισομορφισμός αποτελεί **σχέση ισοδυναμίας**.
- **Αναλλοίωτη ιδιότητα:** ισομορφικά γραφήματα «συμφωνούν».
  - Όλες οι σημαντικές ιδιότητες: **#κορυφών**, **#ακμών**, **βαθμοί**, **συνεκτικότητα**, **κύκλος Euler και Hamilton**, **χρωματικός αριθμός**, ...
- Πως αποδεικνύουμε ότι δύο γραφήματα ισομορφικά:
  - Βρίσκουμε ισομορφισμό και ελέγχουμε ότι διατηρεί γειτονικότητα.
  - Αποδεικνύουμε ότι τα συμπληρωματικά τους είναι ισομορφικά.

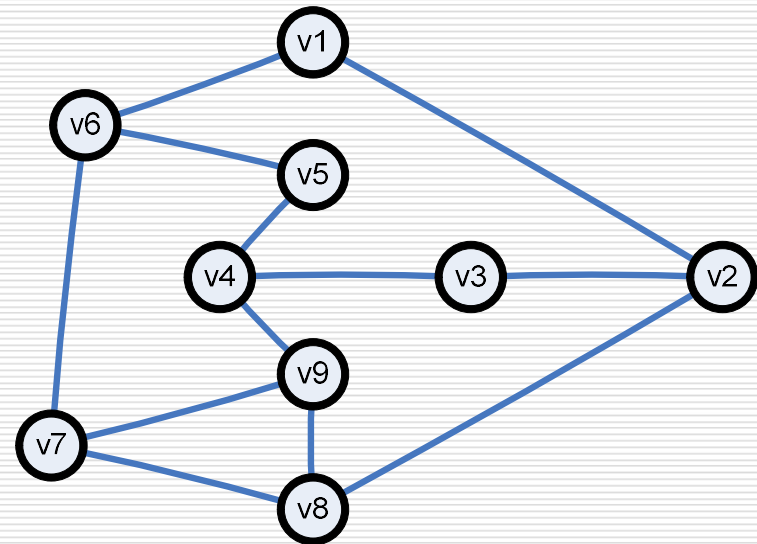
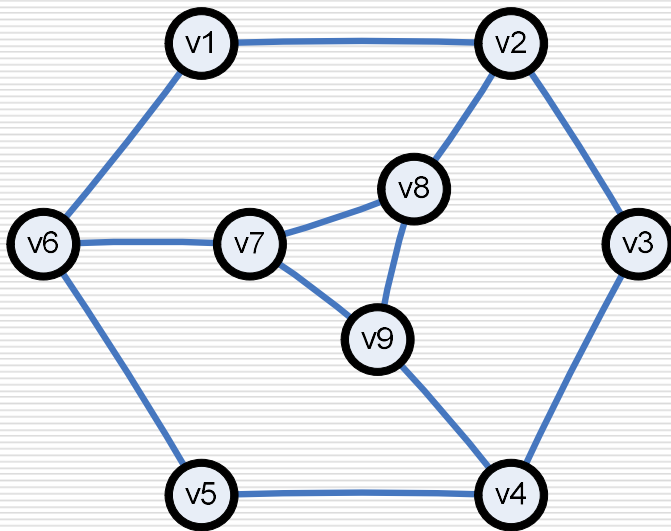
# Ισομορφικά Γραφήματα

---



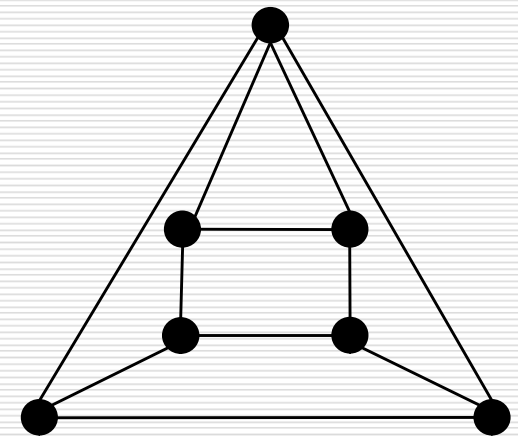
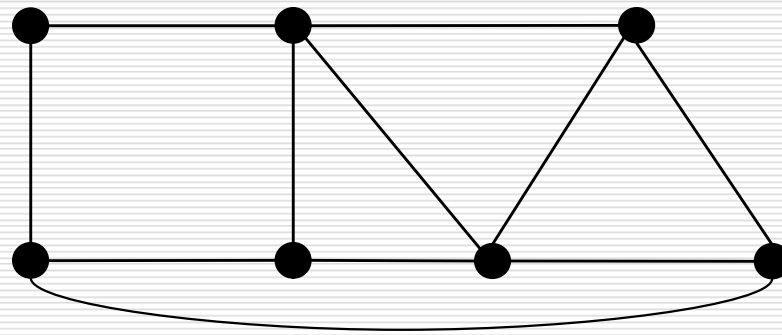
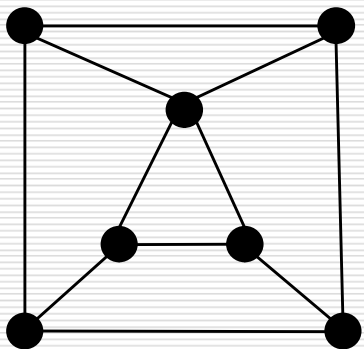
# Ισομορφικά Γραφήματα

