Μη Ντετερμινισμός και NP-Πληρότητα

Δημήτρης Φωτάκης

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

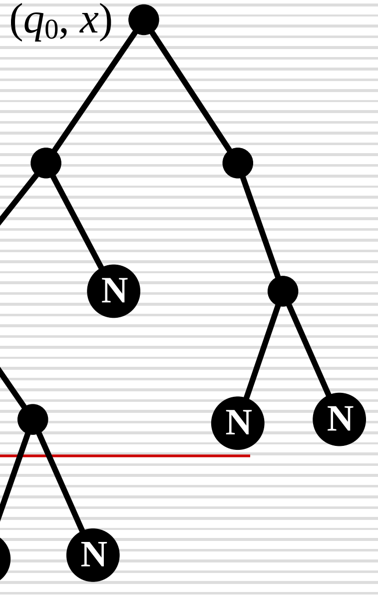
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Μη Ντετερμινιστικές Μηχανές Turing

- Μη ντετερμινιστική Μηχ. Turing (NTM) $N \equiv (Q, \Sigma, \Delta, q_0, F)$
  - Q σύνολο καταστάσεων.
  - Σ αλφάβητο εισόδου και $\Gamma = \Sigma \cup \{\sqcup\}$ αλφάβητο ταινίας.
  - $q_0 \in Q$ αρχική κατάσταση.
  - $F \subseteq Q$ τελική κατάσταση (εστιάζουμε σε YES και NO).
  - $\Delta \subseteq ((Q \setminus F) \times \Gamma) \times (Q \times \Gamma \times \{L, R, S\})$ **σχέση** μετάβασης.
    (κατάσταση q, διαβάζει α) $\rightarrow$ **σύνολο** ενεργειών
    (νέα κατάσταση q', γράφει α', κεφαλή μετακινείται L, R ή S).
- (Αρχική, τελική) διαμόρφωση όπως για DTM.
- Για κάθε τρέχουσα διαμόρφωση, υπάρχουν καμία ή **περισσότερες** επιτρεπτές επόμενες διαμορφώσεις όπου μπορεί DTM να μεταβεί!

Μη Ντετερμινιστικές Μηχανές Turing

- Υπολογισμός NTM: **σχέση |-** και σχέση $|\text{-}^*$.
  - |- : διαμορφώσεις που προκύπτουν από τρέχουσα σε ένα βήμα.
  - $|\text{-}^*$: διαμορφώσεις που προκύπτουν σε κάποιο #βημάτων.
- Υπολογισμός NTM αναπαρίσταται με **δέντρο**:
  - Ρίζα: αρχική διαμόρφωση (q_0, x).
  - Κόμβοι: όλες οι διαμορφώσεις που μπορεί να προκύψουν από αρχική διαμόρφωση (q_0, x).
  - Απόγονοι κόμβου: όλες οι διαμορφώσεις που προκύπτουν με βάση σχέση μετάβασης Δ.
  - Φύλλα: όλες οι τελικές διαμορφώσεις που προκύπτουν από αρχική.
  - Βαθμός σταθερός! Χβτγ, δυαδικό δέντρο.
  - Υπολογισμός DTM: **μονοπάτι**!

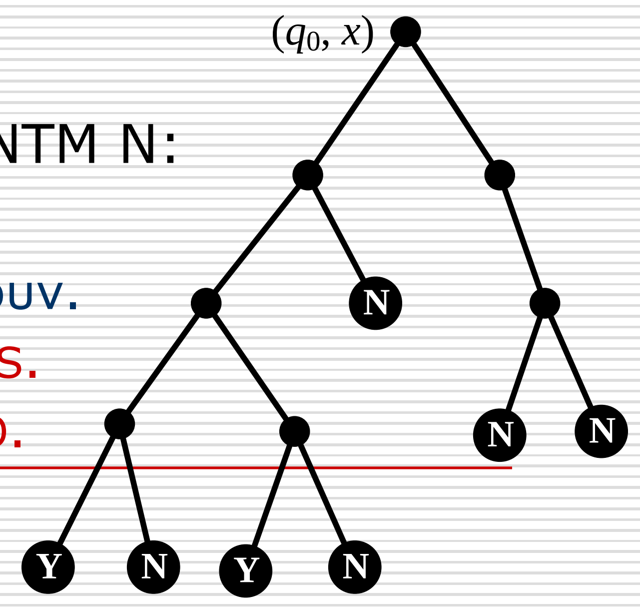


Αποδοχή και Απόρριψη

- NTM N έχει πολλούς κλάδους υπολογισμού («εκδοχές») που μπορεί να καταλήγουν σε διαφορετικό αποτέλεσμα.
  - Αποδέχεται αν τουλάχιστον **ένας** κλάδος αποδέχεται: «δικτατορία της αποδοχής»!
  - N(x) = YES ανν $(q_0, \underline{x_1}x_2 \ldots x_n) \vdash^* (\mathrm{YES}, \ldots)$
- Γλώσσα L NTM-αποκρίσιμη ανν υπάρχει NTM N, $\forall$x $\in$ Σ^*:
  - όλοι οι κλάδοι της N(x) **τερματίζουν**, και $x \in L \Leftrightarrow N(x) = \mathrm{YES}$
- Γλώσσα L NTM-αποδεκτή ανν υπάρχει NTM N:

$$\forall x \in \Sigma^*, x \in L \Leftrightarrow N(x) = \mathrm{YES}$$

  - Ενδέχεται κλάδοι N(x) να μην τερματίζουν.
  - Όταν x $\in$ L, τουλ. ένας τερματίζει σε YES.
  - Όταν x $\notin$ L, όσοι τερματίζουν δίνουν NO.

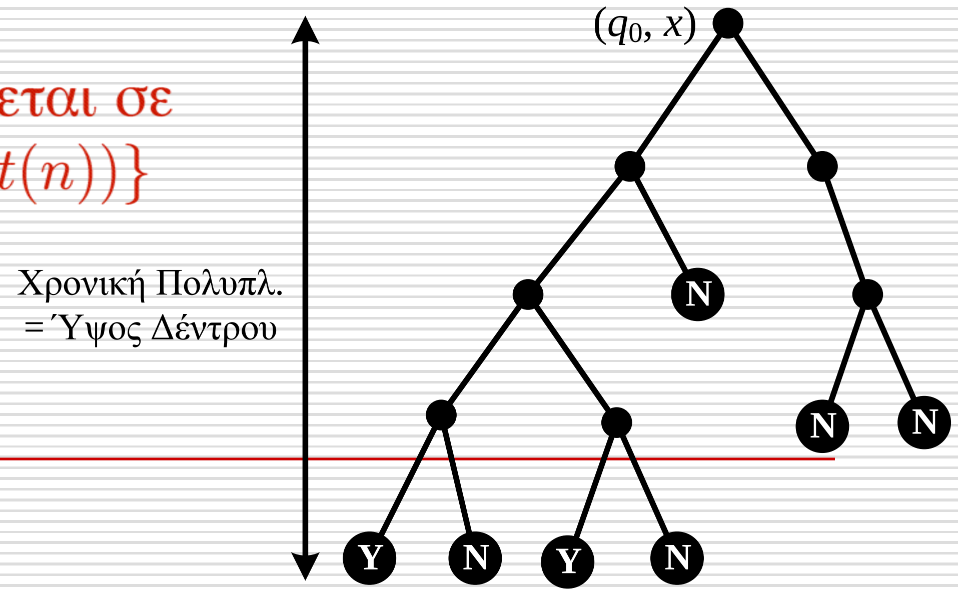


Μη Ντετερμινιστική Χρονική Πολυπλοκότητα

- Χρονική πολυπλοκότητα NTM N:
  - Αύξουσα συνάρτηση $t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ώστε για κάθε x, |x| = n, όλοι οι κλάδοι της N(x) έχουν μήκος $\leq t(n)$.
  - Μέγιστο ύψος δέντρου υπολογισμού N με είσοδο μήκους n.
- Μη ντετερμινιστική χρονική πολυπλοκότητα προβλ. Π:
  - Χρονική πολυπλοκότητα «ταχύτερης» NTM που λύνει Π.
- Κλάση πολυπλοκότητας

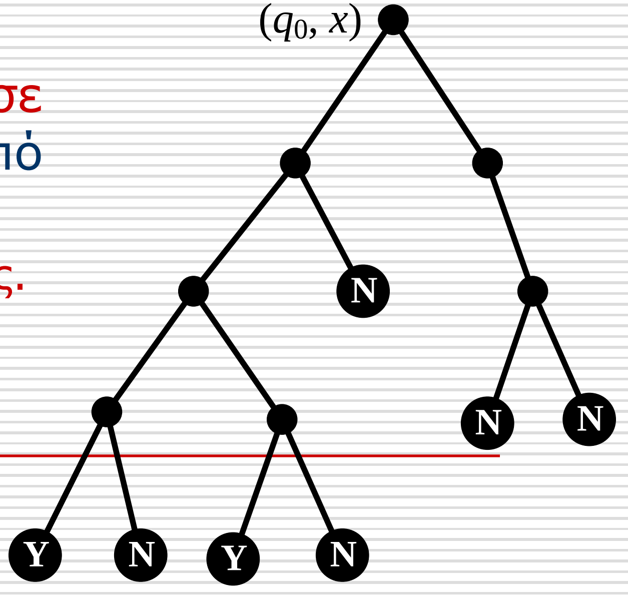
$$\mathbf{NTIME}[t(n)] \equiv \{\Pi : \Pi \text{ λύνεται σε μη ντετερμινιστικό χρόνο } \mathrm{O}(t(n))\}$$

- Όχι ρεαλιστικό μοντέλο, αλλά θεμελιώδες για Θεωρία Πολυπλοκότητας!



