Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Προηγμένα Θέματα Αλγορίθμων

Αλγόριθμοι Δικτύων και Πολυπλοκότητα

Εαρινό εξάμηνο 2025-2026

(ΕΜΠ – ΑΛΜΑ)

Διδάσκων: Δημήτρης Φωτάκης

2η Σειρά Ασκήσεων

Προθεσμία παράδοσης: 30/6/2026

Άσκηση 1 (Non-Linear Randomized Rounding for MAX SAT, 1.5 μον.). Να λύσετε την [2, Άσκηση **5.4**] και την [2, Άσκηση **5.5**].

Άσκηση 2 (Randomized Rounding for MAX-k-3CSP, 2 μον.). Θεωρούμε ένα πρόβλημα ικανοποίησης περιορισμών, ας το ονομάσουμε MAX-k-3CSP, όπου οι μεταβλητές μπορούν να πάρουν τρεις διαφορετικές τιμές $\{e, f, g\}$ (αντί π.χ. για $\{0, 1\}$ στο k-SAT).

Στο MAX-k-3CSP δίνονται σύνολο $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ μεταβλητών και m περιορισμοί. Κάθε περιορισμός $C_j = (w_j, E_j, F_j, G_j)$ είναι μια τετράδα όπου $w_j \in \mathbb{N}$ είναι το βάρος του περιορισμού, και $E_j, F_j, G_j \subseteq X$ είναι σύνολα μεταβλητών, ξένα μεταξύ τους ανά δύο, με $|E_j| + |F_j| + |G_j| = k$ (για δεδομένο φυσικό $k \geq 2$). Μια ανάθεση $a : X \to \{e, f, g\}$ ικανοποιεί έναν περιορισμό C_j αν υπάρχει μεταβλητή $x_i \in E_j$ με $a(x_i) = e$ ή υπάρχει $x_i \in F_j$ με $a(x_i) = f$ ή υπάρχει $x_i \in G_j$ με $a(x_i) = g$ (δηλαδή η a αναθέτει σε τουλάχιστον μία από τις μεταβλητές του C_j την επιθυμητή τιμή, με βάση το σύνολο στο οποίο ανήκει). Ζητείται ο υπολογισμός ανάθεσης a που μεγιστοποιεί το συνολικό βάρος των περιορισμών που ικανοποιούνται από την a.

1. Να διατυπώσετε το πρόβλημα MAX-k-3CSP ως πρόβλημα Ακέραιου Γραμμικού Προγραμματισμού (ILP).

2. Θεωρούμε την τυχαία ανάθεση τιμών στο X, όπου κάθε μεταβλητή x_i τίθεται ανεξάρτητα στην τιμή e με πιθανότητα $1/3$, στην τιμή f με πιθανότητα $1/3$ και στην τιμή g με πιθανότητα $1/3$. Ποιο είναι το αναμενόμενο συνολικό βάρος των περιορισμών που ικανοποιούνται από την τυχαία ανάθεση; Ποιος είναι ο λόγος προσέγγισης του αλγόριθμου που βασίζεται στην τυχαία ανάθεση;

3. Χρησιμοποιώντας την γραμμική χαλάρωση (linear relaxation) του ILP στο (1) και τυχαία στρογγυλοποίηση, να διατυπώσετε αλγόριθμο προσέγγισης για το MAX-k-3CSP. Να αναλύσετε προσεκτικά τον λόγο προσέγγισης του αλγορίθμου σας.

4. Να συνδυάσετε τον αλγόριθμό σας με την τυχαία ανάθεση του (2) σε αλγόριθμο με λόγο προσέγγισης που δεν εξαρτάται από το k. Ποιος είναι ο λόγος προσέγγισης του συνδυασμού των δύο αλγορίθμων;

Άσκηση 3 (Maximum Acyclic Subgraph, 1.5 μον.). (α) Έστω απλό κατευθυνόμενο πλήρες γράφημα $G(V, E)$ με n κορυφές (δηλ. για κάθε ζευγάρι διαφορετικών $u, v \in V$, υπάρχει μια από τις ακμές (u, v) ή (v, u) στο G – τέτοια γραφήματα καλούνται τουρνουά). Έστω $w : E \to \mathbb{N}$ συνάρτηση που αποδίδει βάρος $w(e)$ σε κάθε ακμή $e \in E$. Θέλουμε να υπολογίσουμε ακυκλικό υπογράφημα $G'(V, E')$ που είναι κατά το δυνατόν πιο κοντά στο G (το G' θα αποτελεί μια μερική διάταξη του V – αν το G δεν έχει κύκλους, τότε αποτελεί μια ολική διάταξη του V).

1. Θέλουμε να υπολογίσουμε ακυκλικό υπογράφημα $G'(V, E')$ του G που **μεγιστοποιεί** το συνολικό βάρος των ακμών που **έχουν συμπεριληφθεί** στο E'. Να διατυπώσετε έναν (κατά το δυνατόν απλό) πιθανοτικό αλγόριθμο για αυτό το πρόβλημα και να αναλύσετε τον λόγο προσέγγισης που επιτυγχάνει.

2. Θέλουμε να υπολογίσουμε ακυκλικό υπογράφημα $G'(V, E')$ του G που **ελαχιστοποιεί** το συνολικό βάρος των ακμών που **δεν έχουν συμπεριληφθεί** στο E'. Να εξηγήσετε (μέσω κατάλληλου παραδείγματος) γιατί η απλή πιθανοτική στρατηγική που ακολουθήσαμε στο (1) δεν μπορεί να εγγυηθεί ικανοποιητικό λόγο προσέγγισης για αυτή την εκδοχή του προβλήματος.

Άσκηση 4 (Capacited Max k-Cut, 1.5 μον.). Στο Max k-Cut πρόβλημα δίνεται απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w)$, με θετικά ακέραια βάρη $w : E \to \mathbb{N}^*$ στις ακμές, και ζητείται μια διαμέριση των κορυφών σε $k \geq 2$ σύνολα $(S_1, \ldots, S_k)$, με $\bigcup_{i=1}^{k} S_i = V$, ώστε να μεγιστοποιηθεί το συνολικό βάρος των ακμών με άκρα σε διαφορετικά σύνολα. Ειδικότερα, αν συμβολίσουμε με

$$\delta(S_1, \ldots, S_k) = \Big\{ e = \{u, v\} \in E : v \in S_i, u \in S_j \text{ και } i \neq j \Big\}$$

το σύνολο των ακμών στο k-cut $(S_1, \ldots, S_k)$, ζητείται να μεγιστοποιήσουμε το

$$w(S_1, \ldots, S_k) = \sum_{e \in \delta(S_1, \ldots, S_k)} w(e)\,.$$

Θεωρούμε παραλλαγή του προβλήματος Max k-Cut όπου τα επιθυμητά μεγέθη $(c_1, \ldots, c_k)$, με $c_1 + \cdots + c_k = |V|$ των συνόλων που ορίζουν το k-cut είναι δεδομένα. Εφαρμόζουμε τον πιθανοτικό αλγόριθμο που τοποθετεί κάθε κορυφή v στο σύνολο S_i τυχαία, με πιθανότητα $c_i/|V|$, και ανεξάρτητα. Να υπολογίσετε την αναμενόμενη τιμή του $w(S_1, \ldots, S_k)$ (και να διερευνήσετε πότε μεγιστοποιείται). Να υπολογίσετε ακόμη άνω και κάτω φράγματα (ώστε να ισχύουν με μεγάλη πιθανότητα) για τα μεγέθη των συνόλων που προκύπτουν.

Άσκηση 5 (Random Sampling, 1 μον.)**.** Θεωρούμε μια δημοσκόπηση για τη στάση των πολιτών ως προς μια σημαντική πολιτικο-οικονομική μεταβολή. Οι πολίτες απαντούν στη δημοσκόπηση με “ναι” ή “όχι” (υπέρ ή εναντίον της μεταβολής). Αν το (πραγματικό) ποσοστό των πολιτών που τάσσονται υπέρ της μεταβολής είναι p, θέλουμε να υπολογίσουμε μια εκτίμηση $\hat{p}$ του p ώστε $\mathbb{P}\mathrm{r}[|\hat{p} - p| \leq \varepsilon p] > 1 - \delta$, για δεδομένα $\varepsilon, \delta \in (0, 1)$. Για τη δημοσκόπηση, θα ρωτήσουμε N πολίτες, που επιλέγονται ισοπίθανα και ανεξάρτητα από το σύνολο των πολιτών. Η εκτίμησή μας $\hat{p}$ θα είναι το ποσοστό των N πολιτών που τάσσονται υπέρ της μεταβολής. Χρησιμοποιώντας Chernoff-Hoeffding bounds, να υπολογίσετε (ως συνάρτηση των ε, δ, και p) το ελάχιστο μέγεθος N του δείγματος που χρειαζόμαστε. Βρείτε την τιμή του N για $\varepsilon = 0.02$ και $\delta = 0.05$, αν γνωρίζουμε ότι $p \in [0.1, 0.7]$ (και δείτε ότι αυτή η τιμή είναι ανεξάρτητη του πληθυσμού της χώρας!). Να υπολογίσετε ακόμη το ελάχιστο μέγεθος N' δείγματος (ως συνάρτηση των ε και δ) ώστε η εκτίμησή μας $\hat{p}'$ να ικανοποιεί $\mathbb{P}\mathrm{r}[|\hat{p}' - p| \leq \varepsilon] > 1 - \delta$. Ποια είναι η τιμή του N' για $\varepsilon = 0.02$ και $\delta = 0.05$; *Σημείωση:* Πρόκειται για παραλλαγή της [1, Άσκησης **4.5**].

Άσκηση 6 (Online Learning, 1.5 μον.)**.** Να διατυπώσετε τον αλγόριθμο Follow the Leader (FTL) για την “πρόβλεψη” μιας ακολουθίας σημείων $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_T \in B$, όπου $B = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x}\|_2 \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^n$ η μοναδιαία μπάλα στις n διαστάσεις, όταν η συνάρτηση απώλειας (loss function) είναι τετραγωνική. Δηλαδή, σε κάθε γύρο $t = 1, 2, \ldots, T$, ο FTL επιλέγει σημείο $\boldsymbol{p}_t \in B$ και εμφανίζει απώλεια $\ell(\boldsymbol{p}_t, \boldsymbol{x}_t) = \|\boldsymbol{p}_t - \boldsymbol{x}_t\|_2^2$.

1. Να εκφράσετε κάθε σημείο $\boldsymbol{p}_t$ που επιλέγεται από τον FTL ως συνάρτηση των σημείων $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{t-1}$ της ακολουθίας (μπορείτε να θεωρήσετε ότι $\boldsymbol{p}_1 = 0$).

2. Να δείξετε ότι ο FTL εμφανίζει regret $O(\log T)$ για μια τέτοια ακολουθία. Θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσετε ότι τα $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_T$ ανήκουν στη μοναδιαία μπάλα. Αν σας εξυπηρετεί, μπορείτε να μιμηθείτε την απόδειξη για το regret του Online Gradient Descent για την αντίστοιχη κατηγορία συναρτήσεων.

3. Να δώσετε μια ακολουθία σημείων $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_T \in B$ για την οποία το regret του FTL είναι $\Omega(\log T)$ (και πάλι μπορείτε να θεωρήσετε ότι $\boldsymbol{p}_1 = 0$).

Άσκηση 7 (Stochastic Bandits, 1.5 μον.)**.** Θεωρούμε ένα stochastic bandit σενάριο με 2 βραχίονες (arms), όπου η ακολουθία κερδών για κάθε βραχίονα $i \in \{1, 2\}$ προκύπτει ως ακολουθία ανεξάρτητων δειγμάτων από μια κατανομή Bernoulli. Οι μέσες τιμές των δύο κατανομών Bernoulli είναι a και b (τα οποία είναι γνωστά), με $0 < a < b < 1$ και $\Delta = b - a$. Εκείνο που δεν γνωρίζουμε είναι ποιος βραχίονας αντιστοιχεί στην κατανομή με υψηλή μέση τιμή b. Γνωρίζουμε ότι ο UCB εξασφαλίζει regret $O((\log T)/\Delta)$ σε αυτό το σενάριο, αλλά ο αλγόριθμος (και η ανάλυση) δεν εκμεταλλεύονται την πλήρη γνώση των κατανομών κέρδους για τους δύο βραχίονες.

Θεωρούμε τον ακόλουθο αλγόριθμο: Για $t = i$, $i \in \{1, 2\}$, επιλέγουμε τον i-οστό βραχίονα. Για κάθε $t \geq 3$, αν υπάρχει βραχίονας με μέσο βεβαιωμένο κέρδος μεγαλύτερο του $(a + b)/2$, επιλέγουμε τον βραχίονα με το υψηλότερο μέσο βεβαιωμένο κέρδος. Διαφορετικά, επιλέγουμε την 1ο βραχίονα για τη στιγμή t και τον 2ο βραχίονα για τη στιγμή $t+1$. Θέλουμε να δείξουμε ότι το regret αυτού του αλγόριθμου εξαρτάται μόνο από το Δ (και όχι από τον χρονικό ορίζοντα T).

1. Έστω $t \geq 3$. Να δώσετε ένα άνω φράγμα στην πιθανότητα ο βραχίονας με μέση τιμή a να εμφανίζει μέσο βεβαιωμένο κέρδος μεγαλύτερο του $(a+b)/2$ (και άρα να είναι επιλέξιμος) τη χρονική στιγμή t.

2. Έστω $t \geq 3$. Να δώσετε ένα άνω φράγμα στην πιθανότητα ο βραχίονας με μέση τιμή b να εμφανίζει μέσο βεβαιωμένο κέρδος μικρότερο του $(a+b)/2$ τη χρονική στιγμή t (γεγονός που καθιστά επιλέξιμο τον βραχίονα με μέση τιμή a).

3. Να δώσετε ένα άνω φράγμα στο αναμενόμενο regret του αλγορίθμου, με βάση το Δ και τις πιθανότητες που υπολογίσατε στα προηγούμενα δύο βήματα. Στόχος είναι να δείξουμε ότι το regret του αλγορίθμου εξαρτάται μόνο από το Δ (και όχι από τον χρονικό ορίζοντα T).

Αναφορές

[1] M. Mitzenmacher and E. Upfal. *Probability and Computing: Randomized Algorithms and Probabilistic Analysis*. Cambridge University Press, 2005.

[2] D.P. Williamson and D.B. Shmoys. *The Design of Approximation Algorithms*. Cambridge University Press, 2010.