

# Σύνολα

---

Διδάσκοντες: **Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου**  
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών  
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



# Ορισμός Συνόλου

---

- Σύνολο είναι μια **συλλογή διακεκριμένων αντικειμένων**.
  - Π.χ. {Δημήτρης, Ανδρέας, Άρης}, {α, β}, {α, {α}, {{α}}},  
 $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ , {1, 3, 5, 7, ...}, {2, 3, 5, 7, 11, 13, ...}
  - Αντικείμενα **όχι** κατ' ανάγκη **ομοειδή**  
π.χ. {Δημήτρης, 1, α, 1041, {α, β, γ}, {{}}, PC1}
  - **Μέλη** ή **στοιχεία** του συνόλου:  $x \in \{x, y, z\}$ ,  $a \notin \{x, y, z\}$
  - Κάθε αντικείμενο **είτε είναι μέλος** ενός συνόλου **είτε όχι**.
- Σύνολο ορίζεται:
  - με **απαρίθμηση** των στοιχείων του, π.χ. {α, β, γ}
  - με **χαρακτηριστική ιδιότητα** των στοιχείων του,  
π.χ.  $E = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ άρτιος}\}$ ,  $A = \{x \in U : P(x)\}$
  - ως **αποτέλεσμα πράξεων** σε σύνολα που έχουν ήδη ορισθεί.

# Ορισμός Συνόλου

---

- Στοιχεία ενός συνόλου:
  - Δεν επαναλαμβάνονται, π.χ.  $\{a, \beta\}$  και όχι  $\{a, a, \beta\}$ .
    - Επανάληψη στοιχείων: **πολυσύνολα**.
  - Δεν υπάρχει διάταξη, π.χ.  $\{a, \beta, \gamma\} = \{\gamma, \beta, a\} = \{\beta, a, \gamma\}$
- Σύνολα A και B **ταυτίζονται** ( $A = B$ ) αν περιέχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία.
- **Πληθικός αριθμός** (πεπερασμένου) συνόλου A:  
#στοιχείων A,  $|A|$ .
  - **Πεπερασμένα** και **άπειρα** σύνολα.

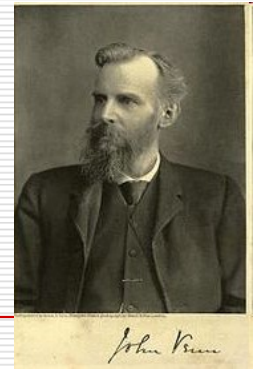
# Υποσύνολα και Κενό Σύνολο

- **A υποσύνολο B** (γράφουμε  $A \subseteq B$ ) αν κάθε στοιχείο του A ανήκει στο B:
  - Π.χ.  $\{a, b\} \subseteq \{a, b, \dots, z\}$ ,  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ ,  $\{2, 4, 6, 8, 10\} \not\subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$
  - Για κάθε σύνολο A,  $A \subseteq A$ .
  - $A = B$  αν  $A \subseteq B$  και  $B \subseteq A$ .
  - Αν  $A = B$ , τότε A και B **ισάριθμα**.
  - Αν  $A \subseteq B$ , τότε  $|A| \leq |B|$ .
  - A γνήσιο υποσύνολο B ( $A \subset B$ ):  $A \subseteq B$  και  $A \neq B$ .
  - Υπάρχουν σύνολα A, B, τ.ω.  $B \subset A$  και **ισάριθμα**;
  - Σύνολο A **άπειρο** αν υπάρχει  $A \subset B$  τ.ω. A και B είναι **ισάριθμα(!)**
- **Κενό σύνολο** ( $\{ \}$  ή  $\emptyset$ ): σύνολο χωρίς κανένα στοιχείο.
  - $|\emptyset| = 0$ .
  - Για κάθε σύνολο A,  $\emptyset \subseteq A$  (απόδειξη;).
  - Κενό σύνολο είναι **μοναδικό** (απόδειξη;).

# Δυναμοσύνολο

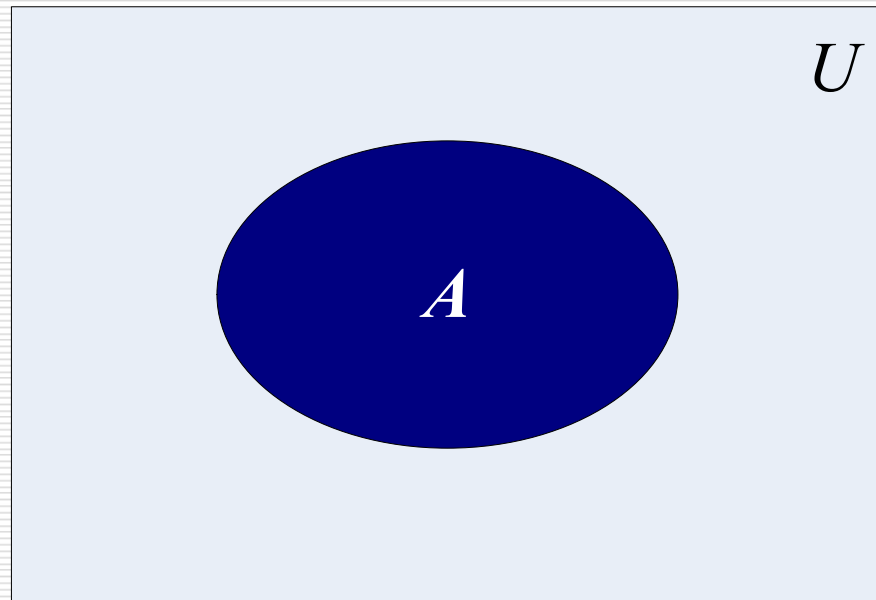
- **Δυναμοσύνολο** συνόλου  $A$ ,  $P(A)$  ή  $2^A$ , είναι **σύνολο** με στοιχεία **όλα τα υποσύνολα** του  $A$ :  $P(A) = \{B : B \subseteq A\}$ 
  - $P(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ .
  - $2^{\{a, \beta, \gamma\}} = \{\emptyset, \{a\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{a, \beta\}, \{a, \gamma\}, \{\beta, \gamma\}, \{a, \beta, \gamma\}\}$
  - $\emptyset \in P(A)$  και  $A \in P(A)$ , για κάθε σύνολο  $A$ .
  - $2^\emptyset = \{\emptyset\}$ .  $2^{P(\emptyset)} = ?$ .  $2^{P(\{\emptyset\})} = ?$ .
- Για κάθε πεπερασμένο σύνολο  $A$ ,  $|2^A| = 2^{|A|}$ .
  - Απόδειξη με επαγωγή και με συνδυαστικό επιχείρημα.
- $\subseteq$  και  $\in$ . Ποια από τα παρακάτω αληθεύουν;
  - $2 \in \{1, 2, 3\}$ .     $\{2\} \in \{1, 2, 3\}$ .     $2 \subseteq \{1, 2, 3\}$ .
  - $\{2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$ .     $\{2\} \subseteq \{\{1\}, \{2\}\}$ .     $\{2\} \in \{\{1\}, \{2\}\}$ .

# Διαγράμματα Venn

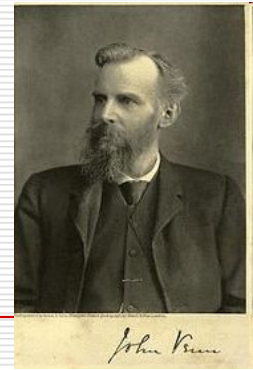


- Αναπαριστούν σύνολα και σχέσεις μεταξύ συνόλων.

Ορθογώνιο αναπαριστά σύμπαν  $U$  που περιέχει όλα τα αντικείμενα.  
Ελλείψεις αναπαριστούν σύνολα υπό μελέτη.

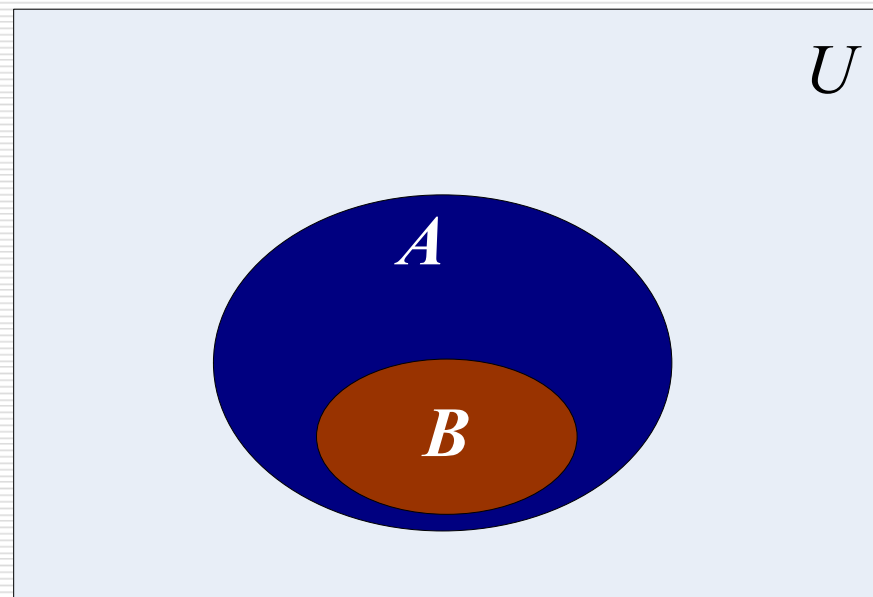


# Διαγράμματα Venn

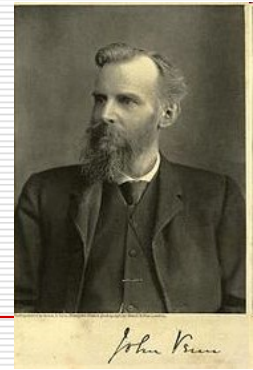


- Αναπαριστούν σύνολα και σχέσεις μεταξύ συνόλων.

$B$  (γνήσιο) υποσύνολο  $A$

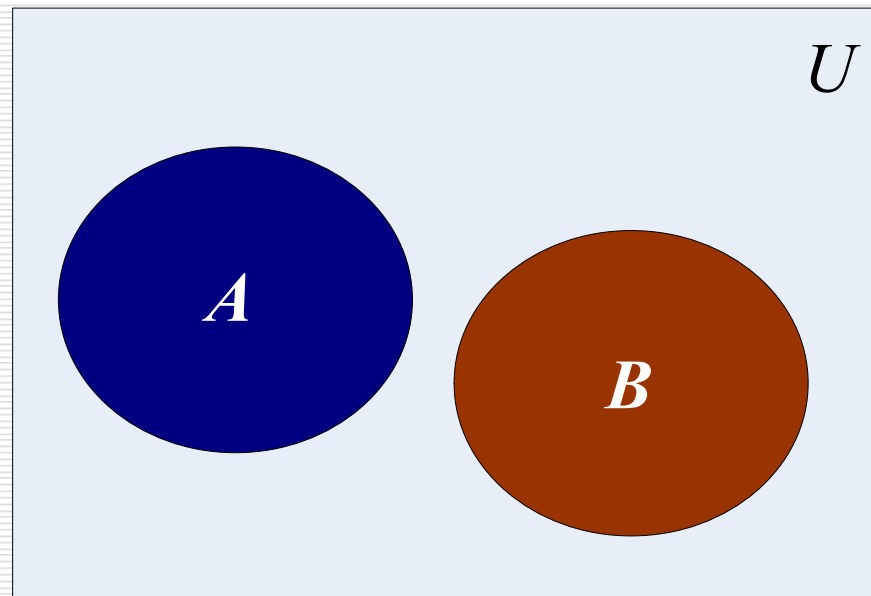


# Διαγράμματα Venn



- Αναπαριστούν σύνολα και σχέσεις μεταξύ συνόλων.

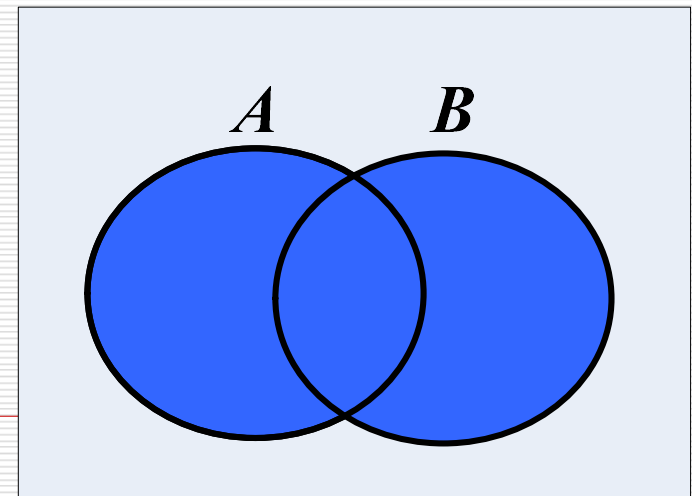
$A$  και  $B$  δεν έχουν κοινά στοιχεία  
(ξένα μεταξύ τους)





# Πράξεις Συνόλων

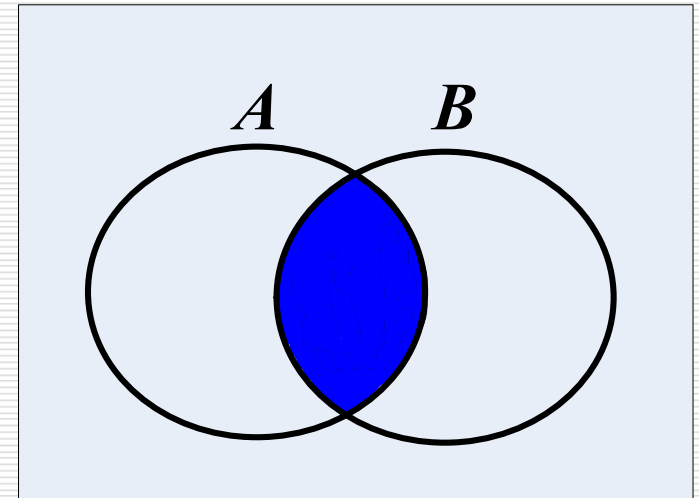
- **Ένωση** συνόλων  $A$  και  $B$ ,  $A \cup B$ :
  - Σύνολο με στοιχεία που ανήκουν στο  $A$  ή στο  $B$  (ή και στα δύο).
  - Π.χ.  $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$ .  
 $\{0, 2, 4, 6, \dots\} \cup \{1, 3, 5, 7, \dots\} = \mathbb{N}$ .
  - Αντιμεταθετική, προσεταιριστική,  $A \cup \emptyset = A$ ,  $A \cup A = A$ , ορίζεται η ένωση  $n \geq 2$  συνόλων.
  - $A \subseteq B$  ανν  $A \cup B = B$ .  
Ειδικά  $A \cup U = U$ .
  - $A \subseteq A \cup B$ , για κάθε  $B$ .
  - Αν  $A, B \subseteq C$ , τότε  $A \cup B \subseteq C$ .



# Πράξεις Συνόλων

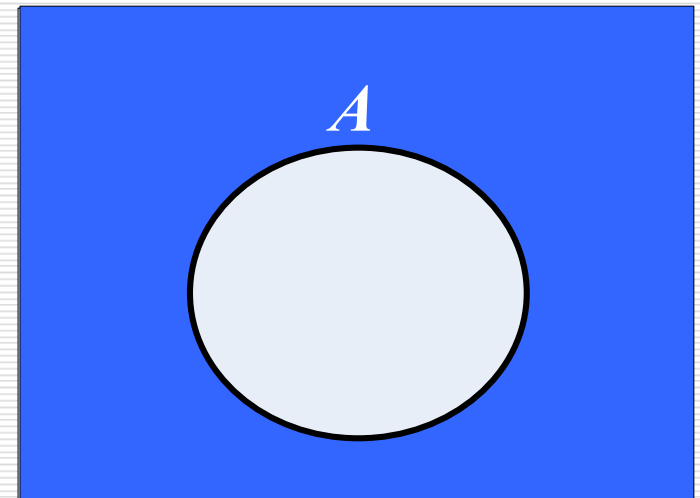
## □ Τομή συνόλων $A$ και $B$ , $A \cap B$ :

- Σύνολο με κοινά στοιχεία  $A$  και  $B$ .
- Π.χ.  $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2, 3\}$ .  
 $\{0, 2, 4, 6, \dots\} \cap \{1, 3, 5, 7, \dots\} = \emptyset$
- Αντιμεταθετική, προσεταιριστική,  $A \cap U = A$ ,  $A \cap A = A$ , ορίζεται η τομή  $n \geq 2$  συνόλων.
- $A \subseteq B$  αν  $A \cap B = A$ .  
Ειδικά  $A \cap \emptyset = \emptyset$ .
- $A \cap B \subseteq A$ , για κάθε  $B$ .  
Αν  $A, B \subseteq C$ , τότε  $A \cap B \subseteq A \cup B \subseteq C$ .
- **Επιμεριστική** ιδιότητα τομής ως προς ένωση και ένωσης ως προς τομή.
- Αν  $A \cap B = \emptyset$ ,  $A$  και  $B$  **ξένα** ή **διαζευγμένα** σύνολα.



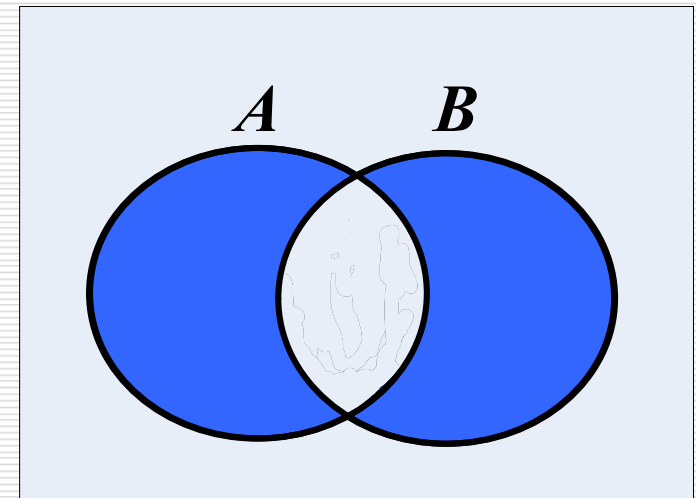
# Πράξεις Συνόλων

- **Διαφορά** συνόλου  $A$  από σύνολο  $B$ ,  $A - B$ :
  - Σύνολο με στοιχεία του  $A$  που δεν ανήκουν στο  $B$ .
  - Π.χ.  $\{1, 2, 3\} - \{2, 3, 4\} = \{1\}$ ,  
 $\{2, 3, 4\} - \{1, 2, 3\} = \{4\}$ ,  
 $\mathbb{N} - \{0, 2, 4, 6, \dots\} = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ .
  - Όχι αντιμεταθετική!
- **Συμπλήρωμα** συνόλου  $A$ ,  $\bar{A}$ :
  - Σύνολο με στοιχεία που δεν ανήκουν στο  $A$ ,  $U - A$ .
  - Συμπλήρωμα  $\emptyset = U$ .  
Συμπλήρωμα  $U = \emptyset$ .
  - $A - B = A \cap \bar{B}$



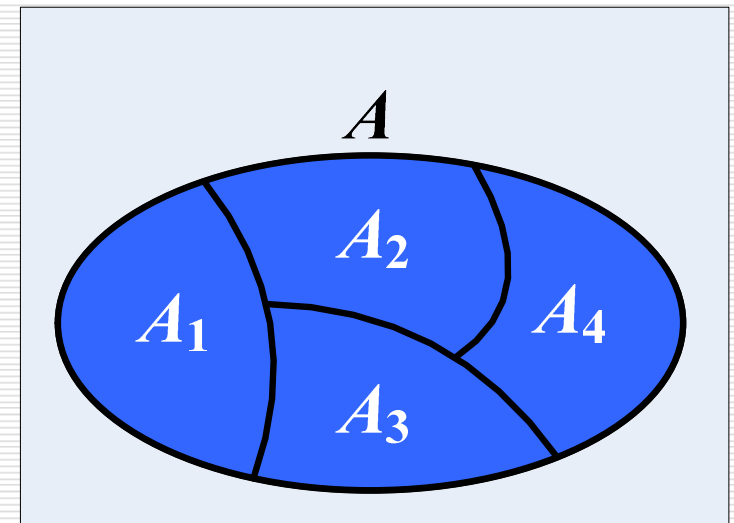
# Πράξεις Συνόλων

- **Συμμετρική διαφορά** συνόλων  $A$  και  $B$ ,  $A \oplus B$ :
  - Σύνολο με στοιχεία που ανήκουν **είτε στο  $A$  είτε στο  $B$**  αλλά **όχι και στα δύο**.
  - $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$



# Διαμέριση Συνόλου

- Μη κενό σύνολο  $A$ . Συλλογή  $A_1, A_2, \dots, A_n$  μη κενών υποσυνόλων του  $A$  αποτελεί **διαμέριση** του  $A$  ανν:
  - $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$
  - Τα  $A_1, A_2, \dots, A_n$  είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους.
- Παραδείγματα:
  - Τα  $\{0, 2, 4, \dots\}$  και  $\{1, 3, 5, \dots\}$  αποτελούν διαμέριση του  $\mathbb{N}$ .
  - Τα  $\{-1, -2, -3, \dots\}$ ,  $\{0\}$ ,  $\{1, 2, 3, \dots\}$  αποτελούν διαμέριση του  $\mathbb{Z}$ .



# Ιδιότητες Πράξεων Συνόλων

---

Αντιμεταθετική	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Προσεταιριστική	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Επιμεριστική	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Κανόνας συμπλήρωσης	$\overline{\overline{A}} = A$

# Ιδιότητες Πράξεων Συνόλων (II)

Ουδέτερο στοιχείο	$A \cup \emptyset = A$ $A \cap U = A$
Απορροφητικό στοιχείο	$A \cap \emptyset = \emptyset$ $A \cup U = U$
Αυτοπάθεια	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
Κανόνας Απορρόφησης	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
Κανόνας De Morgan	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

# Πράξεις Συνόλων

---

- Αντιστοιχία πράξεων συνόλων με λογικούς συνδέσμους.
  - Στοιχεία συνόλου  $A$  έχουν ιδιότητα  $(\alpha)$ .
  - Στοιχεία συνόλου  $B$  έχουν ιδιότητα  $(\beta)$ .
  - Π.χ. στοιχεία συνόλου  $A \cup B$  έχουν ιδιότητα  $(\alpha) \vee (\beta)$ .
- Ιδιότητες πράξεων συνόλων και σχέσεων μεταξύ συνόλων ελέγχονται / αποδεικνύονται με **membership tables**.
  - Πίνακες που εξετάζουν όλα τα ενδεχόμενα για το που ανήκει ένα στοιχείο.
  - Ισοδύναμο των **πινάκων αλήθειας**.



# Παράδειγμα Membership Table

- Παράδειγμα membership table για επιμεριστική ιδιότητα της τομής ως προς την ένωση.

$A$	$B$	$C$	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

# Παραδείγματα

---

□ Ν.δ.ο.  $(A \cup B) \cap \bar{B} = A \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

■ Αρκεί ν.δ.ο.  $A - B = A$  ανν  $A \cap B = \emptyset$ , αφού

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cap \bar{B} &= (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{B}) \\ &= A \cap \bar{B} \\ &= A - B\end{aligned}$$

□ Ν.δ.ο.  $\overline{(\bar{A} \cup \bar{B})} \cap \bar{A} = A$

$$\overline{(\bar{A} \cup \bar{B})} \cap \bar{A} = \bar{\bar{A}} = A$$

□ Ν.δ.ο.  $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$ .

□ Ν.δ.ο.  $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$ . Να δώσετε παράδειγμα όπου το 1<sup>ο</sup> είναι γνήσιο υποσύνολο του 2<sup>ου</sup>.

# Παραδείγματα

---

□ Ν.δ.ο.  $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

$$\begin{aligned}(A - B) - C &= (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C} \\ &= A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) \\ &= A \cap \overline{(B \cup C)}\end{aligned}$$

□ Ν.δ.ο.  $(A - B) - C = (A - C) - B$

■  $(A - B) - C = A - (B \cup C)$   
 $= A - (C \cup B)$   
 $= (A - C) - B$

# Παραδείγματα

---

□ Ν.δ.ο.  $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$

$$(A - C) - (B - C) = (A \cap \bar{C}) \cap (\overline{B \cap \bar{C}})$$

$$= (A \cap \bar{C}) \cap (\bar{B} \cup C)$$

$$= (A \cap \bar{C} \cap \bar{B}) \cup \overbrace{(A \cap \bar{C} \cap C)}^{=\emptyset}$$

$$= (A \cap \bar{B}) \cap \bar{C}$$

$$= (A - B) - C$$