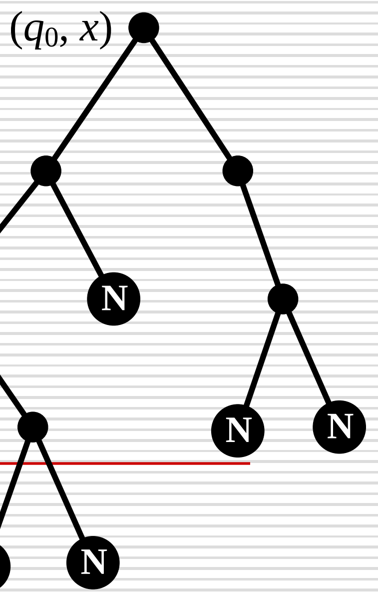
Μη Ντετερμινιστικός Υπολογισμός

- Ισοδύναμοι τρόποι για μη ντετερμινιστικό υπολογισμό:
  - N(x) «**μαντεύει**» (πάντα σωστά) κλάδο που καταλήγει σε YES και ακολουθεί μόνο αυτόν (επιβεβαιώνει YES).
    - Αναζήτηση x σε πίνακα A με n στοιχεία: «Μάντεψε» θέση k, και επιβεβαίωσε ότι A[k] = x.
    - Hamilton Cycle: «Μάντεψε» μετάθεση κορυφών και επιβεβαίωσε ότι δίνει HC.
    - *k*-SAT: «Μάντεψε» αποτίμηση και επιβεβαίωσε ότι ικανοποιεί *φ*.
  - Στο βήμα *k*, N(x) «εκτελεί» / βρίσκεται σε όλες τις διαμορφώσεις σε απόσταση *k* από αρχική **ταυτόχρονα**.
    - «Μηχανιστική» προσομοίωση νοημοσύνης.
  - Χρόνος = ύψος δέντρου υπολογισμού.



Ντετερμινιστική Προσομοίωση

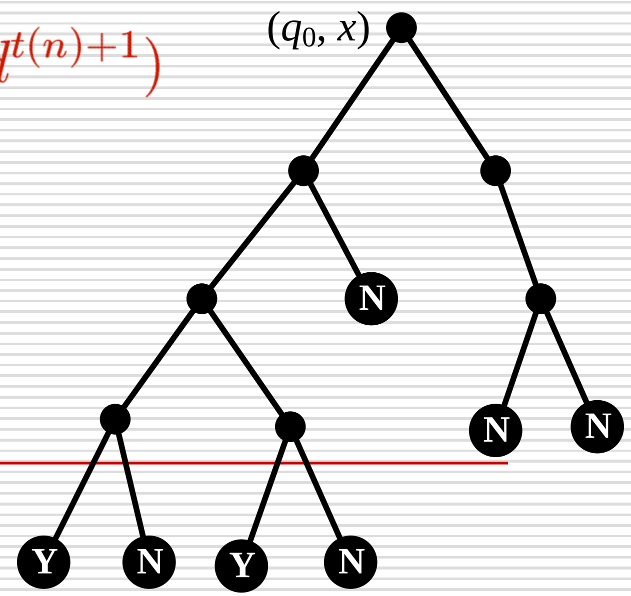
- Ντετερμινιστική προσομοίωση NTM με εκθετική επιβάρυνση.
  - Προσομοίωση δέντρου υπολογισμού με BFS λογική.
  - Για t = 1, 2, …, t(|x|), προσομοίωση όλων των κλάδων υπολογισμού N(x) μήκους $\leq t$.
  - Τερματισμός YES: πρώτος κλάδος που καταλήγει σε YES.
  - Τερματισμός NO: πρώτο t που όλοι οι κλάδοι τερματίζουν σε NO.
  - Μη τερματισμός: κανένας κλάδος σε YES και κάποιος δεν τερματίζει.
- NTM-αποκρίσιμο ανν DTM-αποκρίσιμο.
  (Θέση Church-Turing)
- NTM-αποδεκτό ανν DTM-αποδεκτό.



NTIME και DTIME

- Ντετερμινιστική προσομοίωση NTM με εκθετική επιβάρυνση.
  - Για t = 1, 2, …, t(|x|), προσομοίωση όλων των κλάδων υπολογισμού N(x) μήκους $\leq t$.
  - Τερματισμός YES: πρώτος κλάδος που καταλήγει σε YES.
  - Τερματισμός NO: πρώτο t που όλοι οι κλάδοι τερματίζουν σε NO.
- Αν NTM χρόνου $t(n)$ και με βαθμό μη ντετερμινισμού d, χρόνος προσομοίωσης: $\sum_{t=1}^{t(n)} \mathrm{O}(d^t) = \mathrm{O}(d^{t(n)+1})$
- Κατά συνέπεια:

$$\mathbf{NTIME}[t(n)] \subseteq \bigcup_{d>1} \mathbf{DTIME}[d^{t(n)}]$$



Η Κλάση NP

- Προβλήματα που λύνονται σε πολυωνυμικό **μη ντετερμινιστικό** χρόνο: $\mathbf{NP} = \bigcup_{k \geq 0} \mathbf{NTIME}[n^k]$
  - «YES-λύση» μπορεί να «μαντευθεί» σε πολυωνυμικό χρόνο (άρα πολυωνυμικού μήκους) και να επιβεβαιωθεί σε πολυωνυμικό **ντετερμινιστικό** χρόνο.
  - (k-)SAT, κύκλος Hamilton, TSP, Knapsack, MST, Shortest Paths, Max Flow, … ανήκουν στην κλάση **NP**.
  - Χρειάζεται προσπάθεια για να σκεφθείτε πρόβλημα εκτός **NP**!
- Κλάση **NP** κλειστή ως προς ένωση, τομή, και πολυωνυμική αναγωγή.
  - Πιστεύουμε ότι κλάση **NP** δεν είναι κλειστή ως προς συμπλήρωμα (ασυμμετρία υπέρ αποδοχής).
  - **coNP**: αντίστοιχη κλάση με ασυμμετρία υπέρ απόρριψης.

NP και Συνοπτικά Πιστοποιητικά

- Σχέση R $\subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ είναι:
  - πολυωνυμικά ισορροπημένη αν $\forall (x, y) \in R, |y| \leq \mathrm{poly}(|x|)$
  - πολυωνυμικά αποκρίσιμη αν (x, y) $\in$ R ελέγχεται (ντετερμινιστικά) σε πολυωνυμικό χρόνο.
- L $\in$ **NP** ανν υπάρχει πολυωνυμικά ισορροπημένη και πολυωνυμικά αποκρίσιμη σχέση R $\subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ ώστε

$$L = \{x \in \Sigma^* : \exists y \in \Sigma^*, (x, y) \in R\}$$

  - y αποτελεί «σύντομο» και «εύκολο» να ελεγχθεί πιστοποιητικό ότι x $\in$ L.
- Αν υπάρχει τέτοια σχέση R, υπάρχει NTM N:
  - $\forall$x $\in$ L, N(x) «μαντεύει» πιστοποιητικό y και επιβεβαιώνει ότι (x, y) $\in$ R σε πολυωνυμικό χρόνο.

NP και Συνοπτικά Πιστοποιητικά

- L $\in$ **NP** ανν υπάρχει πολυωνυμικά ισορροπημένη και πολυωνυμικά αποκρίσιμη σχέση R $\subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ ώστε

$$L = \{x \in \Sigma^* : \exists y \in \Sigma^*, (x, y) \in R\}$$

- Αν L $\in$ NP, θεωρούμε NTM N που αποφασίζει L.
  - Πιστοποιητικό y αποτελεί κωδικοποίηση μη ντετερμινιστικών επιλογών N(x) που οδηγούν σε YES.

    $$R = \{(x, y) : x \in L \text{ και } y \text{ κωδικοποιεί κλάδο } N(x) \text{ με YES}\}$$

  - |y| $\leq$ poly(|x|) γιατί N πολυωνυμικού χρόνου.
  - (x, y) $\in$ R ελέγχεται πολυωνυμικά ακολουθώντας (μόνο) κλάδο υπολογισμού N(x) που κωδικοποιείται από y.
    - (x, y) $\in$ R ανν ο y-κλάδος N(x) καταλήγει σε YES.

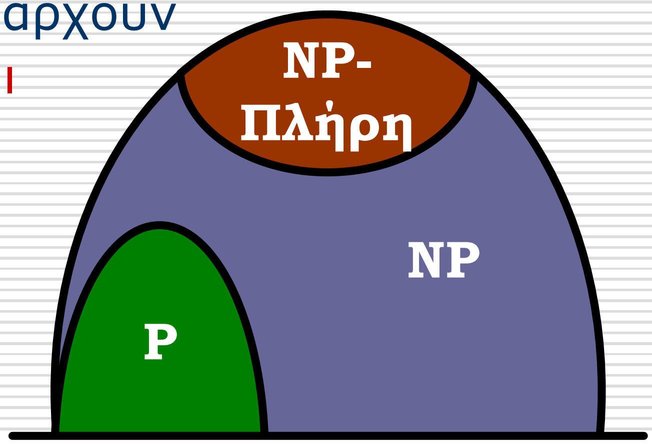
NP και Συνοπτικά Πιστοποιητικά

- Η κλάση **NP** περιλαμβάνει προβλήματα απόφασης:
  - Για κάθε YES-στιγμιότυπο, υπάρχει «συνοπτικό» πιστοποιητικό που ελέγχεται «εύκολα» (πολυωνυμικά).
  - Ένα τέτοιο πιστοποιητικό μπορεί να είναι **δύσκολο να υπολογισθεί.**
  - Δεν απαιτείται κάτι αντίστοιχο για NO-στιγμιότυπα.
- Κλάση **coNP** περιλαμβάνει προβλήματα απόφασης που έχουν αντίστοιχο πιστοποιητικό για NO-στιγμιότυπα.
  - Αν πρόβλημα Π $\in$ **NP**, πρόβλημα coΠ = $\{ x : x \notin \Pi \}$ $\in$ **coNP**.
- Προβλήματα στο **P** ανήκουν **NP**
- Προβλήματα στο **P** ανήκουν **coNP**

$$\Rightarrow \mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP} \cap \mathbf{coNP}$$

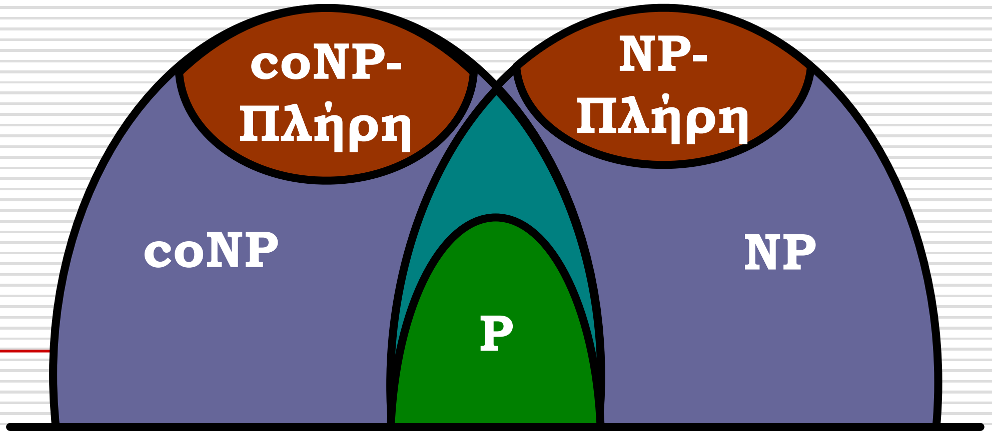
NP-Πληρότητα

- Πρόβλημα Π είναι **NP**-πλήρες αν Π $\in$ **NP** και κάθε πρόβλημα Π′ $\in$ **NP** ανάγεται πολυωνυμικά στο Π (Π′ $\leq_P$ Π).
  - Π είναι από τα δυσκολότερα προβλήματα στο **NP** (όσον αφορά στον υπολογισμό πολυωνυμικού χρόνου).
- Π κάποιο **NP**-πλήρες πρόβλημα: Π $\in$ **P** ανν **P** = **NP**.
  - Αν **P** = **NP**, πολλά σημαντικά προβλήματα **ευεπίλυτα!**
  - Αν **P** $\neq$ **NP** (όπως όλοι πιστεύουν), υπάρχουν προβλήματα στο **NP** που **δεν** λύνονται σε **πολυωνυμικό** χρόνο!
  - Εξ′ ορισμού, τα **NP**-πλήρη ανήκουν σε αυτή την κατηγορία.



NP-Πληρότητα

- Αντίστοιχα με **coNP** και **coNP**-πλήρη προβλήματα.
- Έστω προβλήματα Π_1, $\Pi_2 \in$ **NP** ώστε $\Pi_1 \leq_P \Pi_2$.
  Ποιες από τις παρακάτω δηλώσεις αληθεύουν;
  1. $\Pi_1 \in \mathbf{P} \Rightarrow \Pi_2 \in \mathbf{P}$
  2. $\Pi_2 \in \mathbf{P} \Rightarrow \Pi_1 \in \mathbf{P}$
  3. Π_2 όχι **NP**-πλήρες $\Rightarrow \Pi_1$ όχι **NP**-πλήρες
  4. Π_1 **NP**-πλήρες $\Rightarrow \Pi_2 \leq_P \Pi_1$



SAT είναι NP-Πλήρες

- **Ικανοποιησιμότητα** (SAT):
  - Δίνεται λογική πρόταση φ σε CNF. Είναι φ ικανοποιήσιμη;
- SAT $\in$ **NP**.
  - «Μαντεύουμε» ανάθεση τιμών αλήθειας α σε μεταβλητές φ.
  - Ελέγχουμε ότι ανάθεση α ικανοποιεί φ.
- **Θεώρημα Cook** (1971):
  - SAT είναι **NP**-πλήρες.
  - Υπολογισμός οποιασδήποτε NTM πολυωνυμικού χρόνου N με είσοδο x κωδικοποιείται σε CNF πρόταση $\varphi_{N,x}$:
    - $\varphi_{N,x}$ έχει μήκος πολυωνυμικό σε |x| και |N|.
    - $\varphi_{N,x}$ υπολογίζεται σε χρόνο πολυωνυμικό σε |x| και |N|.
    - $\varphi_{N,x}$ είναι ικανοποιήσιμη ανν N(x) = YES.

SAT είναι NP-Πλήρες

- Έστω NTM N p(n)-χρόνου και είσοδος x, |x| = n.
- Για κωδικοποίηση N(x), εισάγουμε 3 είδη μεταβλητών:
  - Q[k, t]: N(x) βρίσκεται στην κατάσταση q_k την στιγμή t.
  - H[j, t]: κεφαλή βρίσκεται στη θέση j την στιγμή t.
  - S[j, i, t]: θέση j περιέχει σύμβολο s_i την στιγμή t.

  $$0 \le t \le p(n), 0 \le k \le r, -p(n) \le j \le p(n), 0 \le i \le |\Gamma|$$
- Για κωδικοποίηση N(x), εισάγουμε 7 ομάδες όρων:
  - G_1: N(x) βρίσκεται σε μία μόνο κατάσταση κάθε στιγμή.
  - G_2: κεφαλή σε μία μόνο θέση κάθε στιγμή.
  - G_3: κάθε θέση ταινίας περιέχει ένα μόνο σύμβολο κάθε στιγμή.
  - G_4: N(x) ξεκινά από αρχική διαμόρφωση (q_0, x).
  - G_5: N(x) βρίσκεται σε κατάσταση YES την στιγμή p(n).

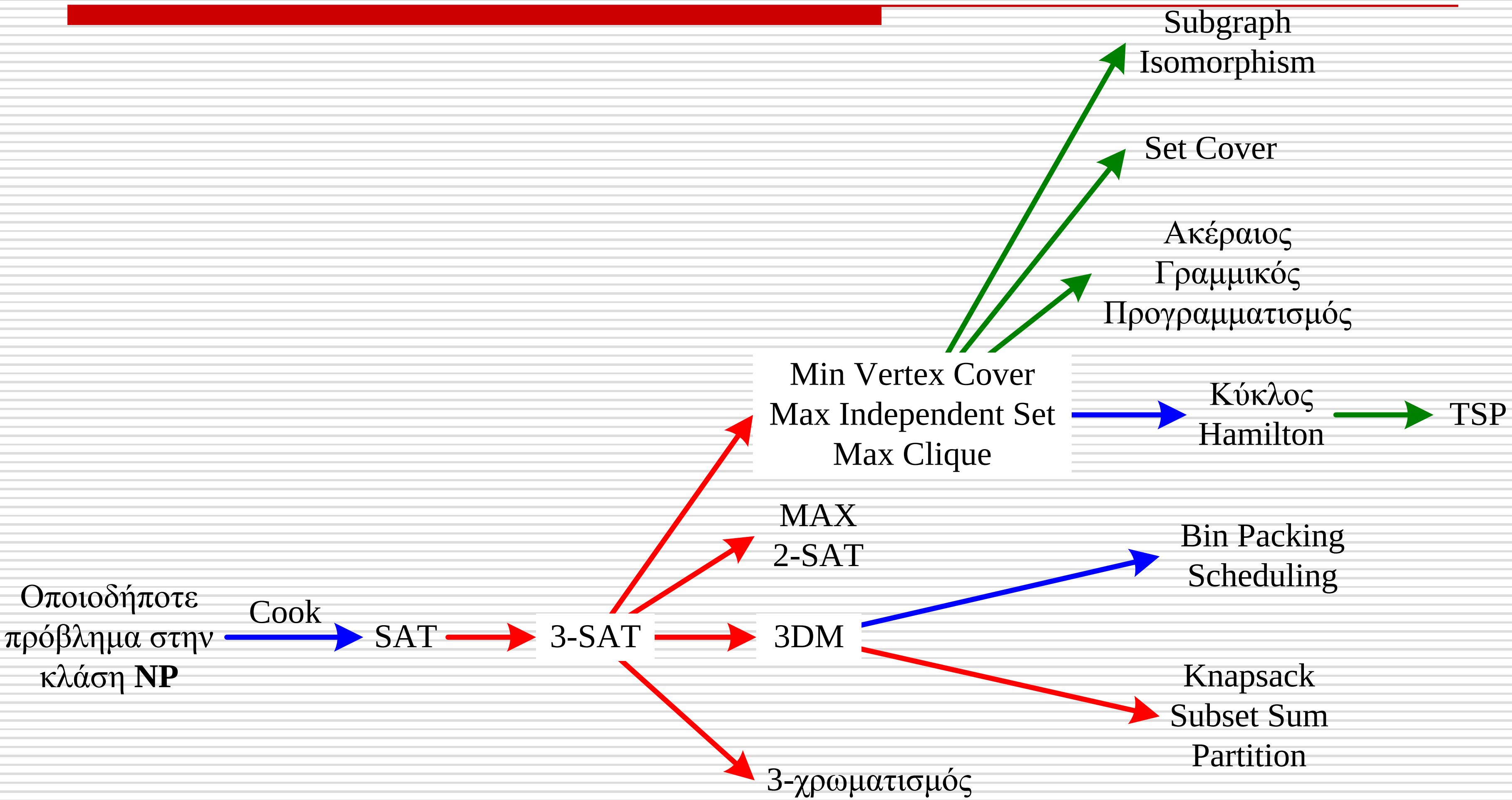
SAT είναι NP-Πλήρες

- Για κωδικοποίηση N(x), εισάγουμε 7 ομάδες όρων:
  - G_6: για κάθε t, μόνο το σύμβολο στη θέση όπου βρίσκεται η κεφαλή μπορεί να αλλάξει στην επόμενη στιγμή t+1.
  - G_7: για κάθε t, η διαμόρφωση στην επόμενη στιγμή t+1 προκύπτει από την τρέχουσα διαμόρφωση με εφαρμογή της σχέσης μετάβασης Δ.
- Τελικά: $\varphi_{N,x} = G_1 \wedge G_2 \wedge G_3 \wedge G_4 \wedge G_5 \wedge G_6 \wedge G_7$
  - $\varphi_{N,x}$ έχει μήκος και κατασκευάζεται σε χρόνο $O(p^3(n))$. από περιγραφή N και είσοδο x.
  - $\varphi_{N,x}$ είναι ικανοποιήσιμη ανν N(x) = YES.

Αποδείξεις NP-Πληρότητας

- Απόδειξη ότι πρόβλημα (απόφασης) Π είναι **NP**-πλήρες:
  - Αποδεικνύουμε ότι $\Pi \in$ **NP** (εύκολο, αλλά απαραίτητο!).
  - Επιλέγουμε (κατάλληλο) γνωστό **NP**-πλήρες πρόβλημα Π′.
  - Ανάγουμε πολυωνυμικά το Π′ στο Π ($\Pi' \leq_P \Pi$):
    - Περιγράφουμε κατασκευή στιγμιότυπου R(x) του Π από στιγμιότυπο x του Π′.
    - Εξηγούμε ότι R(x) υπολογίζεται σε πολυωνυμικό χρόνο.
    - Αποδεικνύουμε ότι $x \in \Pi' \Leftrightarrow R(x) \in \Pi$.
- Αναγωγή με γενίκευση.
  - Π αποτελεί γενίκευση του Π′, και προφανώς Π είναι τουλάχιστον τόσο δύσκολο όσο το Π′.

Ακολουθία Αναγωγών



3-SAT είναι NP-Πλήρες

- 3-SAT: λογική πρόταση φ σε 3-CNF. Είναι φ ικανοποιήσιμη;
- 3-SAT $\in$ **NP** (όπως και SAT). Θδο SAT $\leq_P$ 3-SAT.
  - Έστω πρόταση $\psi = c_1 \wedge \ldots \wedge c_m$ σε CNF.
  - Κατασκευάζουμε φ_ψ σε 3-CNF αντικαθιστώντας κάθε όρο

    $c_j = \ell_{j_1} \vee \ldots \vee \ell_{j_k}$, $k \geq 4$, με όρο

    $$c'_j = (\ell_{j_1} \vee \ell_{j_2} \vee z_{j_1}) \wedge (\neg z_{j_1} \vee \ell_{j_3} \vee z_{j_2}) \wedge (\neg z_{j_2} \vee \ell_{j_4} \vee z_{j_3}) \wedge \ldots$$
    $$\wedge (\neg z_{j_{k-4}} \vee \ell_{j_{k-2}} \vee z_{j_{k-3}}) \wedge (\neg z_{j_{k-3}} \vee \ell_{j_{k-1}} \vee \ell_{j_k})$$
  - c_j ικανοποιήσιμος ανν c'_j ικανοποιήσιμος.

    Αν ℓ_p πρώτο αληθές literal c_j, θέτουμε $z_{j_i} = \begin{cases} 1 & \text{αν } i < p-1 \\ 0 & \text{αν } i \geq p-1 \end{cases}$
  - Άρα φ_ψ ικανοποιήσιμη ανν ψ ικανοποιήσιμη.
  - Και βέβαια, κατασκευή φ_ψ σε πολυωνυμικό χρόνο.

3-SAT(3) είναι NP-Πλήρες

- 3-SAT(3): στην φ κάθε μεταβλητή εμφανίζεται ≤ 3 φορές:
  - Είτε ≤ 1 χωρίς άρνηση και ≤ 2 με άρνηση,
    είτε ≤ 2 χωρίς άρνηση και ≤ 1 με άρνηση.
- Θδο 3-SAT $\leq_P$ 3-SAT(3).
  - Έστω πρόταση $\psi = c_1 \wedge \ldots \wedge c_m$ σε 3-CNF.
  - ∀ μεταβλητή x που εμφανίζεται k > 3 φορές, αντικαθιστούμε κάθε εμφάνιση x με διαφορετική μεταβλητή $x_1, x_2, \ldots, x_k$.
  - Προσθέτουμε όρους που ικανοποιούνται ανν οι $x_1, x_2, \ldots, x_k$ έχουν ίδια τιμή αλήθειας (εμφανίσεις ίδιας μετ/τής x):

    $$(\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee x_3) \wedge \cdots \wedge (\neg x_{k-1} \vee x_k) \wedge (\neg x_k \vee x_1)$$
  - Έτσι κατασκευάζουμε 3-SAT(3) στιγμιότυπο ψ':
    - ψ' ικανοποιήσιμη ανν ψ ικανοποιήσιμη.

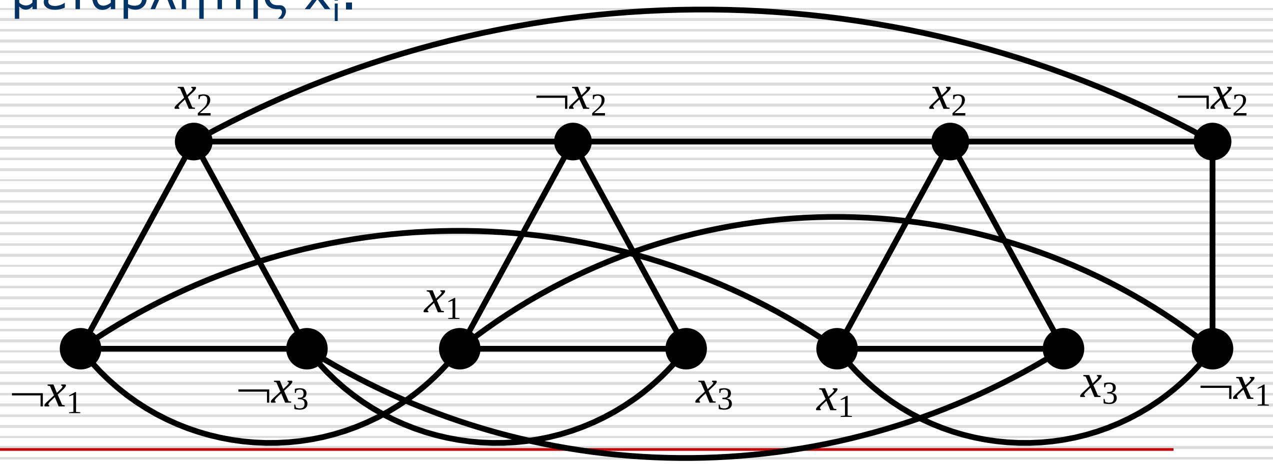
MAX 2-SAT είναι NP-Πλήρες

- MAX 2-SAT: (μη ικανοποιήσιμη) φ σε 2-CNF και $K <$ #όρων.
  Υπάρχει ανάθεση τιμών αλήθειας που ικανοποιεί $\geq K$ όρους;
- MAX 2-SAT $\in$ **NP**. Θδο 3-SAT $\leq_P$ MAX 2-SAT.
  - Έστω $c_i = x \vee y \vee z$, w_i μετ/τή,
    και ομάδα C'_i 10 2-CNF όρων:
    $$(x), (y), (z), (w_i)$$
    $$(\neg x \vee \neg y), (\neg y \vee \neg z), (\neg z \vee \neg x)$$
    $$(x \vee \neg w_i), (y \vee \neg w_i), (z \vee \neg w_i)$$
  - Ανάθεση ικανοποιεί c_i: επιλέγουμε w_i, ικανοποιούνται 7 όροι C'_i.
  - Ανάθεση δεν ικανοποιεί c_i: ικανοποιούνται μόνο 6 όροι C'_i.
  - Έτσι από $\psi = c_1 \wedge \ldots \wedge c_m$ σε 3-CNF, κατασκευάζουμε
    $\varphi_\psi = C'_1 \wedge \ldots \wedge C'_m$ σε 2-CNF σε πολυωνυμικό χρόνο.
  - ψ ικανοποιήσιμη ανν υπάρχει ανάθεση τιμών αλήθειας
    που ικανοποιεί $\geq 7m$ όρους της φ_ψ .

MIS είναι NP-πλήρες

- Max Independent Set (MIS): Γράφημα G(V, E) και $k < |V|$. Έχει G ανεξάρτητο σύνολο με $\geq k$ κορυφές;
- MIS $\in$ **NP**. Θδο 3-SAT $\leq_P$ MIS.
  - Έστω $\psi = c_1 \wedge \ldots \wedge c_m$ σε 3-CNF. Κατασκευάζουμε G_ψ .
  - Ένα «τρίγωνο» t_j για κάθε όρο $c_j = \ell_{j_1} \vee \ell_{j_2} \vee \ell_{j_3}$
  - Μια ακμή $(x_i, \neg x_i)$ για κάθε ζευγάρι συμπληρωματικών εμφανίσεων μεταβλητής x_i.

$$\psi = (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2)$$



MIS είναι NP-πλήρες

- 3-SAT $\le_P$ MIS (συνέχεια).
  - Έστω $\psi = c_1 \wedge \ldots \wedge c_m$ σε 3-CNF. Κατασκευάζουμε G_ψ .
  - Ένα «τρίγωνο» t_j για κάθε όρο $c_j = \ell_{j_1} \vee \ell_{j_2} \vee \ell_{j_3}$
  - Μια ακμή $(x_i, \neg x_i)$ για κάθε ζευγάρι συμπληρωματικών εμφανίσεων μεταβλητής x_i.
  - Αν ψ ικανοποιήσιμη, από κάθε «τρίγωνο» t_j επιλέγουμε μια κορυφή που αντιστοιχεί σε (κάποιο) αληθές literal όρου c_j .
  - Όχι συμπληρωματικά literals $\Rightarrow$ ανεξάρτητο σύν. m κορυφών.
  - Αν G_ψ έχει ανεξάρτητο σύν. m κορυφών, αυτό έχει μια κορυφή από κάθε «τρίγωνο» t_j και όχι «συμπληρωματικές» κορυφές.
  - Θέτουμε αντίστοιχα literals αληθή: ψ ικανοποιήσιμη.
  - ψ ικανοποιήσιμη ανν G_ψ έχει ανεξάρτητο συν. $\geq$ m κορυφών.

MIS(4) είναι NP-πλήρες

- Πρόταση ψ στιγμιότυπο 3-SAT(3):
  - Κάθε μετ/τή εμφανίζεται ≤ 3 φορές.
  - Είτε ≤ 1 χωρίς άρνηση και ≤ 2 με άρνηση, είτε ≤ 2 χωρίς άρνηση και ≤ 1 με άρνηση.
- Στο γράφημα G_ψ, μέγιστος βαθμός κορυφής = 4.
- MIS παραμένει **NP**-πλήρες για γραφήματα με μέγιστο βαθμό 4!

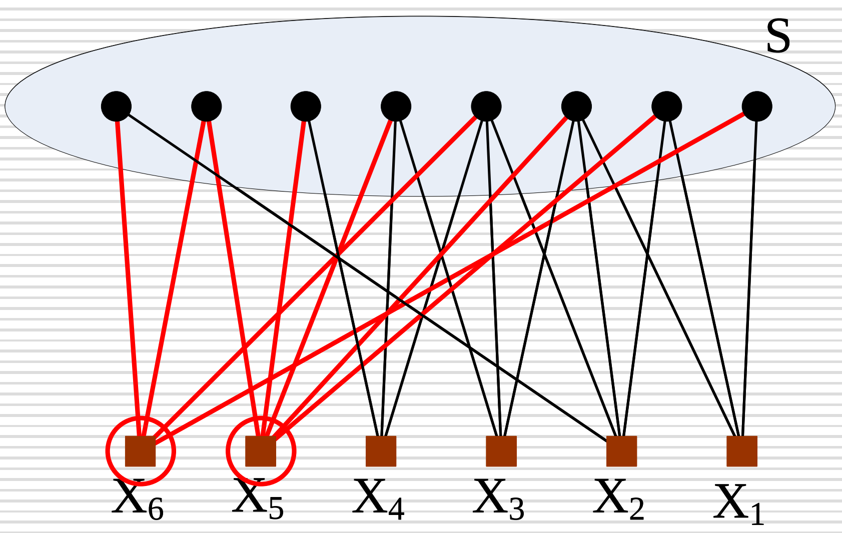
Vertex Cover, Independent Set, και Clique

- Min Vertex Cover $\equiv_P$ Max Independent Set $\equiv_P$ Max Clique.
  - Vertex cover C σε γράφημα G(V, E) ανν
    independent set V \ C σε γράφημα G ανν
    clique V \ C σε συμπληρωματικό γράφημα $\overline{G}$.
- Έστω μη κατευθυνόμενο γράφημα G(V, E), |V| = *n*.
  Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:
  - Το G έχει vertex cover ≤ *k*.
  - Το G έχει independent set ≥ *n* – *k*.
  - Το συμπληρωματικό $\overline{G}$ έχει clique ≥ *n* – *k*.
- Min Vertex Cover αποτελεί (απλή) ειδική περίπτωση Ακέραιου Γραμμικού Προγρ. (ILP):

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{v\in V} x_v & \\ \text{s.t.} & x_v + x_u \geq 1 & \forall e = \{v,u\} \in E \\ & x_v \in \{0,1\} & \forall v \in V \end{array}$$

Set Cover

- Κάλυμμα Συνόλου (Set Cover):
  - Σύνολο S, υποσύνολα $X_1, \ldots, X_m$ του S, φυσικός k, $1 < k < m$.
  - Υπάρχουν $\leq k$ υποσύνολα που η ένωσή τους είναι το S.
    - «Κάλυψη» του S με $\leq k$ υποσύνολα (από συγκεκριμένα).
- Παράδειγμα:
  - $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
  - $X_1 = \{1, 2, 3\}$
$X_2 = \{2, 3, 4, 8\}$
$X_3 = \{3, 4, 5\}$
$X_4 = \{4, 5, 6\}$
$X_5 = \{2, 3, 5, 6, 7\}$
$X_6 = \{1, 4, 7, 8\}$
  - Βέλτιστη λύση: X_5, X_6



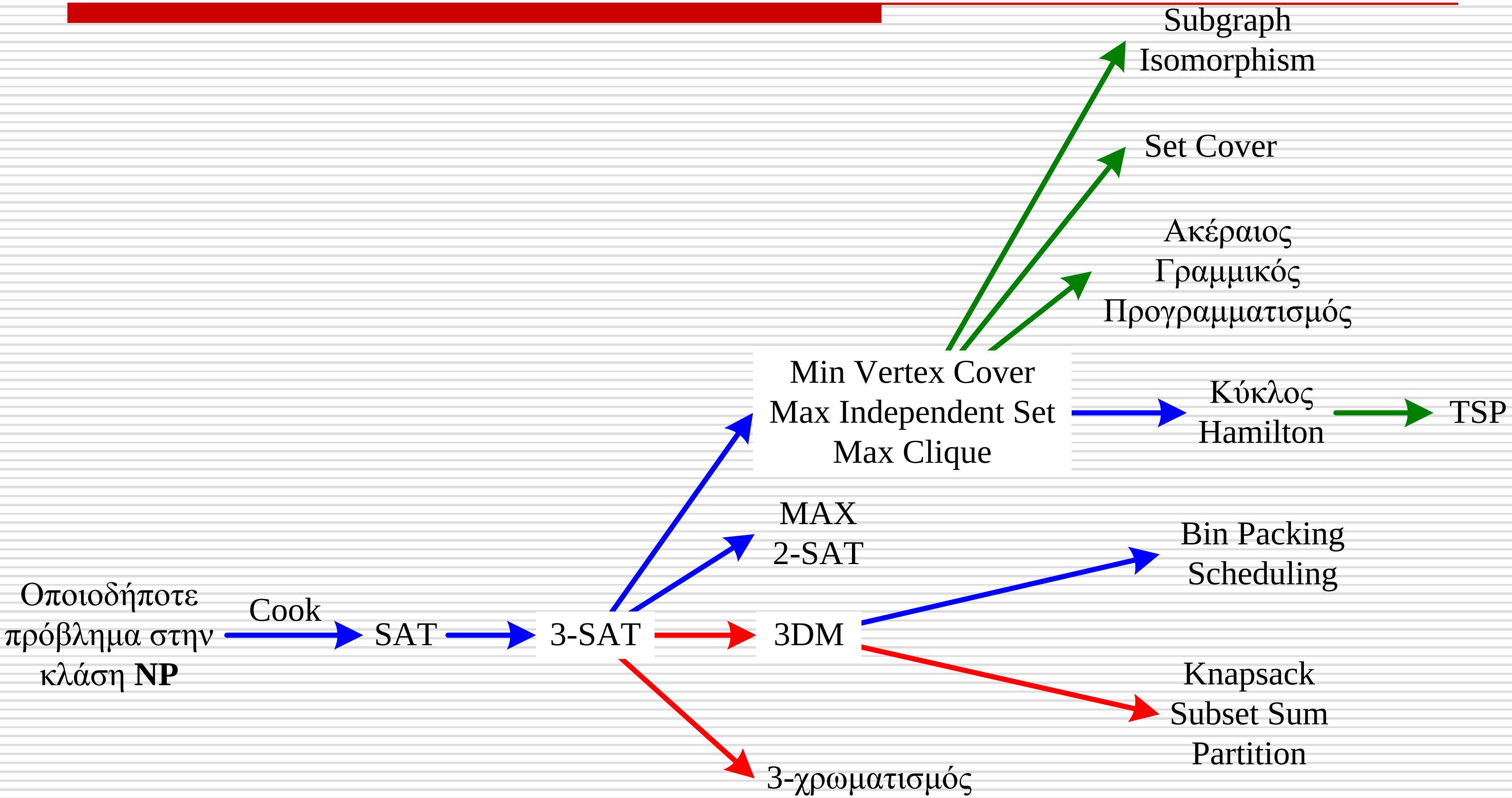
Set Cover

- Κάλυμμα Συνόλου (Set Cover):
  - Σύνολο S, υποσύνολα $X_1, \ldots, X_m$ του S, φυσικός k, $1 < k < m$.
  - Υπάρχουν $\leq k$ υποσύνολα που η ένωσή τους είναι το S.
    - «Κάλυψη» του S με $\leq k$ υποσύνολα (από συγκεκριμένα).
- Set Cover αποτελεί γενίκευση του Vertex Cover:
  - Vertex Cover προκύπτει όταν κάθε στοιχείο $e \in S$ ανήκει σε (ακριβώς) δύο υποσύνολα X_i και X_j.
    - S: ακμές γραφήματος με m κορυφές / υποσύνολα.
    - Ακμή $e \in S$ συνδέει κορυφές / υποσύνολα X_i και X_j.

Subgraph Isomorphism

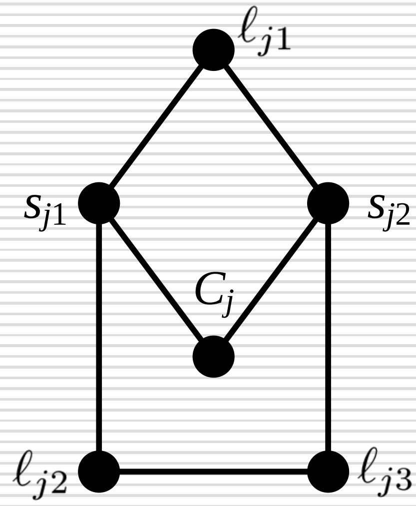
- Subgraph Isomorphism:
  - Γραφήματα $G_1(V_1, E_1)$ και $G_2(V_2, E_2)$, $|V_1| > |V_2|$.
  - Υπάρχει υπογράφημα του G_1 ισομορφικό με το G_2;
    - Δηλ. είναι το G_2 υπογράφημα του G_1;
- Subgraph Isomorphism αποτελεί γενίκευση MIS (Clique):
  - MIS προκύπτει για G_2 ανεξάρτητο σύνολο k κορυφών.
  - Clique προκύπτει για G_2 πλήρες γράφημα k κορυφών.

Ακολουθία Αναγωγών



3-COL είναι NP-πλήρες

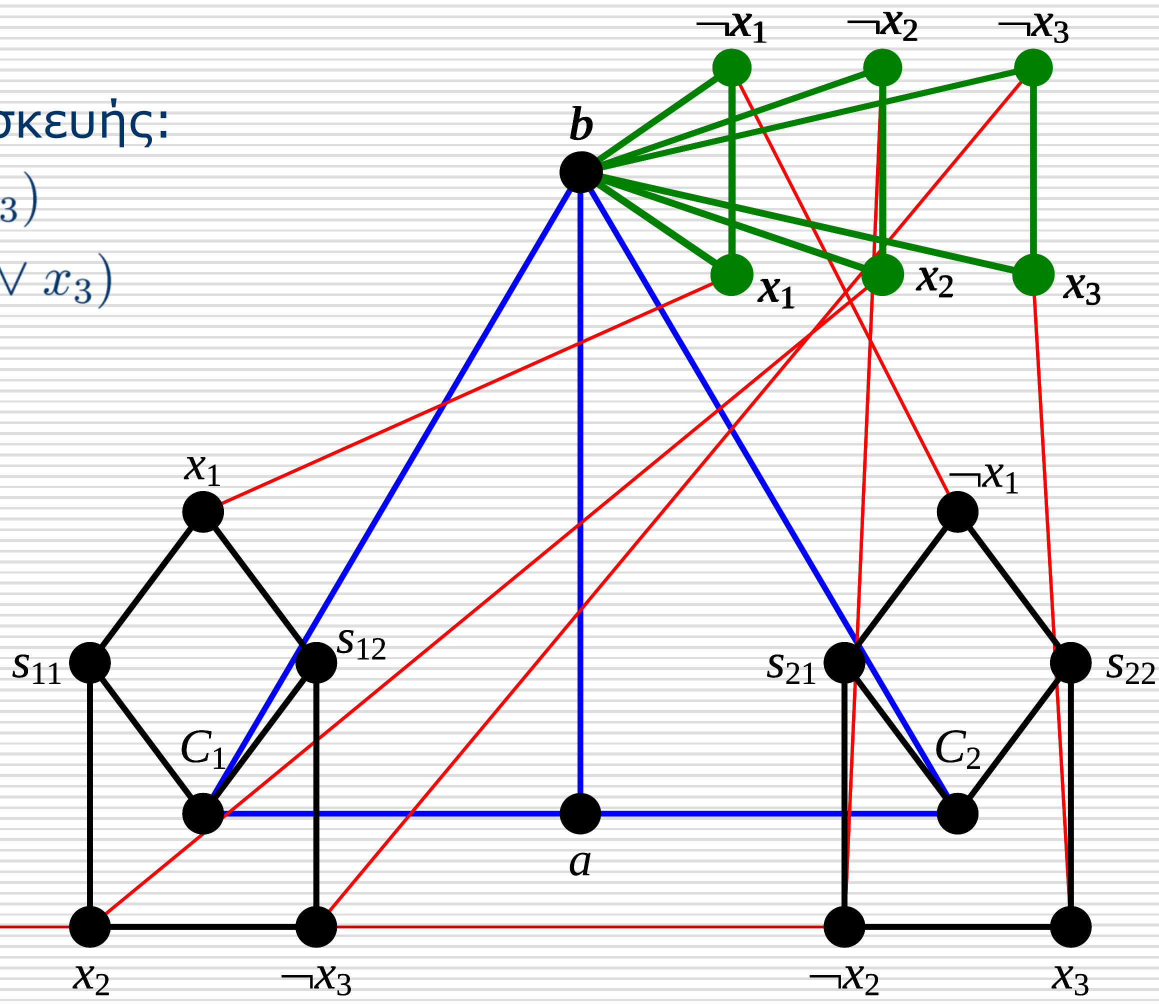
- 3-χρωματισμός (3-COL): Γράφημα G(V, E). $\chi(G) = 3$;
- 3-COL $\in$ **NP**. Θδο 3-SAT $\leq_P$ 3-COL.
  - Έστω $\psi = c_1 \wedge \ldots \wedge c_m$ σε 3-CNF. Κατασκευάζουμε G_ψ .
  - Κορυφή b και ένα «τρίγωνο» [b, x_i, $\neg x_i$] για κάθε μετ/τή x_i .
  - Ένα gadget g_j για κάθε όρο $c_j = \ell_{j_1} \vee \ell_{j_2} \vee \ell_{j_3}$
  - Ακμή μεταξύ κάθε literal g_j και της αντίστοιχης κορυφής σε b-τρίγωνο.
  - Κορυφή a και «τρίγωνο» [b, a, C_j] με κάθε g_j.



3-COL είναι NP-πλήρες

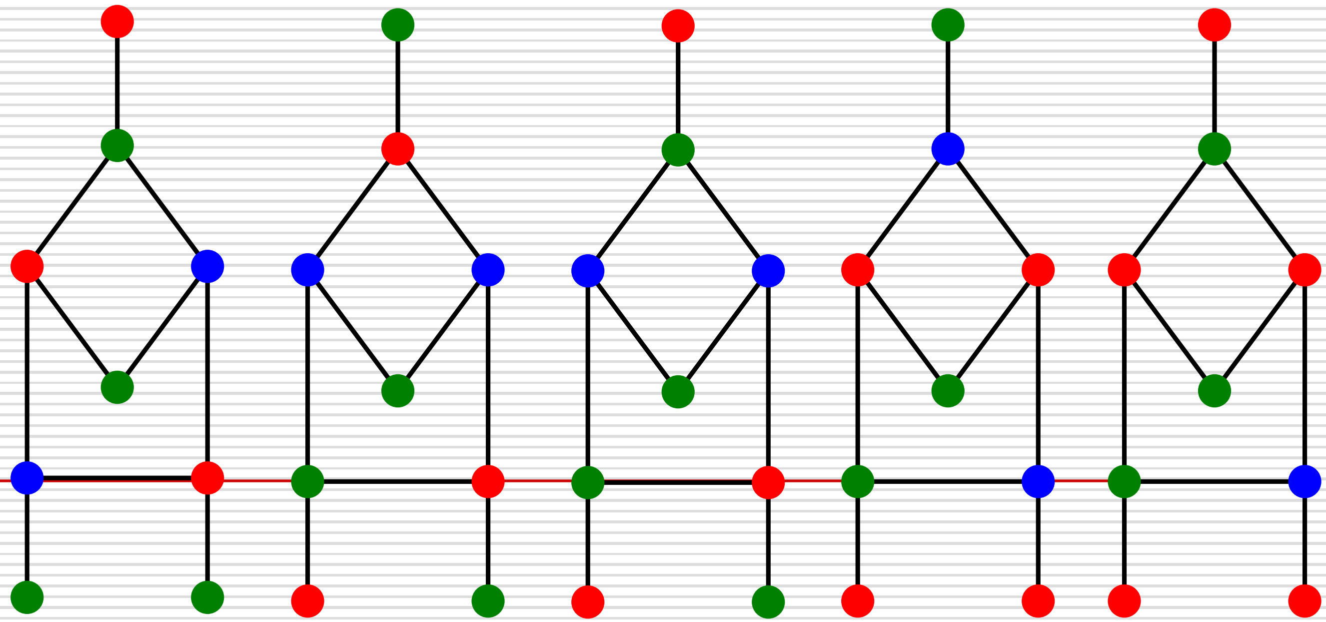
- 3-SAT $\leq_P$ 3-COL.
  - Παράδειγμα κατασκευής:

    $$\psi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)$$



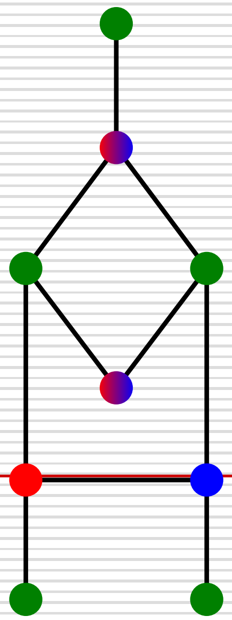
3-COL είναι NP-πλήρες

- Θδο ψ ικανοποιήσιμη ανν $\chi(G_\psi) = 3$.
  - Χβτγ, υποθέτουμε ότι χρ(b) = **2**, χρ(a) = **1**.
    Έτσι $\chi(G_\psi) = 3$ ανν $\chi\rho(C_j) =$ **0** για κάθε gadget g_j (όρο c_j).
  - Αν ψ ικανοποιήσιμη, $\chi\rho(x_i) =$ **1** και $\chi\rho(\neg x_i) =$ **0** αν x_i αληθής,
    και $\chi\rho(x_i) =$ **0** και $\chi\rho(\neg x_i) =$ **1** αν x_i ψευδής (βλ. b-τρίγωνα).
  - Αν όρος c_j ικανοποιείται: χρωματίζουμε g_j ώστε $\chi\rho(C_j) =$ **0**.



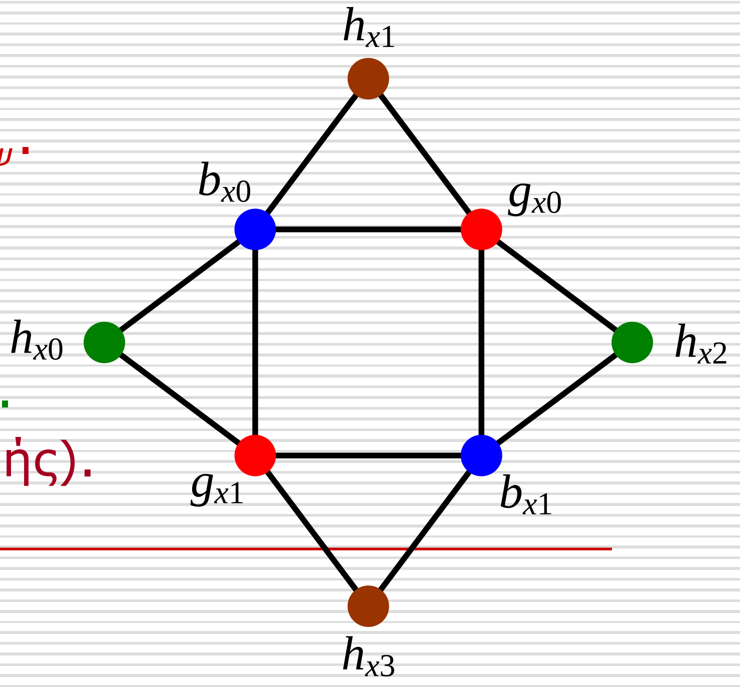
3-COL είναι NP-πλήρες

- Θδο ψ ικανοποιήσιμη ανν $\chi(G_\psi) = 3$.
  - Χβτγ, υποθέτουμε ότι χρ(b) = **2**, χρ(a) = **1**.
    Έτσι $\chi(G_\psi) = 3$ ανν $\chi\rho(C_j) =$ **0** για κάθε gadget g_j (όρο c_j).
  - Αν $\chi\rho(C_j) =$ **0** για κάθε gadget g_j πρέπει τουλ. μία από 3 «εισόδους» g_j έχει χρώμα **1** (αντιστοιχεί σε αληθές literal).
  - Θέτουμε x_i αληθές αν $\chi\rho(x_i) =$ **1** και $\chi\rho(\neg x_i) =$ **0** και x_i ψευδές αν $\chi\rho(x_i) =$ **0** και $\chi\rho(\neg x_i) =$ **1**.
  - Έτσι ψ ικανοποιείται, αφού υπάρχει τουλ. ένα αληθές literal σε κάθε όρο c_j .



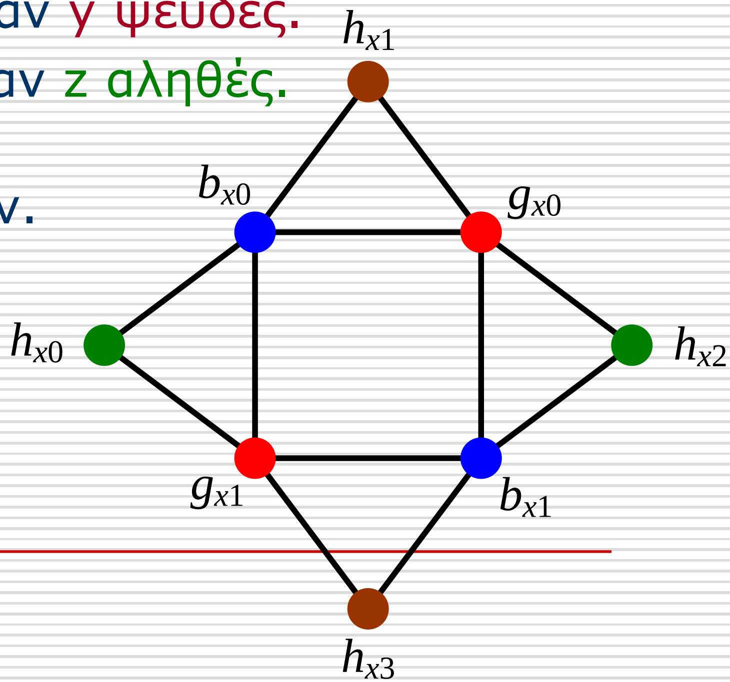
3DM είναι NP-πλήρες

- Τρισδιάστατο Ταίριασμα (3-Dimensional Matching, **3DM**).
  - Ξένα μεταξύ τους σύνολα B, G, H, |B| = |G| = |H| = n, και σύνολο τριάδων $M \subseteq B \times G \times H$.
  - Υπάρχει $M' \subseteq M$, $|M'| = n$, όπου κάθε στοιχείο των B, G, H εμφανίζεται μία φορά (δηλ. M′ καλύπτει όλα τα στοιχεία).
- 3DM $\in$ **NP**. Θδο 3-SAT(3) $\leq_P$ 3DM.
  - Έστω $\psi = c_1 \wedge \ldots \wedge c_m$ σε 3-CNF(3). Κατασκευάζουμε B_ψ, G_ψ, H_ψ, και M_ψ.
  - Για κάθε μετ/τή x, 2 «αγόρια», 2 «κορίτσια», 4 «σπίτια», και 4 τριάδες.
  - Τριάδες με h_{x0}, h_{x2} για x (x αληθής).
  - Τριάδες με (h_{x1}, h_{x3}) για $\neg$x (x ψευδής).



3DM είναι NP-πλήρες

- 3-SAT(3) $\leq_P$ 3DM.
  - $\psi = c_1 \wedge \ldots \wedge c_m$ σε 3-CNF(3). Κατασκ. B_ψ, G_ψ, H_ψ, και M_ψ.
  - Για κάθε όρο, π.χ. $c = x \vee \neg y \vee z$, «ζευγάρι» όρου c («αγόρι» b_c και «κορίτσι» g_c), και 3 τριάδες:
    - (b_c, g_c, h_{x1}) (ή με h_{x3}): επιλογή αν x αληθές.
    - (b_c, g_c, h_{y0}) (ή με h_{y2}): επιλογή αν y ψευδές.
    - (b_c, g_c, h_{z1}) (ή με h_{z3}): επιλογή αν z αληθές.
  - Περιορισμός στον #εμφανίσεων: «σπίτια» επαρκούν για τριάδες όρων.
  - 4n «σπίτια» και 2n+m «ζευγάρια».
    - 2n – m «αζήτητα σπίτια»!
  - 2n – m «εύκολα ζευγάρια» που συνδέονται με όλα τα «σπίτια».

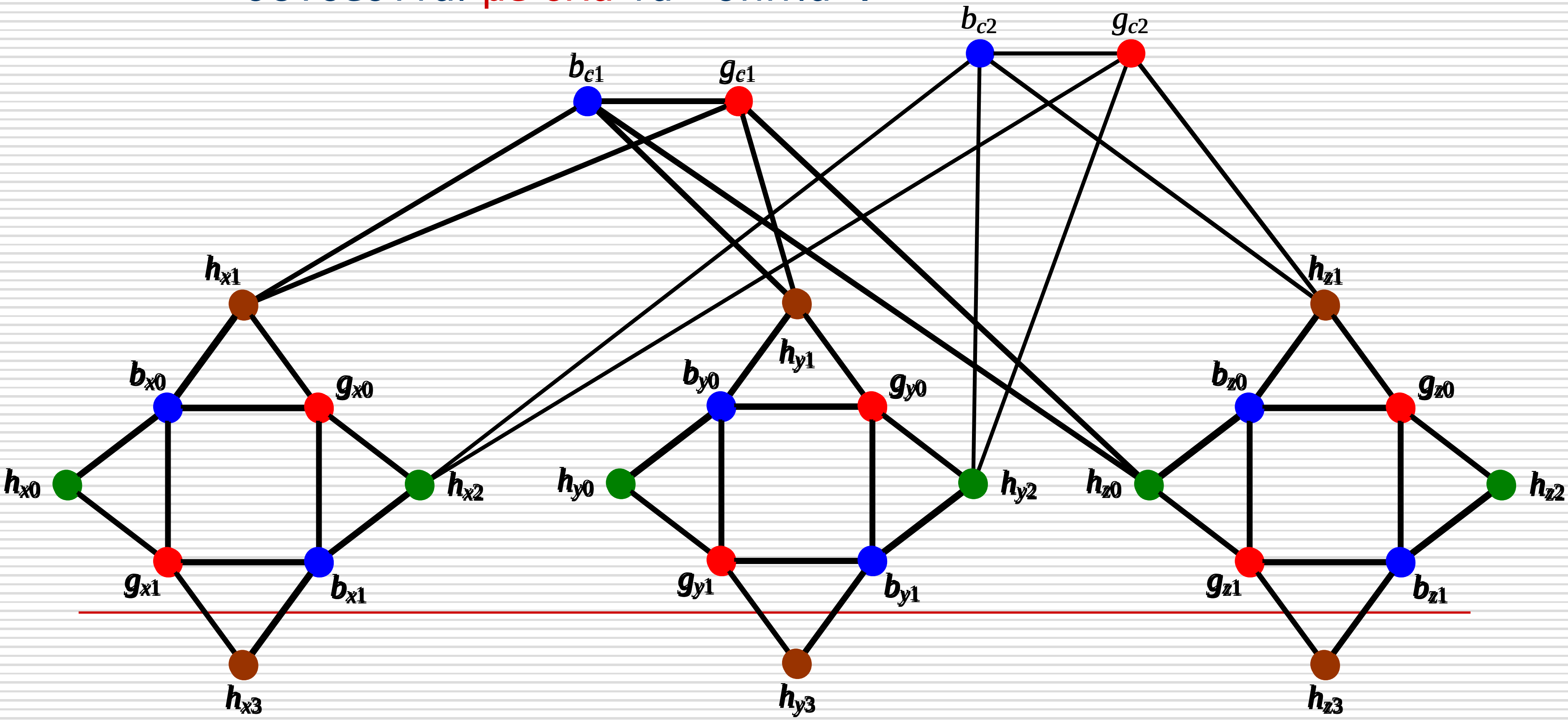


3DM είναι NP-πλήρες

- 3-SAT(3) $\leq_P$ 3DM.
  - Ακόμη 4 «εύκολα ζευγάρια» που συνδέονται με όλα τα «σπίτια».

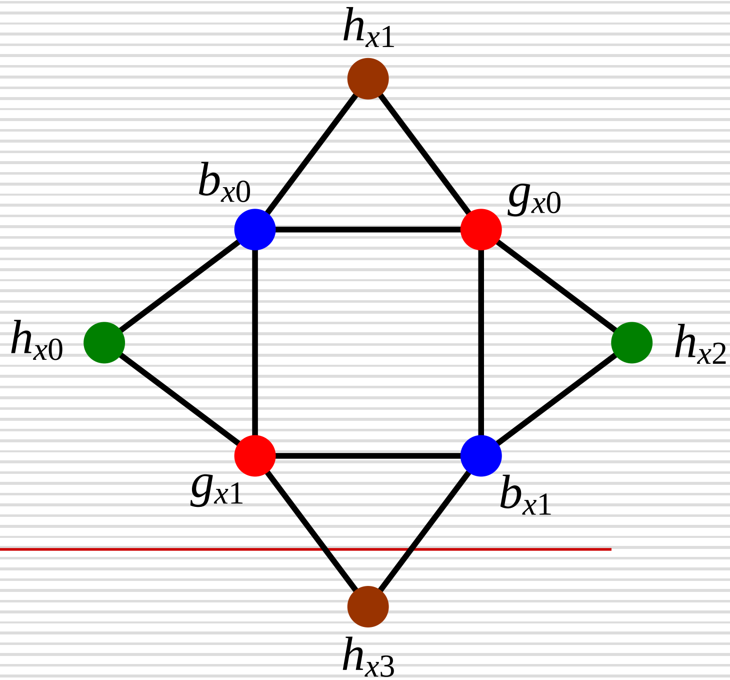
$$\psi = (x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z)$$

$$x = F \quad y = T \quad z = T$$



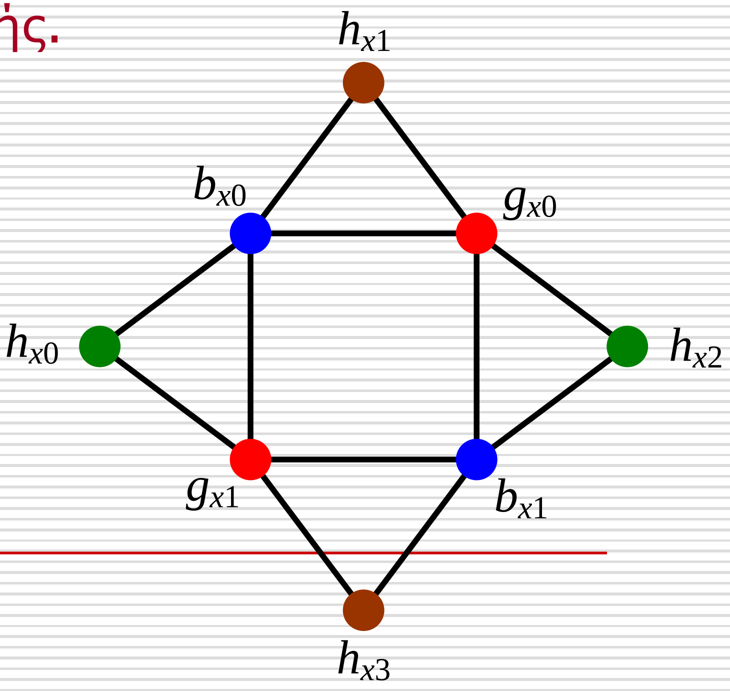
3DM είναι NP-πλήρες

- Θδο ψ ικανοποιήσιμη ανν υπάρχει 3DM $M' \subseteq M_{\psi}$, $|M'| = 4n$.
- Αν ψ ικανοποιήσιμη:
  - $\forall$ αληθή μετ/τή x, επιλέγουμε 2 x-τριάδες.
  - $\forall$ ψευδή μετ/τή x, επιλέγουμε 2 $\neg$x-τριάδες (2n).
  - Τουλ. ένα αληθές literal σε κάθε όρο της ψ: τουλ. ένα «ελεύθερο σπίτι» για «ζευγάρι» κάθε όρου (m).
  - «Αζήτητα σπίτια» καλύπτονται από 2n – m «εύκολα ζευγάρια».



3DM είναι NP-πλήρες

- Θδο ψ ικανοποιήσιμη ανν υπάρχει 3DM $M' \subseteq M_\psi$, $|M'| = 4n$.
- Αν υπάρχει 3DM $M' \subseteq M_\psi$, $|M'| = 4n$:
  - Εστιάζουμε σε 2n+m «δύσκολα ζευγάρια».
  - Επιλέγονται 2n «ζευγάρια» μεταβλητών:
    - $\forall$ μετ/τη x, είτε 2 x-τριάδες, οπότε x αληθής, είτε 2 $\neg$x-τριάδες, οπότε x ψευδής.
  - Επιλέγονται m «ζευγάρια» όρων:
    - «Ελεύθερο σπίτι» για κάθε όρο.
    - Ανάθεση τιμών αλήθειας δημιουργεί τουλάχιστον ένα αληθές literal σε κάθε όρο.
- Bipartite Matching (2DM) $\in$ **P**.



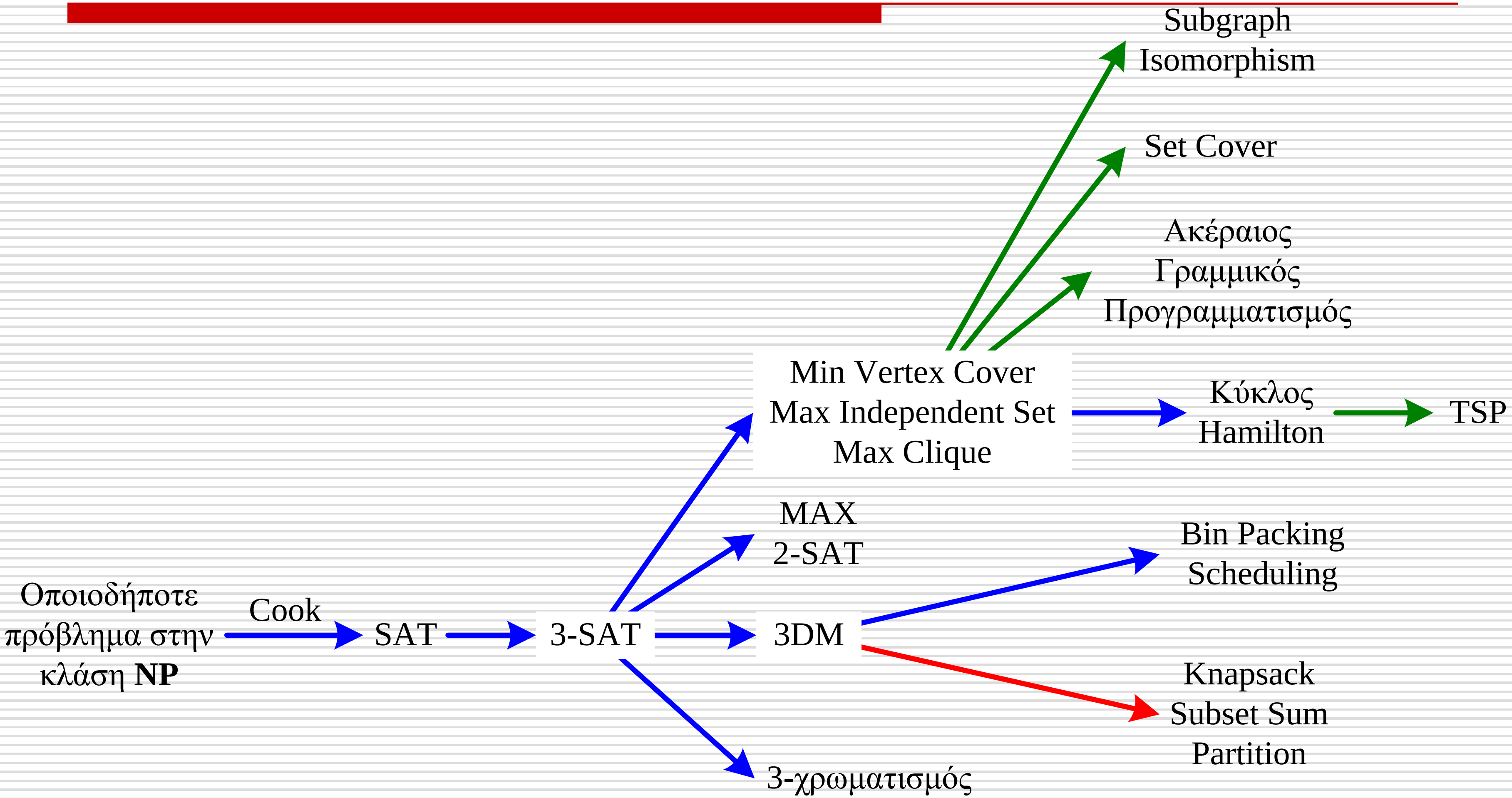
Subset Sum και Knapsack

- Subset Sum:
  - Σύνολο φυσικών $A = \{w_1, \ldots, w_n\}$ και W, $0 < W < w(A)$.
  - Υπάρχει $A' \subseteq A$ με $w(A') = \sum_{i \in A'} w_i = W$;
- Knapsack αποτελεί γενίκευση Subset Sum.
  - Subset sum προκύπτει όταν για κάθε αντικείμενο i, μέγεθος(i) = αξία(i) (θεωρούμε μέγεθος σακιδίου = W).

Subset Sum και Partition

- Partition:
  - Σύνολο φυσικών $A = \{w_1, \ldots, w_n\}$ με άρτιο $w(A) = \sum_{i \in A'} w_i$;
  - Υπάρχει $A' \subseteq A$ με $w(A') = w(A \setminus A')$;
- Subset Sum $\leq_P$ Partition.
  - Έστω σύνολο $A = \{w_1, \ldots, w_n\}$ και W, $0 < W < w(A)$.
  - Χβτγ, θεωρούμε ότι $W \geq w(A)/2$.
  - Σύνολο $B = \{w_1, \ldots, w_n, 2W - w(A)\}$ με $w(B) = 2W$.
  - Υπάρχει $A' \subseteq A$ με $w(A') = W$ ανν
    υπάρχει $B' \subseteq B$ με $w(B') = w(B \setminus B') = W$.
    - Ένα από τα B', $B \setminus B'$ είναι υποσύνολο του A.
- Όμως το Subset Sum αποτελεί γενίκευση Partition.
  - Τελικά Subset Sum $\equiv_P$ Partition.

Ακολουθία Αναγωγών



Subset Sum είναι NP-Πλήρες

- Subset Sum $\in$ **NP**. Θδο 3DM $\leq_P$ Subset Sum.
  - Έστω $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$, $H = \{h_1, \ldots, h_n\}$, και $M \subseteq B \times G \times H$, $|M| = m$.
  - Τριάδα $t_i \in M$ $\rightarrow$ δυαδική συμβ/ρά b_i μήκους 3n με 3 «άσσους».
    - 1ος «άσσος» σε θέση 1 ως n δηλώνει το «αγόρι».
    - 2ος «άσσος» σε θέση n+1 ως 2n δηλώνει το «κορίτσι».
    - 3ος «άσσος» σε θέση 2n+1 ως 3n δηλώνει το «σπίτι».
    - Π.χ. n = 4. (b_2, g_3, h_1): 0001 0100 0010
  - Υπάρχει 3DM $M' \subseteq M$, $|M'| = n$, ανν υπάρχει $B' = \{b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}\}$ που οι «άσσοι» των $b_{i_\ell} \in B'$ καλύπτουν όλες τις 3n θέσεις.

Subset Sum είναι NP-Πλήρες

- 3DM $\leq_P$ Subset Sum.
  - Υπάρχει 3DM M′ $\subseteq$ M, |M′| = n, ανν υπάρχει $B' = \{b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}\}$ που οι «άσσοι» των $b_{i_\ell} \in B'$ καλύπτουν όλες τις 3n θέσεις.
  - ... ανν σύνολο A = {w_1, ..., w_m} με $w_i = \sum_{j=1}^{3n} b_i(j) 2^{j-1}$ έχει υποσύνολο A′ $\subseteq$ A με w(A) = 2^{3n} – 1 (;).
    - **Μπορεί και όχι**(!): π.χ. A = { 0011, 0101, 0111 }
    - «Επιπλοκή» λόγω κρατούμενου δυαδικής πρόσθεσης.
    - Λύση: ερμηνεύουμε αριθμούς σε βάση m+1 ώστε πρόσθεση m «άσσων» να μην εμφανίζει κρατούμενο.
  - ... ανν σύνολο A = {w_1, ..., w_m} με $w_i = \sum_{j=1}^{3n} b_i(j)(m+1)^{j-1}$ έχει υποσύνολο A′ $\subseteq$ A με w(A) = ((m+1)^{3n} – 1)/m.

Ακολουθία Αναγωγών