---



# Ισομορφικά Γραφήματα

---



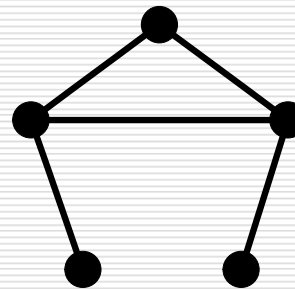
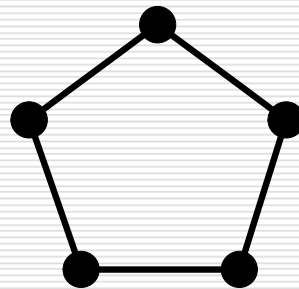
# Ισομορφικά Γραφήματα

---

- Πως αποδεικνύω ότι δύο γραφήματα δεν είναι ισομορφικά:
  - Βρίσκω μια αναλλοίωτη ιδιότητα στην οποία «διαφωνούν».
  - Να βρούμε όλα τα **μη ισομορφικά** συνεκτικά γραφήματα με 6 κορυφές, 4 κορ. βαθμού 3 και 2 κορ. βαθμού 4.
- **Αυτοσυμπληρωματικό γράφημα:** γράφημα ισομορφικό με το συμπληρωματικό του.
  - Αυτοσυμπληρωματικό γράφημα έχει  $n(n-1)/4$  ακμές.
  - Αυτοσυμπληρωματικά γραφήματα υπάρχουν μόνο αν  $n$  ή  $n-1$  είναι **πολλαπλάσιο του 4**.
  - Νδο κάθε αυτοσυμπληρωματικό γράφημα είναι **συνεκτικό**.

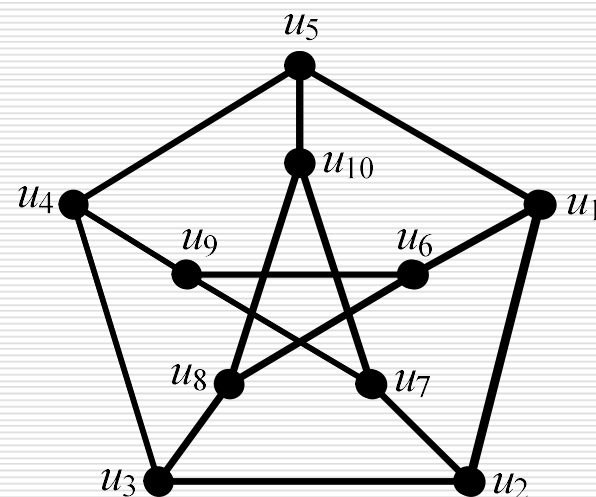
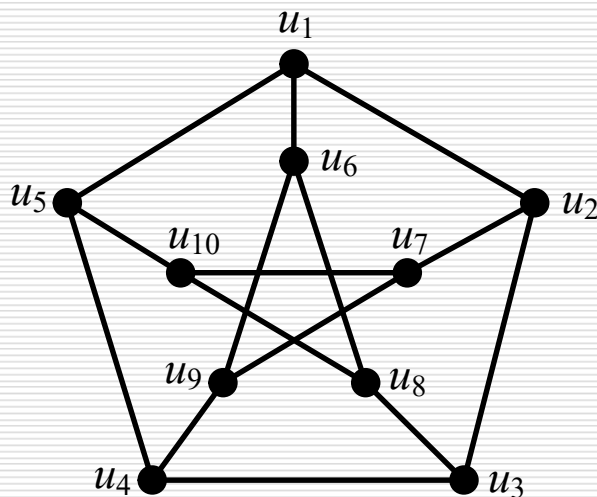
# Αυτοσυμπληρωματικά Γραφήματα

- **Αυτοσυμπληρωματικό γράφημα:** γράφημα ισομορφικό με το συμπληρωματικό του.
  - Αυτοσυμπληρωματικό γράφημα έχει  $n(n-1)/4$  ακμές.
  - Υπάρχουν αυτοσυμπληρωματικά γραφήματα για:
    - $n = 1$ : μεμονωμένη κορυφή.
    - $n = 4$ : μονοπάτι μήκους 3
    - $n = 5, 8, 9, \dots$ :



# Αυτομορφισμός

- Ισομορφισμός ενός γραφήματος στον εαυτό του.
  - Εκφράζει «**συμμετρία**» γραφήματος: αντιστοιχία κορυφών με βάση τους «**ρόλους**» τους – διατηρεί **δομή** γραφήματος.
  - **Ταυτοτικός** αυτομορφισμός (υπάρχει τετριμμένα). Αν δεν υπάρχουν άλλοι αυτομορφισμοί, γράφημα είναι **μη συμμετρικό**.
  - Αυτομορφισμοί μονοπατιού, κύκλου, τροχού, Petersen.



# Αυτομορφισμός

- Ισομορφισμός ενός γραφήματος στον εαυτό του.
  - Εκφράζει «συμμετρία» γραφήματος: αντιστοιχία κορυφών με βάση τους «ρόλους» τους – διατηρεί δομή γραφήματος.
  - Όλα τα συνεκτικά γραφήματα με 2, 3, 4, και 5 κορυφές είναι συμμετρικά.
  - Παραδείγματα μη συμμετρικών γραφημάτων:

