

Ροή Ελάχιστου Κόστους

Διδάσκοντες: **Αρ. Παγουρτζής, Δ. Φωτάκης,
Δ. Σούλιου, Παν. Γροντάς**

Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

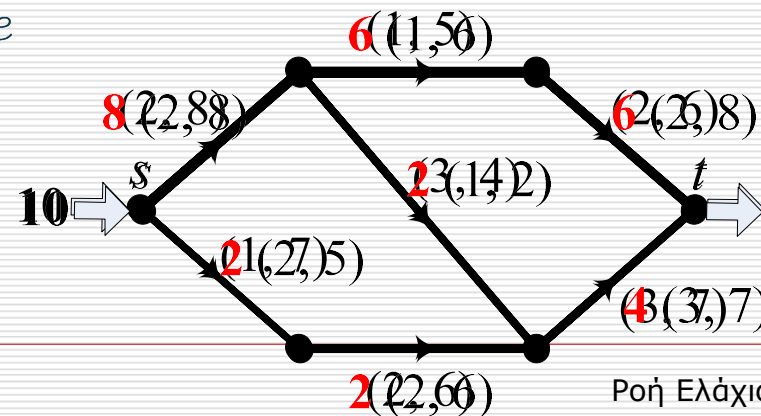
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



Ροή Ελάχιστου Κόστους

- **Δίκτυο** : κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$.
 - Πηγή s , προορισμός t , απαίτηση d .
 - Κόστος c_e και χωρητικότητα b_e ακμής.
- $s - t$ ροή μεγέθους d με **ελάχιστο κόστος**.
 - Χωρητικότητα: $\forall e \in E \ f_e \leq b_e$
 - Διατήρηση: $\forall v \in V \setminus \{s, t\} \ \sum_{e \in \text{in}(v)} f_e = \sum_{e \in \text{out}(v)} f_e$
 - Μέγεθος: $\sum_{e \in \text{out}(s)} f_e - \sum_{e \in \text{in}(s)} f_e = d$
 - Κόστος: $\sum_{e \in E} c_e f_e$



Ροή Ελάχιστου Κόστους

□ Ροή Ελάχιστου Κόστους (Min-Cost-Flow):

- Δεδομένου δικτύου $G(V, E, s, t, d, b, c)$
- Υπολόγισε $s - t$ ροή με μέγεθος d και ελάχιστο κόστος.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{e \in E} c_e f_e \\ \text{s.t.} \quad & f_e \leq b_e && \forall e \in E \\ & \sum_{e \in \text{out}(v)} f_e - \sum_{e \in \text{in}(v)} f_e = 0 && \forall v \in V \setminus \{s, t\} \\ & \sum_{e \in \text{out}(s)} f_e - \sum_{e \in \text{in}(s)} f_e = d \\ & \sum_{e \in \text{out}(t)} f_e - \sum_{e \in \text{in}(t)} f_e = -d \\ & f_e \geq 0 && \forall e \in E \end{aligned}$$

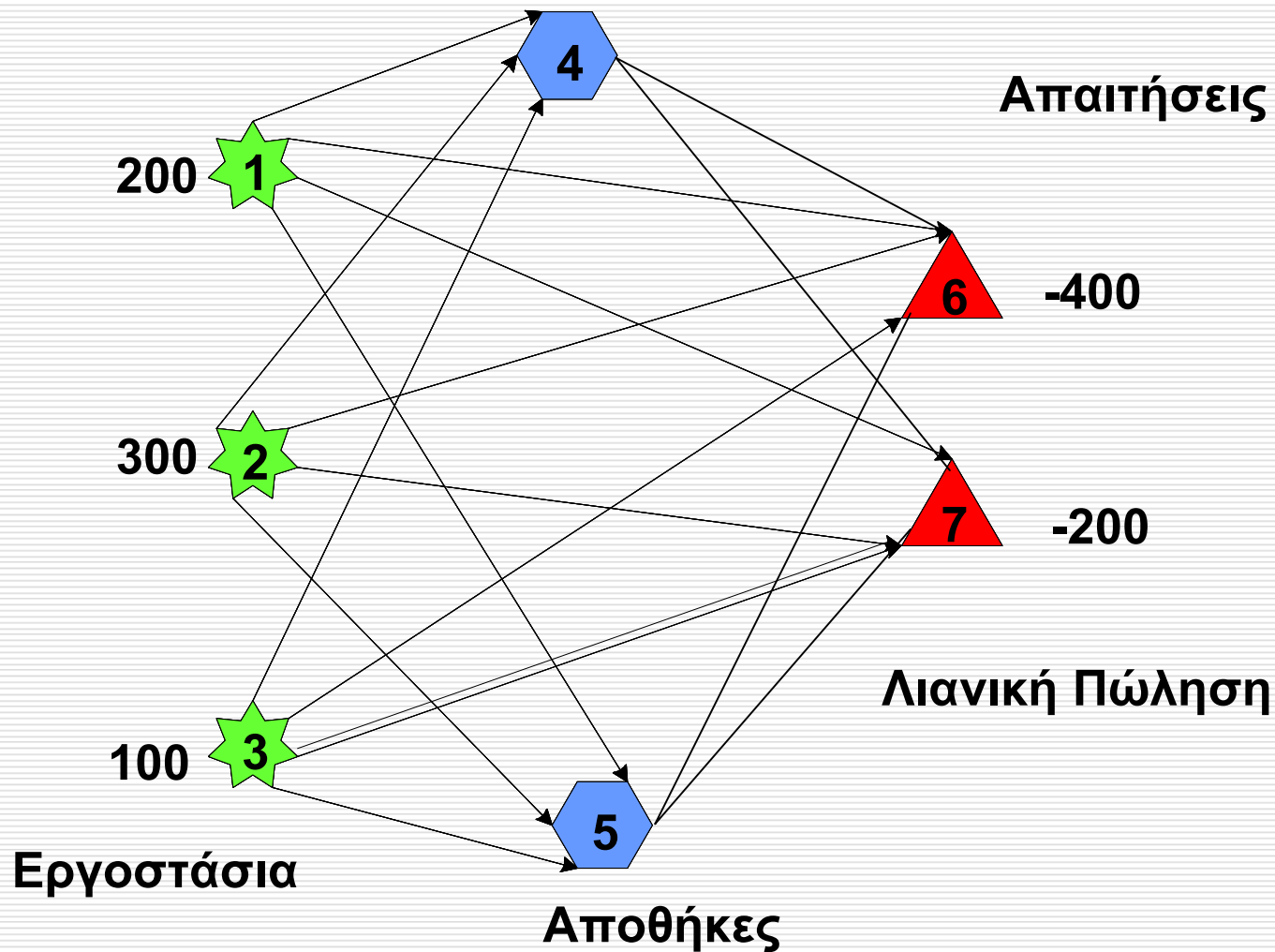
Ροή Ελάχιστου Κόστους: Γενικεύσεις

- Κάθε κορυφή v έχει **απαίτηση ροής** $d(v)$, με άθροισμα απαιτήσεων $= 0$.
 - $d(v) > 0$: v στέλνει ροή προς άλλες κορυφές (source).
 - $d(v) < 0$: v δέχεται ροή από άλλες κορυφές (sink).
 - $d(v) = 0$: διατήρηση ροής στη v (intermediate).
 - Υλοποίηση με **νέο source** s που **στέλνει ροή** $d(s_i)$ προς κάθε άλλο source s_i , και **νέο sink** t που **δέχεται ροή** $d(t_i)$ από άλλο sink t_i .
- $d(v) = 0$ για όλες τις κορυφές v : **κυκλοφορία** (circulation).
- **Κάτω φράγμα** $l(e) \geq 0$ στη ροή ακμής e .

Ροή Ελάχιστου Κόστους: Εφαρμογές

- Συντομότερα μονοπάτια από αρχική κορυφή s .
- Μέγιστη ροή.
- Προβλήματα ανάθεσης (assignment).
- Προβλήματα μεταφοράς και διανομής.
- Προβλήματα φόρτωσης και εξισορρόπησης.
- Υπολογισμός Wasserstein απόστασης.
- Πολλά πρακτικά προβλήματα μετασχηματίζονται σε στιγμιότυπα min-cost flow.

Ροή Ελάχιστου Κόστους: Εφαρμογές

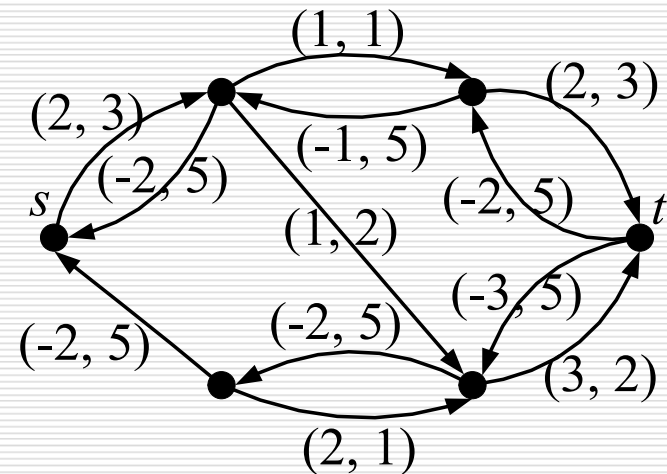
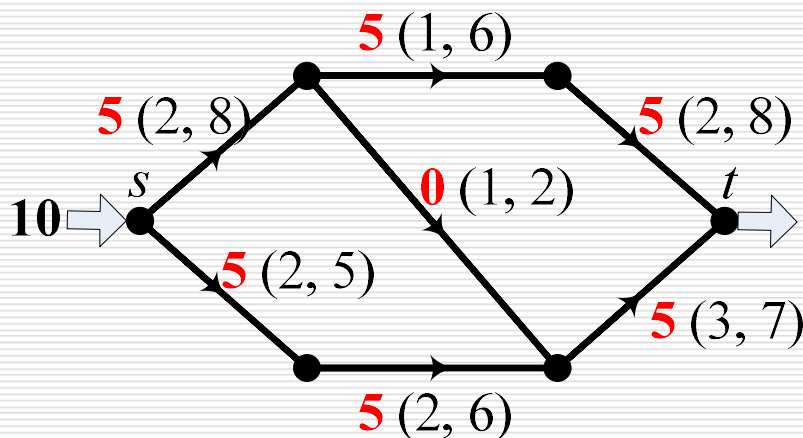


