

# Στοιχεία Κατηγορηματικής Λογικής

---

Διδάσκοντες: **Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου**  
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών  
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



# Κατηγορηματική Λογική

---

- **Προτασιακή Λογική:** πλαίσιο διατύπωσης και μελέτης επιχειρημάτων για πεπερασμένο πλήθος «λογικών αντικειμένων».
  - «Λογικό αντικείμενο»: παίρνει τιμές αλήθειας,  $A$  ή  $\Psi$ .
  - Διαφορετικά, «μη λογικό αντικείμενο», π.χ. αριθμοί, σύνολα, ...
- **Κατηγορηματική (ή Πρωτοβάθμια) Λογική:** πλαίσιο διατύπωσης και μελέτης επιχειρημάτων για:
  - «Μη λογικά αντικείμενα» (αριθμούς, σύνολα, γραφήματα).
  - **Πράξεις** (συναρτήσεις) και **σχέσεις** (κατηγορήματα) μεταξύ τους.
  - Άπειρο πλήθος αντικειμένων: ποσοδείκτες.
  - «Κάθε φυσικός αριθμός είναι είτε άρτιος είτε περιττός».
  - «Υπάρχει σύνολο που είναι υποσύνολο κάθε συνόλου».
  - Τύποι ΚΛ είναι «λογικά αντικείμενα» που μπορεί να αφορούν / αναφέρονται σε «μη λογικά αντικείμενα».

# ΣΥΝΤΑΚΤΙΚΟ Πρωτοβάθμιας Γλώσσας

---

- «Λογικά Σύμβολα»: έχουν συγκεκριμένη ερμηνεία, λειτουργούν πάντα με τον ίδιο τρόπο:
  - Λογικοί σύνδεσμοι:  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
  - Ποσοδείκτες:  $\forall$  και  $\exists$ 
    - $\forall$  (για κάθε): **σύζευξη** για όλα στοιχεία δομής (δυνάμει άπειρη).
    - $\exists$  (υπάρχει): **διάζευξη** για όλα στοιχεία δομής (δυνάμει άπειρη).
  - Σημεία στίξης και παρενθέσεις.

# ΣΥΝΤΑΚΤΙΚΟ Πρωτοβάθμιας Γλώσσας

---

- «Μη Λογικά Σύμβολα»: ερμηνεία καθορίζει λειτουργία τους.
  - Ορισμός γλώσσας και έλεγχος αλήθειας απαιτούν ερμηνεία τους (πολυσημία, εκφραστικότητα!).
  - Μεταβλητές  $x, y, z, \dots$ 
    - Ερμηνεία καθορίζει πεδίο ορισμού μεταβλητών: **σύμπαν**.
    - **Ελεύθερες**: τιμή τους καθορίζεται με **αποτίμηση**.
    - **Δεσμευμένες**: **ποσοδείκτες** καθορίζουν «συμπεριφορά» τους.
  - Σύμβολα **σταθερών**  $c, c_1, c_2, \dots$ 
    - Αναπαριστούν **συμβολικά συγκεκριμένες τιμές** σύμπαντος.
    - Ερμηνεία καθορίζει **τιμή** κάθε συμβόλου σταθεράς.
    - Πρόκειται για 0-θέσια συναρτησιακά σύμβολα.

# ΣΥΝΤΑΚΤΙΚΟ Πρωτοβάθμιας Γλώσσας

---

- «Μη Λογικά Σύμβολα»: ερμηνεία καθορίζει λειτουργία τους.
  - **Συναρτησιακά** σύμβολα  $f, g, h, \dots$ , με αντίστοιχο πλήθος ορισμάτων.
    - Π.χ.  $f$  είναι 2-θέσιο συναρτησιακό σύμβολο.
    - Εκφράζουν «**πράξεις**» μεταξύ στοιχείων σύμπαντος.
    - Ερμηνεία καθορίζει πεδίο ορισμού, πεδίο τιμών, και **λειτουργία**.
  - **Κατηγορηματικά** σύμβολα  $P, Q, R, \dots$ , με αντίστοιχο πλήθος ορισμάτων.
    - Π.χ.  $Q$  είναι 2-μελές κατηγορηματικό σύμβολο.
    - Εκφράζουν «**σχέσεις**» μεταξύ στοιχείων σύμπαντος.
    - Ερμηνεία καθορίζει πεδίο ορισμού και **λειτουργία**.
    - **Ισότητα**  $=$  : ελέγχει **ταύτιση** (λειτουργεί ως κατηγορήμα), αλλά έχει δεδομένη ερμηνεία.
  - Κατηγορηματικά σύμβολα υλοποιούν «**μετάβαση**» από «μη λογικό» σε «λογικό» κόσμο.
    - $Q(x, y)$  δέχεται δύο στοιχεία σύμπαντος (π.χ. αριθμούς), «ελέγχει» αν σχετίζονται με συγκεκριμένο τρόπο, και «**απαντά**»  $A$  ή  $\Psi$ .

# Δομή Τύπων

## Πρωτοβάθμιας Γλώσσας: Όροι

---

- Όροι παίρνουν **τιμές στο σύμπαν**.
  - Μεταβλητές  $x, y, z, \dots$
  - Σταθερές  $c, c_1, c_2, \dots$
  - Οτιδήποτε προκύπτει από (σωστή) **εφαρμογή συναρτησιακού συμβόλου** σε ήδη σχηματισμένους όρους.
    - Π.χ.  $f(x, y), f(g(x), c), g(f(x), g(y)),$
    - Δεν εφαρμόζονται λογικοί σύνδεσμοι σε όρους!  
Π.χ., το  $c \oplus f(x, y)$  είναι λάθος συντακτικά.
- Δομή αναπαρίσταται με δένδροδιάγραμμα, ιδιότητες αποδεικνύονται με δομική επαγωγή.
- Όροι **δεν** μπορούν να συνδέονται με **λογικούς συνδέσμους!**

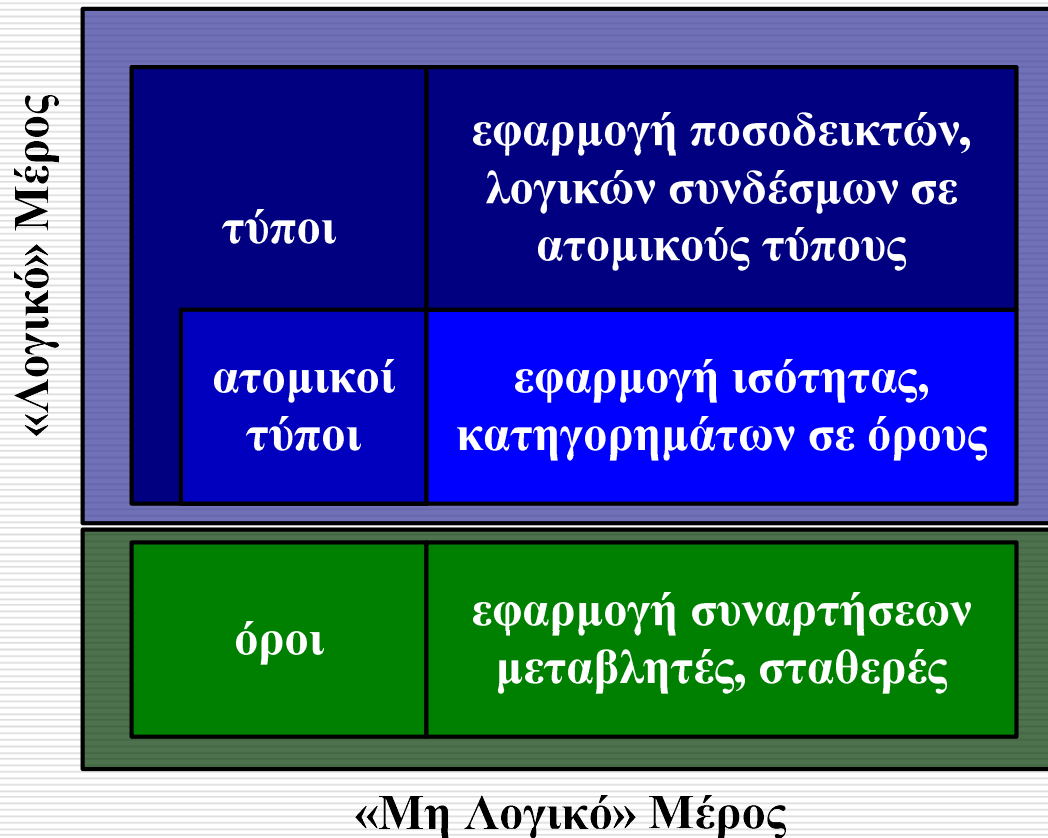
# Δομή Τύπων

## Πρωτοβάθμιας Γλώσσας: Τύποι

---

- **Ατομικοί τύποι** προκύπτουν εφαρμόζοντας **ισότητα ή κατηγορηματικό** σύμβολο σε **όρους**.
  - Π.χ.  $x = c$ ,  $f(x, y) = g(c)$ ,  $Q(x, y)$ ,  $R(f(x, y))$ , ...
  - «Λογικές» τιμές **A ή  $\Psi$** , βασικά («λογικά») δομικά στοιχεία τύπων.
- **Τύπος**:
  - **Ατομικός τύπος** (βάση επαγωγικού ορισμού).
  - Εφαρμογή **λογικών συνδέσμων** σε τύπους  $\varphi$ ,  $\psi$ :  
 $\neg\varphi$ ,  $\varphi \vee \psi$ ,  $\varphi \wedge \psi$ ,  $\varphi \rightarrow \psi$ ,  $\varphi \leftrightarrow \psi$ .
  - Εφαρμογή **ποσοδεικτών** σε τύπο  $\varphi$ :  $\exists x\varphi$ ,  $\forall x\varphi$ .
- Δομή αναπαρίσταται με δένδροδιάγραμμα, ιδιότητες αποδεικνύονται με μαθηματική επαγωγή.
- **Τύποι**: τιμή **A ή  $\Psi$** . **Όροι**: τιμές **στο σύμπαν**.

# Δομή Τύπων Πρωτοβάθμιας Γλώσσας





# Παράδειγμα

- Ποια από τα παρακάτω είναι **όροι** ή **τύποι** (ή **συντακτικό λάθος**);
- |  |   |
|--|---|
| ■ $Q(f(c, y), P(x))$   | $g(Q(c, y), P(y))$                        |
| ■ $Q(f(c, y), \mathbf{P(x)})$                                      | $g(\mathbf{Q(c, y)}, \mathbf{P(y)})$      |
| ■ $\forall x P(g(x))$  | $\forall x g(P(x))$                       |
| ■ $\forall x P(g(x)) (\tau)$                                       | $\forall x \mathbf{g(P(x))}$              |
| ■ $x = y \vee c$   | $x = f(y, c)$                             |
| ■ $x = \mathbf{y} \vee \mathbf{c}$                                 | $x = f(y, c) (\alpha\tau)$                |
| ■ $\forall x P(P(x))$  | $\exists x Q(x, c_1)$                     |
| ■ $\forall x P(\mathbf{P(x)})$                                     | $\exists x Q(x, c_1) (\tau)$              |
| ■ $\exists x (P(x) \vee \neg \forall x P(x, x))$                   | $\exists x (x = y \wedge Q(x, y))$        |
| ■ $\exists x (\mathbf{P(x)} \vee \neg \forall x \mathbf{P(x, x)})$ | $\exists x (x = y \wedge Q(x, y)) (\tau)$ |

# Παράδειγμα

- Ποια από τα παρακάτω είναι **όροι** ή **τύποι** (ή **συντακτικό λάθος**);
- $P(x) \vee g(x)$   $\forall y \exists x (Q(x, g(y)) \vee P(g(x)))$
  - $P(x) \vee g(x)$   $\forall y \exists x (Q(x, g(y)) \vee P(g(x)))$  (τ)
  - $\exists x Q(x, c)$   $\forall \exists x Q(x, y)$
  - $\exists x Q(x, c)$  (τ)  $\forall \exists x Q(x, y)$
  - $x + y = x * y$   $(3 + 1) + 10$
  - $x + y = x * y$  (ατ)  $(3 + 1) + 10$  (ορ)
  - $\forall x \exists y (x + y = x * y)$   $\forall x \exists y (P(x) \vee (Q(x, y) \rightarrow \neg P(x)))$
  - $\forall x \exists y (x + y = x * y)$  (τ)  $\forall x \exists y (P(x) \vee (Q(x, y) \rightarrow \neg P(x)))$  (τ)

# Ελεύθερες και Δεσμευμένες Μεταβλητές

- Δεσμευμένη **εμφάνιση** μεταβλητής: εμπίπτει σε **πεδίο εφαρμογής** ποσοδείκτη.
  - Ποσοδείκτης καθορίζει πως αποτιμάται η μεταβλητή.
  - $\forall$  ( $\exists$ ): σύζευξη (διάζευξη) για όλες τιμές σύμπαντος.
  - Δεσμευμένες εμφανίσεις μεταβλητής  $x$  που εμπίπτουν **στον ίδιο** ποσοδείκτη: «ίδια» δεσμευμένη μεταβλητή.
  - Δεσμευμένες εμφανίσεις μεταβλητής  $x$  που εμπίπτουν **σε διαφορετικό** ποσοδείκτη: «διαφορετικές» δεσμευμένες μεταβλητές.
- Ελεύθερη **εμφάνιση** μεταβλητής: **δεν** εμπίπτει σε πεδίο εφαρμογής κάποιου ποσοδείκτη.
  - Μπορεί να έχει **οποιαδήποτε τιμή**, η οποία καθορίζεται από **αποτίμηση**.
  - Όλες οι **ελεύθερες** εμφανίσεις μεταβλητής  $x$ : «ίδια» μεταβλητή.
- $\exists \mathbf{x}(P(\mathbf{x}) \wedge Q(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \wedge P(\mathbf{y})$  και  $\exists \mathbf{x}P(\mathbf{x}) \wedge \exists \mathbf{x}Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \wedge P(\mathbf{y})$

# Ελεύθερες και Δεσμευμένες Μεταβλητές

---

- **Ελεύθερη μεταβλητή** αν εμφανίζεται ελεύθερη (τουλ. μία φορά), διαφορετικά **δεσμευμένη**.
- **Πρόταση**: τύπος χωρίς ελεύθερες μεταβλητές.  
Τιμή αλήθειας πρόταση δεν εξαρτάται από αποτίμηση.

# Ελεύθερες και Δεσμευμένες Μεταβλητές

- Ποιές εμφανίσεις μεταβλητών είναι **ελεύθερες** και ποιές **δεσμευμένες**;

■  $\forall y \exists x (P(x, f(y)) \vee Q(x))$        $\forall x \exists y (Q(x) \vee P(x, y)) \rightarrow \neg Q(x)$

■  $\forall \mathbf{y} \exists \mathbf{x} (P(\mathbf{x}, f(\mathbf{y})) \vee Q(\mathbf{x}))$        $\forall \mathbf{x} \exists \mathbf{y} (Q(\mathbf{x}) \vee P(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \rightarrow \neg Q(\mathbf{x})$

■  $\forall x P(x, y) \rightarrow \forall z P(z, x)$        $Q(z) \rightarrow \neg \forall x \forall y P(x, y)$

■  $\forall \mathbf{x} P(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \forall \mathbf{z} P(\mathbf{z}, \mathbf{x})$        $Q(\mathbf{z}) \rightarrow \neg \forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} P(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

■  $\forall x Q(x) \rightarrow \forall y P(x, y)$        $\forall x \forall y \forall z (x > y \wedge y > z) \rightarrow \exists w (x > w)$

■  $\forall \mathbf{x} Q(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{y} P(\mathbf{x}, \mathbf{y})$        $\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} \forall \mathbf{z} (\mathbf{x} > \mathbf{y} \wedge \mathbf{y} > \mathbf{z}) \rightarrow \exists \mathbf{w} (\mathbf{x} > \mathbf{w})$

■  $y + x = x + y$        $\exists y (x + x = x * y)$

■  $\mathbf{y} + \mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$        $\exists \mathbf{y} (\mathbf{x} + \mathbf{x} = \mathbf{x} * \mathbf{y})$

- Μετονομασία **όλων εμφανίσεων** της «ίδιας» μεταβλητής διατηρεί **απαράλλακτο** τον τύπο: **αλφαβητική παραλλαγή**.

# Ελεύθερες και Δεσμευμένες Μεταβλητές

---

- **Ελεύθερη μεταβλητή** αν εμφανίζεται ελεύθερη (τουλ. μία φορά), διαφορετικά **δεσμευμένη**.
- **Πρόταση**: τύπος χωρίς ελεύθερες μεταβλητές.  
Τιμή αλήθειας πρόταση δεν εξαρτάται από αποτίμηση.
- Ελεύθερες μεταβλητές χρειάζονται **«αρχικοποίηση»**.
  - Όλες οι **ελεύθερες** εμφανίσεις μιας μεταβλητής «αρχικοποιούνται» στην **ίδια τιμή** (αυτή που καθορίζεται από **αποτίμηση**).
- Δεσμευμένες εμφανίσεις μεταβλητών **δεν** χρειάζονται **«αρχικοποίηση»**.
  - Ποσοδείκτης που τις δεσμεύει καθορίζει αποτίμηση.
  - Μεταβλητές που δεσμεύονται από **διαφορετικούς ποσοδείκτες** είναι **«διαφορετικές»** (ακόμη και αν έχουν το ίδιο όνομα).

# Ερμηνεία (ή Δομή)

---

- Ορισμός Πρωτοβάθμιας Γλώσσας **απαιτεί ερμηνεία** «μη λογικών» συμβόλων.
- Ερμηνεία (ή δομή)  $A$  καθορίζει:
  - **Σύμπαν  $|A|$** : πεδίο ορισμού σταθερών, μεταβλητών, συναρτήσεων, και κατηγορημάτων.
    - $|A|$  είναι το **σύνολο αντικειμένων** στα οποία αναφερόμαστε.
  - **Ορισμός συναρτησιακών συμβόλων**: «**πράξη**» που αντιστοιχούν.
    - Τι «επιστρέφει» κάθε συναρτησιακό σύμβολο.
  - **Ορισμός κατηγορηματικών συμβόλων**: «**σχέση**» που αντιστοιχούν.
    - Πότε κατηγορηματικό σύμβολο «επιστρέφει»  $A$  και πότε  $\Psi$ .
  - Ορισμός **τιμής** για κάθε σύμβολο **σταθεράς**.

# Παραδείγματα Ερμηνείας

---

## □ Γλώσσα Θεωρίας Αριθμών:

- Σύμπαν  $\mathbf{N}$  (φυσικοί αριθμοί)
- Σταθερά  $\mathbf{0}$  (αποτ. στο  $0$ ), συναρτησιακά  $\oplus$  (πρόσθεση),  $\otimes$  (πολλαπλασιασμός), και  $'$  (επόμενος φυσικός),
- κατηγορηματικό  $<$  (αντ. σε σχέση  $x < y$ ).

## □ Γλώσσα Θεωρίας Συνόλων:

- Σύμπαν δυναμοσύνολο συνόλου  $U$  (ή σύνολο με στοιχεία σύνολα)
- Σταθερά  $\emptyset$  (αποτ. στο  $\emptyset$ ),
- κατηγορηματικό  $\subseteq$  (αντ. σε σχέση  $x \subseteq y$ ).



# Εναλλαγή Ποσοδεικτών

	$P(x, y)$ : ο $x$ θαυμάζει τον $y$	$P(x, y)$ : $x \leq y$
$\forall x \exists y P(x, y)$	όλοι θαυμάζουν κάποιον (όχι αναγκαία όλοι τον ίδιο, μπορεί τον εαυτό τους).	κάθε αριθμός έχει κάποιον μεγαλύτερο ή ίσο του.
$\forall x \exists y P(y, x)$	όλοι θαυμάζονται από κάποιον (όχι αναγκαία όλοι από τον ίδιο, μπορεί από εαυτό τους).	κάθε αριθμός έχει κάποιον μικρότερο ή ίσο του.
$\forall x \forall y P(x, y)$ $\forall x \forall y P(y, x)$	όλοι θαυμάζουν τους πάντες (και τον εαυτό τους).	για κάθε ζευγάρι αριθμών, ο ένας είναι μικρότερος ή ίσος του άλλου.
$\exists x \forall y P(x, y)$	υπάρχει κάποιος που τους θαυμάζει όλους (και εαυτό του)	υπάρχει αριθμός μικρότερος ή ίσος όλων (κάτω φράγμα).
$\exists x \forall y P(y, x)$	υπάρχει κάποιος που τον θαυμάζουν όλοι (και εαυτός του)	υπάρχει αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος όλων (άνω φράγμα)
$\exists x \exists y P(x, y)$ $\exists x \exists y P(y, x)$	υπάρχει ζευγάρι (όχι αναγκαία διαφορετικών) που ο ένας θαυμάζει τον άλλο.	υπάρχουν αριθμοί που ο ένας είναι μικρότερος ή ίσος του άλλου.

$$\neg \exists x \varphi(x) \equiv \forall x \neg \varphi(x)$$

$$\neg \forall x \varphi(x) \equiv \exists x \neg \varphi(x)$$

# Παραδείγματα

- Δεδομένης ερμηνείας (π.χ. φυσικοί αριθμοί, σύνολα, γραφήματα), διατύπωση προτάσεων – ιδιοτήτων σε πρωτοβάθμια γλώσσα.
  - Όλοι οι άνθρωποι θαυμάζουν κάποιον άλλο.  $\forall x \exists y (x \neq y \wedge P(x, y))$
  - Υπάρχει κάποιος που δεν θαυμάζει κανέναν άλλο.  $\neg \exists x \forall y (x \neq y \rightarrow \neg P(x, y))$
  - Υπάρχει κάποιος που θαυμάζει τον εαυτό του και μόνον αυτόν.  $\exists x (P(x, x) \wedge \forall y (P(x, y) \rightarrow x = y))$
  - Όλοι θαυμάζονται από κάποιον άλλο.  $\forall x \exists y (x \neq y \wedge P(y, x))$
  - Υπάρχει κάποιος που θαυμάζει όλους τους άλλους.  $\exists x \forall y (x \neq y \rightarrow P(x, y))$
  - Υπάρχει κάποιος που δεν θαυμάζει κανέναν.  $\exists x \forall y \neg P(x, y)$
  - Δεν υπάρχει κανένας άνθρωπος που να τον θαυμάζουν όλοι οι άλλοι.  $\neg \exists x \forall y (x \neq y \rightarrow P(y, x))$   
 $\forall x \exists y (x \neq y \wedge \neg P(y, x))$

# Παραδείγματα

- Απλές γλωσσικές δομές συνήθως επαρκούν.
- Κάθε αντικείμενο με ιδιότητα  $P$  έχει ιδιότητα  $Q$ .  
 $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ 
  - Ο επόμενος κάθε περιττού αριθμού είναι άρτιος.  $\forall x(\text{odd}(x) \rightarrow \text{even}(x'))$   
 $\text{even}(x) \equiv \exists y(x = 2 \otimes y)$  όπου  $1 \equiv 0'$  και  $2 \equiv (0)'$   
 $\text{odd}(x) \equiv \exists y(x = (2 \otimes y) \oplus 1)$
  - Κάθε πολλαπλάσιο του 4 είναι άρτιος.  $\forall x(\exists y(x = 4 \otimes y) \rightarrow \text{even}(x))$
- Υπάρχει αντικείμενο με ιδιότητα  $P$  και ιδιότητα  $Q$ .  
 $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ 
  - Δεν είναι όλοι οι άρτιοι πολλαπλάσια του 4.  
 $\exists x(\text{even}(x) \wedge \neg \exists y(x = 4 \otimes y))$

# Παραδείγματα

---

- Υπάρχει **μοναδικό** αντικείμενο με ιδιότητα P.
- Υπάρχει **μέγιστο** (ελάχιστο) στοιχείο με ιδιότητα P.
  - Υπάρχει μοναδικός φυσικός που είναι μικρότερος του 1.

$$\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow y = x))$$

$$\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow y \leq x))$$

$$\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow x \leq y))$$

$$\exists x(x < 1 \wedge \forall y(y < 1 \rightarrow x = y))$$

# Παραδείγματα: Αριθμοί

---

- Το άθροισμα δύο περιττών είναι άρτιος.  $\forall x \forall y (\text{odd}(x) \wedge \text{odd}(y) \rightarrow \text{even}(x \oplus y))$
- Ο  $x$  διαιρεί ακριβώς τον  $y$ :  $D(x, y) \equiv \exists z (y = x \otimes z)$
- Ο  $x$  είναι μικρότερος ή ίσος του  $y$ :  $x \leq y \equiv \exists z (y = x \oplus z)$
- Ο  $x$  είναι πρώτος αριθμός:  
 $\text{prime}(x) \equiv (x \neq 0) \wedge (x \neq 1) \wedge \forall y \forall z (x = y \otimes z \rightarrow (y = x \vee z = x))$

# Παραδείγματα: Αριθμοί

- Κάθε άρτιος μεγαλύτερος του 4 γράφεται ως άθροισμα δύο περιττών πρώτων αριθμών (εικασία του Goldbach).

$$\forall x((\text{even}(x) \wedge 4 < x) \rightarrow$$

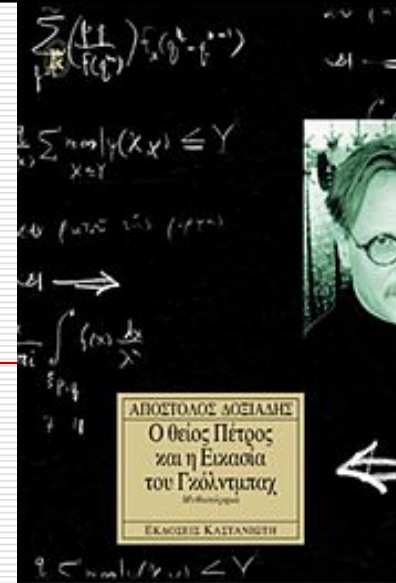
$$\rightarrow \exists y \exists z(\text{prime}(y) \wedge \text{odd}(y) \wedge \text{prime}(z) \wedge \text{odd}(z) \wedge x = y \oplus z))$$

- Για κάθε φυσικό αριθμό (έστω  $n$ ), υπάρχει άλλος (έστω  $m$ ) που είναι ο μέγιστος μεταξύ εκείνων που το διπλάσιό τους δεν ξεπερνά τον αρχικό (δηλ. το  $n$ ).

$$\forall n \exists m(2 \otimes m \leq n \wedge \forall k(2 \otimes k \leq n \rightarrow k \leq m))$$

ή ισοδύναμα  $\forall n \exists m(P(m, n) \wedge \forall k(P(k, n) \rightarrow k \leq m))$

όπου  $P(m, n) \equiv 2 \otimes m \leq n$



# Παραδείγματα: Σύνολα

- Ερμηνεία με σύμπαν **δυναμοσύνολο** πεπερασμένου **συνόλου**  $S$ , 2-μελές κατηγορηματικό σύμβολο  $Q$  με ερμηνεία  $Q(x, y) \equiv x \subseteq y$ , και **σταθερά**  $c$  που ερμηνεύεται ως το **κενό σύνολο** ( $\emptyset$ ).
  - Υπάρχει σύνολο που περιέχει (ως υποσύνολα) κάθε σύνολο.  $\exists x \forall y Q(y, x)$
  - Το κενό σύνολο έχει μόνο ένα υποσύνολο, τον εαυτό του.  $Q(c, c) \wedge \forall x (Q(x, c) \rightarrow x = c)$
  - Για κάθε ζευγάρι συνόλων υπάρχει κοινό υποσύνολο που είναι το μεγαλύτερο δυνατό (**τομή συνόλων**).  
 $\forall x \forall y \exists z [Q(z, x) \wedge Q(z, y) \wedge \forall w (Q(w, x) \wedge Q(w, y) \rightarrow Q(w, z))]$
  - Για κάθε ζευγάρι συνόλων υπάρχει κοινό υπερσύνολο που είναι το ελάχιστο δυνατό (**ένωση συνόλων**).  
 $\forall x \forall y \exists z [Q(x, z) \wedge Q(y, z) \wedge \forall w (Q(x, w) \wedge Q(y, w) \rightarrow Q(z, w))]$

# Παραδείγματα

$CS(x)$  ο  $x$  πληροφορικός

$M(x)$  ο  $x$  μαθηματικός

$OS(x)$  το  $x$  λειτ. σύστημα

$U(x, y)$  ο  $x$  χρησιμοποιεί το  $y$

$L(x, y)$  ο  $x$  συμπαθεί τον  $y$

## □ Διατύπωση σε πρωτοβάθμια γλώσσα:

- Υπάρχει πληροφορικός που δεν συμπαθεί κανένα μαθηματικό.

$$\exists x[CS(x) \wedge \forall y(M(y) \rightarrow \neg L(x, y))]$$

- Κανένας μαθηματικός δεν συμπαθεί δύο ή περισσότερους πληροφορικούς.

$$\neg \exists x \exists y \exists z (M(x) \wedge CS(y) \wedge CS(z) \wedge L(x, y) \wedge L(x, z) \wedge y \neq z)$$

- Αν ένας μαθηματικός συμπαθεί δύο πληροφορικούς, τότε τουλάχιστον ένας από αυτούς είναι μαθηματικός.

$$\forall x \forall y \forall z (M(x) \wedge CS(y) \wedge CS(z) \wedge L(x, y) \wedge L(x, z) \wedge y \neq z \rightarrow M(y) \vee M(z))$$

- Αν ένα λειτουργικό σύστημα χρησιμοποιείται από τουλάχιστον δύο πληροφορικούς, τότε κάποιος μαθηματικός δεν το χρησιμοποιεί.

$$\forall x [OS(x) \wedge \exists y \exists z (CS(y) \wedge CS(z) \wedge U(y, x) \wedge U(z, x) \wedge y \neq z) \rightarrow \exists y (M(y) \wedge \neg U(y, x))]$$



# Παραδείγματα

$CS(x)$  ο  $x$  πληροφορικός

$M(x)$  ο  $x$  μαθηματικός

$OS(x)$  το  $x$  λειτ. σύστημα

$U(x, y)$  ο  $x$  χρησιμοποιεί το  $y$

$L(x, y)$  ο  $x$  συμπαθεί τον  $y$

□ Τι εκφράζουν σε φυσική γλώσσα:

$$\exists x[CS(x) \wedge \forall y(OS(y) \rightarrow U(x, y))]$$

■ Υπάρχει πληροφορικός που χρησιμοποιεί κάθε λειτουργικό σύστημα.

$$\forall y[OS(y) \rightarrow \exists x(CS(x) \wedge \neg U(x, y))]$$

$$\neg \exists y[OS(y) \wedge \forall x(CS(x) \rightarrow U(x, y))]$$

■ Κανένα λειτουργικό δεν χρησιμοποιείται από όλους τους πληροφορικούς.

$$\forall x[(CS(x) \wedge M(x)) \rightarrow \exists y(OS(y) \wedge U(x, y))]$$

■ Όλοι όσοι είναι μαθηματικοί και πληροφορικοί ταυτόχρονα χρησιμοποιούν κάποιο λειτουργικό σύστημα.

$$\forall x \forall y[(CS(x) \wedge M(y) \wedge L(x, y)) \rightarrow \exists z(OS(y) \wedge U(x, z) \wedge U(y, z))]$$

■ Όποτε κάποιος πληροφορικός συμπαθεί κάποιον μαθηματικό, αυτοί χρησιμοποιούν ένα κοινό λειτουργικό σύστημα.

# Παραδείγματα

---

- Διατύπωση σε πρωτοβάθμια γλώσσα:
  - $A(x, y)$ :  $x$  και  $y$  είναι αδέρφια,  $M(x, y)$ :  $x$  είναι μητέρα  $y$ .
  - Κάθε άνθρωπος έχει μητέρα:  $\forall x \exists y M(y, x)$
  - Δυο αδέρφια έχουν την ίδια (μοναδική;) μητέρα.  
 $\forall x \forall y (A(x, y) \rightarrow \exists z (M(z, x) \wedge M(z, y)))$
  
  - Η μητέρα του Νίκου δεν έχει άλλα παιδιά.  
 $\forall x (M(x, d) \rightarrow \neg \exists y (y \neq d \wedge M(x, y)))$   
 $\forall x \forall y (M(x, d) \wedge M(x, y) \rightarrow y = d)$
  - Η Μαρία είναι θεία του Νίκου, από τη μητέρα του.  
 $\exists x (M(x, \text{Nick}) \wedge A(x, \text{Marie}))$

# Παραδείγματα

$P(x)$ :  $x$  καθηγητής  
 $C(x)$ :  $x$  μάθημα  
 $S(x)$ :  $x$  φοιτητής  
 $T(x, y)$ :  $x$  διδάσκει  $y$   
 $E(x, y)$ :  $x$  παρακολουθεί  $y$   
 $F(x, y)$ :  $x$  και  $y$  φίλοι

## □ Διατύπωση σε πρωτοβάθμια γλώσσα:

- Κάθε καθηγητής διδάσκει δύο τουλάχιστον διαφορετικά μαθήματα.  
 $\forall x[P(x) \rightarrow \exists y\exists z(y \neq z \wedge C(y) \wedge C(z) \wedge T(x, y) \wedge T(x, z))]$
- Σε κάθε μάθημα είναι εγγεγραμμένοι δύο τουλάχιστον φοιτητές που είναι φίλοι μεταξύ τους.  
 $\forall x[C(x) \rightarrow \exists y\exists z(y \neq z \wedge S(y) \wedge S(z) \wedge E(y, x) \wedge E(z, x) \wedge F(x, y))]$
- Ένας φοιτητής που παρακολουθεί Διακριτά δεν παρακολουθεί Αριθμητική Ανάλυση.  
 $\forall x[S(x) \wedge E(x, \text{Discr}) \rightarrow \neg E(x, \text{NumAn})]$
- Αν κάποιος φοιτητής είναι εγγεγραμμένος σε όλα τα μαθήματα ενός καθηγητή, τότε (ο φοιτητής και ο καθηγητής) είναι φίλοι.  
 $\forall x\forall y[\Sigma\chi 1(x, y) \rightarrow \Sigma\chi 2(x, y)]$   
 $\forall x\forall y[S(x) \wedge P(y) \wedge \forall z(C(z) \wedge T(y, z) \rightarrow E(x, z)) \rightarrow F(x, y)]$

# Παραδείγματα

$P(x)$ :  $x$  καθηγητής  
 $C(x)$ :  $x$  μάθημα  
 $S(x)$ :  $x$  φοιτητής  
 $T(x, y)$ :  $x$  διδάσκει  $y$   
 $E(x, y)$ :  $x$  παρακολουθεί  $y$   
 $F(x, y)$ :  $x$  και  $y$  φίλοι

□ Τι εκφράζουν σε φυσική γλώσσα:

$$\exists x[C(x) \wedge \forall y(S(y) \rightarrow E(y, x))]$$

■ Υπάρχει μάθημα που το παρακολουθούν όλοι οι φοιτητές.

$$\forall x\forall y[C(x) \wedge C(y) \wedge \forall z(S(z) \rightarrow (E(z, x) \leftrightarrow E(z, y)))] \rightarrow x = y]$$

■ Αν θεωρήσουμε δύο οποιαδήποτε μαθήματα που παρακολουθούνται από τους ίδιους ακριβώς φοιτητές, τότε αυτά ταυτίζονται. Άρα:

□ Δεν υπάρχουν δύο διαφορετικά μαθήματα που παρακολουθούνται από τους ίδιους ακριβώς φοιτητές.

$$\forall x\forall y[S(x) \wedge P(y) \wedge F(y, x) \rightarrow \exists z(C(z) \wedge T(y, z) \wedge E(x, z))]$$

■ Κάθε φοιτητής που είναι φίλος με κάποιον καθηγητή παρακολουθεί τουλάχιστον ένα μάθημά του.

$$\forall x\forall y[S(x) \wedge S(y) \wedge x \neq y \wedge F(x, y) \rightarrow \exists z(C(z) \wedge E(x, z) \wedge E(y, z))]$$

■ Κάθε δύο φοιτητές που είναι φίλοι παρακολουθούν τουλάχιστον ένα κοινό μάθημα.

# Παραδείγματα

$$M(x) \equiv \text{Movie}(x)$$

$$G(x, y) \equiv \text{Genre}(x, y)$$

$$D(x, y) \equiv \text{Director}(x, y)$$

$$L(x, y) \equiv \text{LeadingActor}(x, y)$$

$$P(x, y) \equiv \text{Prefer}(x, y)$$

## □ Διατύπωση σε πρωτοβάθμια γλώσσα:

- Από όλες τις ταινίες του C προτιμώ την N.

$$\forall x (M(x) \wedge D(x, C) \wedge x \neq N \rightarrow P(N, x))$$

- Γενικά προτιμώ τις Κωμωδίες από τις Δράσης. Εξαιρέση οι Δράσης με πρωταγωνιστή τον D, τις οποίες προτιμώ από όλες τις Κωμωδίες.

$$\forall x \forall y [M(x) \wedge G(x, C) \wedge M(y) \wedge G(y, A) \wedge x \neq y \rightarrow (\neg L(y, D) \rightarrow P(x, y)) \wedge (L(y, D) \rightarrow P(y, x))]$$

- Υπάρχουν δύο ταινίες που προτιμώ από όλες τις υπόλοιπες, αλλά που μεταξύ τους δεν μπορώ να τις συγκρίνω.

$$\exists x \exists y [M(x) \wedge M(y) \wedge x \neq y \wedge \neg P(x, y) \wedge \neg P(y, x) \wedge \forall z (M(z) \wedge z \neq x \wedge z \neq y \rightarrow P(x, z) \wedge P(y, z))]$$

# Παραδείγματα

$M(x) \equiv \text{Movie}(x)$

$G(x, y) \equiv \text{Genre}(x, y)$

$D(x, y) \equiv \text{Director}(x, y)$

$L(x, y) \equiv \text{LeadingActor}(x, y)$

$P(x, y) \equiv \text{Prefer}(x, y)$

□ Διατύπωση σε φυσική γλώσσα:

$\forall x \forall y [M(x) \wedge M(y) \wedge G(x, T) \wedge G(y, T) \wedge D(x, H) \wedge P(y, x) \rightarrow D(y, K)]$

- Από όλες τις ταινίες θρίλερ, μόνο αυτές με σκηνοθέτη τον Kubrick προτιμώ από αυτές με σκηνοθέτη τον Hitchcock.

# Ερώτηση

- Τι δηλώνουν οι παρακάτω προτάσεις;
  - Αληθεύουν σε πεπερασμένο σύμπαν;
  - Αληθεύουν σε άπειρο σύμπαν;

$$\begin{aligned} & \forall x R(x, x) \wedge \\ & \forall x \forall y (R(x, y) \wedge R(y, x) \rightarrow x = y) \wedge \\ & \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z)) \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} & \exists x \forall y (y \neq x \rightarrow \neg R(y, x)) \wedge \\ & \exists x \forall y (y \neq x \rightarrow \neg R(x, y)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \forall x R(x, x) \wedge \\ & \forall x \forall y (R(x, y) \wedge R(y, x) \rightarrow x = y) \wedge \\ & \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z)) \wedge \\ & \forall x \forall y (R(x, y) \vee R(y, x)) \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} & \exists x \forall y R(x, y) \wedge \\ & \exists x \forall y R(y, x) \end{aligned}$$

# Σημασιολογική Προσέγγιση

---

- $A \models \varphi[v]$  : στην ερμηνεία  $A$ , η **αποτίμηση  $v$  επαληθεύει** (ή ικανοποιεί) τον  $\varphi$ .
  - **Αποτίμηση  $v$**  καθορίζει τιμές **ελεύθερων μεταβλητών** του  $\varphi$  και μόνο.
- $A \models \varphi$  : ο  $\varphi$  ικανοποιείται από κάθε αποτίμηση στην ερμηνεία  $A$ .
  - Ο  $\varphi$  **αληθής στην  $A$**  ή η ερμηνεία  $A$  αποτελεί **μοντέλο** για τον  $\varphi$ .
- $\models \varphi$  : ο  $\varphi$  ικανοποιείται σε κάθε ερμηνεία.
  - Ο  $\varphi$  είναι (λογικά) **έγκυρος** (αντίστοιχο ταυτολογίας).
  - Ταυτολογίες «δίνουν» λογικά έγκυρους τύπους με συντακτική αντικατάσταση.
- **Εγκυρότητα / ικανοποιησιμότητα / αλήθεια  $\varphi$**  ελέγχεται με εφαρμογή του **ορισμού αλήθειας του Tarski**.



# Ορισμός Tarski

- Ερμηνεύει λογικούς συνδέσμους και ποσοδείκτες.
- Ορίζει ότι ένας τύπος  $\varphi$  αληθεύει (σε μια ερμηνεία  $A$ , για μια αποτίμηση  $v$ ) ανν το νόημα του εκφράζει μια αλήθεια στην  $A$ .
- Η έννοια  $A \models \varphi[v]$  ορίζεται αναδρομικά ως εξής:
  - $A \models (x = y)[v]$  ανν  $(v(x) = v(y))$ .
  - $A \models Q(x_1, \dots, x_n)[v]$  ανν  $(v(x_1), \dots, v(x_n)) \in Q^A$ .
  - $A \models \neg\psi[v]$  ανν (δεν ισχύει ότι  $A \models \psi[v]$ ).
  - $A \models (\psi \wedge \chi)[v]$  ανν  $(A \models \psi[v]$  και  $A \models \chi[v])$ .
  - $A \models (\psi \vee \chi)[v]$  ανν  $(A \models \psi[v]$  ή  $A \models \chi[v])$ .
  - $A \models (\psi \rightarrow \chi)[v]$  ανν  $(\text{όταν } A \models \psi[v], \text{ τότε } A \models \chi[v])$ .
  - $A \models (\psi \leftrightarrow \chi)[v]$  ανν  $(A \models \psi[v]$  ανν  $A \models \chi[v])$ .
  - $A \models \forall x\psi[v]$  ανν  $(\text{για κάθε } a \in |A|, A \models \psi[v(x|a)])$ .
  - $A \models \exists x\psi[v]$  ανν  $(\text{υπάρχει } a \in |A| \text{ τέτοιο ώστε } A \models \psi[v(x|a)])$ .

# Παραδείγματα

---

- Δεν ακολουθούμε τον φορμαλισμό του ορισμού Tarski, αλλά την ουσία του.
- Ελέγχουμε αν πρόταση αληθεύει σε **συγκεκριμένη** ερμηνεία.
  - Απλά «αποκωδικοποιούμε» την πρόταση (στην συγκεκριμένη ερμηνεία) και **εξηγούμε πειστικά** αν αληθεύει ή όχι.
- Αληθεύουν οι παρακάτω προτάσεις στη δομή των **φυσικών** για  $c = 0$  και  $P(x, y) \equiv x \leq y$ ; Στην δομή των **ακεραίων**;
  - (α)  $\forall x \forall y (P(x, c) \wedge P(c, y) \rightarrow P(x, y))$
  - (β)  $\forall x (P(x, c) \rightarrow x = c)$
  - (α) αληθεύει σε **φυσικούς** και **ακέραιους**, (β) **μόνο** σε **φυσικούς**.

# Προτάσεις και Κατηγορήματα

- Τύπος  $\varphi(x)$  με **ελεύθερη μεταβλητή**  $x$  ορίζει σύνολο
$$A_\varphi = \{ a \in |A| : \varphi(a) \text{ αληθεύει στην } A \}$$
  - $\varphi(x)$ : ιδιότητα **στοιχείων της δομής** (όπως κατηγορήματα).
  - Πρόταση  $\psi$ : ιδιότητα **της ίδιας της δομής**.
- Να ορίσετε έτσι τα  $\{0\}$  και  $\{1\}$  (χωρίς σταθερά  $0$ , συνάρτηση  $'$ ).
  - $x$  είναι ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης:  $\varphi_0(x) = \forall y(x + y = y)$ .
  - Η δομή έχει ουδέτερο στοιχείο για την πρόσθεση:  $\exists x \forall y(x + y = y)$ .
  - $x$  είναι ουδέτερο στοιχείο του πολ/μού:  $\varphi_1(x) = \forall y(x \times y = y)$ .
  - Η δομή έχει ουδέτερο στοιχείο για τον πολ/μό:  $\exists x \forall y(x \times y = y)$ .

# Λογική Εγκυρότητα

---

- Να εξετάσετε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι λογικά έγκυρες:
  - (i)  $\exists x P(x) \vee \exists y Q(y) \rightarrow \exists x (P(x) \wedge Q(x))$
  - (ii)  $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x))$
- Ότι μια πρόταση **δεν είναι λογικά έγκυρη** αποδεικνύεται με «αντιπαράδειγμα» (ερμηνεία που δεν την ικανοποιεί):
  - Για την (i), φυσικοί αριθμοί,  $P(x)$  δηλώνει ότι  $x$  άρτιος,  $Q(x)$  δηλώνει ότι  $x$  περιττός.
- **Λογική εγκυρότητα** αποδεικνύεται με εφαρμογή **ορισμού Tarski**.
  - Για αυθαίρετη ερμηνεία  $A$ , πρόταση (ii) δηλώνει ότι: αν για **κάθε** στοιχείο  $a \in |A|$ ,  $A \models P(a)$  και  $A \models Q(a)$ , τότε για **κάθε** στοιχείο  $a \in |A|$ ,  $A \models P(a)$  ή  $A \models Q(a)$ .
  - Αυτό αληθεύει για **κάθε** δομή  $A$ .

# Λογική Εγκυρότητα

---

- $N\delta o \models \exists x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall y \exists x P(x, y)$ 
  - Έστω αυθαίρετη δομή  $A$ .  $A \models \exists x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall y \exists x P(x, y) \dots$
  - ανν όταν (i) υπάρχει  $a \in |A|$  τ.ω. για κάθε  $\beta \in |A|$ ,  $A \models P(a, \beta)$ , τότε (ii) για κάθε  $\gamma \in |A|$ , υπάρχει  $\delta \in |A|$  τ.ω.  $A \models P(\delta, \gamma)$ .
  - Ισχύει, αφού για κάθε  $\gamma \in |A|$ ,  $A \models P(a, \gamma)$  λόγω υπόθεσης.

# Λογική Εγκυρότητα

---

- Νδο  $\models \exists x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\forall xP(x) \rightarrow \exists xQ(x))$ 
  - Θεωρούμε αυθαίρετη δομή  $A$ . Πρέπει νδο:
    - Αν (i) υπάρχει  $a \in |A|$ :  $A \models P(a) \rightarrow Q(a)$ ,  
τότε (ii) αν για κάθε  $\beta \in |A|$ ,  $A \models P(\beta)$ ,  
τότε (iii) υπάρχει  $\gamma \in |A|$ :  $A \models Q(\gamma)$ .
  - Αρκεί νδο αν ισχύουν τα (i) και (ii), τότε ισχύει και το (iii).
  - Λόγω (i): υπάρχει  $a \in |A|$ :  $A \models P(a) \rightarrow Q(a)$ .
  - Λόγω (ii):  $A \models P(a)$ .
  - Άρα  $A \models Q(a)$ .
  - Συνεπώς, αν ισχύουν τα (i) και (ii), υπάρχει στοιχείο του  $|A|$  για το οποίο αληθεύει το  $Q$  στην ερμηνεία  $A$ .

# Λογική Εγκυρότητα

---

- Να διερευνήσετε αν ο παρακάτω τύπος είναι λογικά έγκυρος:  
$$[\forall x P(x, x) \wedge \forall x \forall y (P(x, y) \wedge P(y, x) \rightarrow x = y)] \rightarrow \neg \exists x \forall y P(x, y)$$
- Αν σχέση  $P$  είναι ανακλαστική και αντισυμμετρική τότε σχέση  $P$  δεν έχει «ελάχιστο στοιχείο».
- Δεν είναι λογικά έγκυρο, π.χ. φυσικοί με  $P(x, y) \equiv x \leq y$ .

# Λογική Εγκυρότητα

---

- Να διερευνήσετε αν οι παρακάτω τύποι είναι λογικά έγκυροι:

$$[\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)] \rightarrow \forall x (P(x) \leftrightarrow Q(x))$$

- Αν όταν το P αληθεύει πάντα τότε και το Q αληθεύει πάντα, τότε τα κατηγορήματα P και Q ταυτίζονται.
- Δεν είναι λογικά έγκυρο, π.χ. P δεν αληθεύει για κάποια στοιχεία και Q αληθεύει για όλα τα στοιχεία.

$$\forall x \exists y (P(x) \rightarrow Q(y)) \rightarrow \exists y \forall x (P(x) \rightarrow Q(y))$$

- Λογικά έγκυρο, π.χ. μετακίνηση ποσοδεικτών.



# Άσκηση

$$\varphi_1 \equiv \forall x \neg R(x, x)$$

$$\varphi_2 \equiv \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z))$$

$$\varphi_3 \equiv \forall x \exists y R(x, y)$$

$$\varphi \equiv \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$$

- Μοντέλο του  $\varphi$  στους φυσικούς;
  - Αν το  $R(x, y)$  δηλώνει ότι  $x < y$ .
- Μοντέλο του  $\varphi$  στο σύμπαν όλων των πεπερασμένων υποσυνόλων των φυσικών;
  - Αν το  $R(x, y)$  δηλώνει ότι  $x \subset y$ .
- Κάθε μοντέλο του  $\varphi$  έχει άπειρο σύμπαν.
  - $\varphi_1 \wedge \varphi_3$ : κάθε στοιχείο  $a$  σχετίζεται με διαφορετικό στοιχείο  $a'$ .
  - **Άπειρη** ακολουθία συσχετίσεων  $a_1 R a_2 R a_3 R \dots R a_k R \dots$
  - Θδο όλα τα στοιχεία σε αυτή την ακολουθία **διαφορετικά**, άρα το σύμπαν είναι άπειρο.
    - Έστω  $a$  στοιχείο που επαναλαμβάνεται:  $a R \dots R a$ .  
Λόγω  $\varphi_2$ , έχουμε ότι  $R(a, a)$ . Άτοπο, λόγω  $\varphi_1$ .

# Λογική Εγκυρότητα

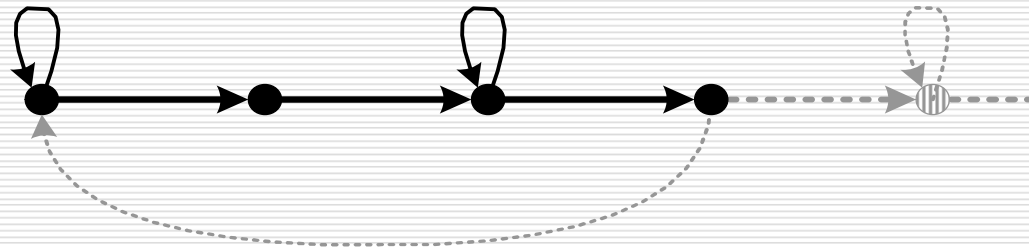
□ Είναι λογικά έγκυροι οι τύποι:

$$\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x)) \rightarrow \neg \forall x(P(x) \wedge Q(x))$$

- **Ναι:** αν υπάρχει **στοιχείο** που έχει την ιδιότητα P και δεν έχει την ιδιότητα Q, τότε πράγματι **δεν** αληθεύει ότι **όλα τα στοιχεία έχουν** και την ιδιότητα P και την ιδιότητα Q.

$$\exists x \forall y [P(x, y) \wedge \neg P(y, x) \rightarrow (P(x, x) \leftrightarrow P(y, y))]$$

- **Όχι.** Ερμηνεία;



$$\forall x \forall y \forall z [P(x, x) \wedge (P(x, z) \rightarrow P(x, y) \vee P(y, z))] \rightarrow \exists y \forall z P(y, z)$$

- **Όχι,** αλλά αληθεύει σε κάθε πεπερασμένο σύμπαν!

□ Αντιπαράδειγμα: φυσικοί, όπου  $P(x, y)$  δηλώνει ότι « $x \geq y$ ».

# Απλοποίηση / Λογική Ισοδυναμία

- Να διερευνήσετε αν ο τύπος  $\varphi$  αληθεύει στις ερμηνείες  $(\mathbb{N}, \leq)$ ,  $(\mathbb{N}, >)$  και  $(\mathbb{Z}, >)$ .

$$\varphi = \forall x \exists y \exists z [P(x, y) \wedge P(z, y) \wedge (P(x, z) \rightarrow P(z, x))]$$

- Θέτουμε  $z = x$  και έχουμε:

$$\varphi' = \forall x \exists y [P(x, y) \wedge P(x, y) \wedge (P(x, x) \rightarrow P(x, x))]$$

$$\forall x \exists y P(x, y)$$

- Αν  $\varphi'$  αληθής, τότε και  $\varphi$  αληθής (θέτουμε  $z = x$ ).
- Αν  $\varphi$  αληθής, τότε και  $\varphi'$  αληθής (ο  $\varphi'$  ουσιαστικά είναι ένας όρος της σύζευξης του  $\varphi$ ).
- Άρα  $\varphi$  και  $\varphi'$  λογικά ισοδύναμοι. Μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε αν ο  $\varphi'$  είναι αληθής στις συγκεκριμένες ερμηνείες.

# Λογική Συνεπαγωγή

- Έστω οι τύποι (1)  $\forall x(f(x) = x \leftrightarrow Q(x))$ , και  
(2)  $\forall x(f(x) = x) \leftrightarrow \forall xQ(x)$ .
- (α) Να βρείτε ποιος τύπος συνεπάγεται λογικά τον άλλο, και  
(β) νδο οι τύποι δεν είναι λογικά ισοδύναμοι.
- Θδο (1)  $\models$  (2) (αλλά όχι το αντίστροφο).
- Έστω αυθαίρετη ερμηνεία A. Από ορισμό Tarski, αρκεί νδο:
  - Αν (i) για κάθε  $a \in |A|$ ,  $A \models f(a) = a$  ανν  $A \models Q(a)$ ,  
τότε (ii.1) για κάθε  $\beta \in |A|$ ,  $A \models f(\beta) = \beta$  ανν  
(ii.2) για κάθε  $\gamma \in |A|$ ,  $A \models Q(\gamma)$ .
  - Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:
    - Ισχύει (ii.2), δηλ. για κάθε  $\gamma \in |A|$ ,  $A \models Q(\gamma)$  ανν,  
λόγω (i), για κάθε  $\beta \in |A|$ ,  $A \models f(\beta) = \beta$ , ανν ισχύει (ii.1).
    - Δεν ισχύει (ii.2), δηλ. υπάρχει  $\delta \in |A|$ ,  $A \models \neg Q(\delta)$ , ανν,  
λόγω (i), υπάρχει  $\delta \in |A|$ ,  $A \models f(\delta) \neq \delta$ , ανν δεν ισχύει (ii.2).

# Λογική Συνεπαγωγή

---

- Έστω οι τύποι (1)  $\forall x(f(x) = x \leftrightarrow Q(x))$ , και  
(2)  $\forall x(f(x) = x) \leftrightarrow \forall xQ(x)$ .
- (α) Να βρείτε ποιος τύπος συνεπάγεται λογικά τον άλλο, και  
(β) νδο οι τύποι δεν είναι λογικά ισοδύναμοι.
- Ερμηνεία  $A$  που επαληθεύει τον (2) αλλά όχι τον (1).
- $|A| = \{a, \beta\}$ ,  $f(a) = a$ ,  $f(\beta) = a$ , και  $Q(a) \Psi$ ,  $Q(\beta) A$ .
- $A$  μοντέλο για τον (2):
  - $A \models \neg \forall x(f(x) = x)$  και  $A \models \neg \forall xQ(x)$
- $A$  όχι μοντέλο για τον (1):
  - Υπάρχει στοιχείο του  $|A|$ , το  $a$ , για το οποίο  $f(a) = a$  αλλά  $Q(a)$  δεν αληθεύει.

# Λογική Συνεπαγωγή

---

- Δίνονται τρεις προτάσεις:

(α)  $\forall x \forall y \forall z [P(x, y) \wedge P(y, z) \rightarrow P(x, z)]$

- Η σχέση P είναι **μεταβατική**.

(β)  $\forall x \forall y [P(x, y) \wedge P(y, x) \rightarrow x = y]$

- Η σχέση P είναι **αντισυμμετρική**.

(γ)  $\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y \forall x P(x, y)$

- Αν **κάθε στοιχείο P-σχετίζεται** με κάποιο στοιχείο, **υπάρχει στοιχείο** με το οποίο **P-σχετίζονται όλα** τα στοιχεία.

- $\{ (α), (β) \} \models (γ)$ ;

- **Όχι**, π.χ. φυσικοί με  $P(x, y) \equiv x \leq y$ .

- $\{ (α), (γ) \} \models (β)$ ;

- **Όχι**, π.χ. αν P(x, y) αληθεύει πάντα.

- $\{ (β), (γ) \} \models (α)$ ;

- **Όχι**, π.χ. σύμπαν = {0, 1, 2} και P(x, y) αληθεύει για  $\{(0,1), (1,2)\}$ .

# Κανονική Ποσοδεικτική Μορφή

- Για κάθε τύπο  $\varphi$ , μπορούμε να βρούμε λογικά ισοδύναμο τύπο  $\varphi^* \equiv Q_1x_1Q_2x_2 \dots Q_nx_n \varphi'(x_1, \dots, x_n)$  όπου  $Q_i$  ποσοδείκτες και  $\varphi'(x_1, \dots, x_n)$  ανοικτός τύπος.
  - $\varphi^*$  αποτελεί **Κανονική Ποσοδεικτική Μορφή (ΚΠΜ)**  $\varphi$ .
- Για υπολογισμό ΚΠΜ, χρησιμοποιούμε:
  - Νόμους μετακίνησης ποσοδεικτών (μόνο αν  $x$  **δεν** εμφανίζεται ελεύθερη στον  $\varphi$ ):
$$\forall x\psi(x) \rightarrow \varphi \equiv \exists x(\psi(x) \rightarrow \varphi)$$
$$\exists x\psi(x) \rightarrow \varphi \equiv \forall x(\psi(x) \rightarrow \varphi)$$
$$\varphi \rightarrow \forall x\psi(x) \equiv \forall x(\varphi \rightarrow \psi(x))$$
$$\varphi \rightarrow \exists x\psi(x) \equiv \exists x(\varphi \rightarrow \psi(x))$$
  - Νόμους άρνησης ποσοδεικτών:
$$\neg \exists x\varphi(x) \equiv \forall x\neg\varphi(x)$$
$$\neg \forall x\varphi(x) \equiv \exists x\neg\varphi(x)$$
  - Νόμους κατανομής ποσοδεικτών:
$$\forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \equiv \forall x\varphi(x) \wedge \forall x\psi(x)$$
$$\exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \equiv \exists x\varphi(x) \vee \exists x\psi(x)$$

# Κανονική Ποσοδεικτική Μορφή

□ Να βρείτε μια ΚΠΜ του τύπου

$$\begin{aligned} & \forall x(P(x, y) \rightarrow \neg \exists z Q(x, z)) \rightarrow (\forall x R(x) \wedge \forall y S(y)) \\ \equiv & \forall x(P(x, y) \rightarrow \neg \exists z Q(x, z)) \rightarrow \forall w(R(w) \wedge S(w)) \\ \equiv & \forall w[\forall x(P(x, y) \rightarrow \neg \exists z Q(x, z)) \rightarrow (R(w) \wedge S(w))] \\ \equiv & \forall w[\forall x(P(x, y) \rightarrow \forall z \neg Q(x, z)) \rightarrow (R(w) \wedge S(w))] \\ \equiv & \forall w \exists x[(P(x, y) \rightarrow \forall z \neg Q(x, z)) \rightarrow (R(w) \wedge S(w))] \\ \equiv & \forall w \exists x[\forall z(P(x, y) \rightarrow \neg Q(x, z)) \rightarrow (R(w) \wedge S(w))] \\ \equiv & \forall w \exists x \exists z[(P(x, y) \rightarrow \neg Q(x, z)) \rightarrow (R(w) \wedge S(w))] \end{aligned}$$