Αποσύνθεση Ροών και Κυκλοφοριών

- Δεδομένου δικτύου $G(V, E, s, t, b)$:
 - Για $s - t$ μονοπάτι p , **στοιχειώδης ροή** στο p είναι **μοναδιαία $s - t$ ροή** κατά μήκος ακμών του p .
 - Για κύκλο C , **στοιχειώδης ροής** στον C είναι **μοναδιαία ροή** κατά μήκος ακμών του C .
- Ροή f είναι **(θετικός) γραμμικός συνδυασμός** στοιχειωδών ροών $s - t$ μονοπατιών και κύκλων (με $\leq m$ όρους).
 - Κάθε ακμή e με $f_e > 0$ εμφανίζεται σε ≥ 1 μονοπάτι ή κύκλο.
 - **Αν f ακυκλική**, τότε γραμμικός συνδυασμός μόνο μονοπατιών.
- **Κυκλοφορία f** είναι **(θετικός) γραμμικός συνδυασμός** στοιχειωδών ροών **κύκλων** (με $\leq m$ όρους).

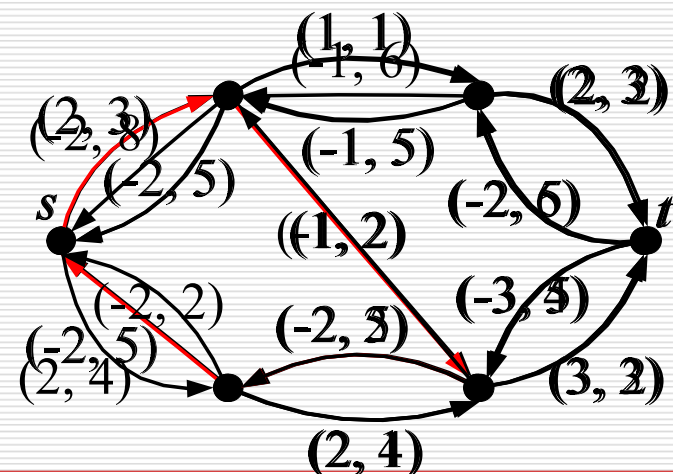
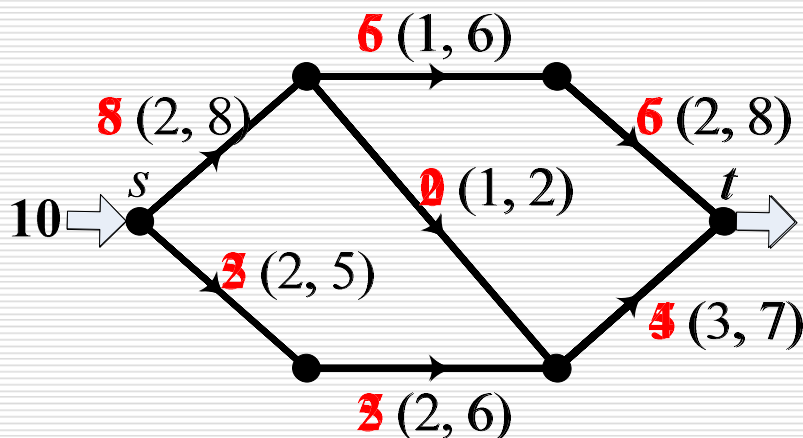
Υπολειμματικό Δίκτυο

- Δίκτυο $G(V, E, b, c)$ και ροή f .
- Υπολειμματικό δίκτυο $G_f(V, E_f, r_f)$:
 - Χωρητικότητα (μπρος-ακμές): $\forall (u, v) \in E \quad r_{uv} = b_{uv} - f_{uv}$
 $\tilde{c}_{vu} = c_{vu}$
 - Ροή (πίσω-ακμές): $\forall (u, v) \in E \quad r_{vu} = f_{uv}$
 $\tilde{c}_{vu} = -c_{uv}$



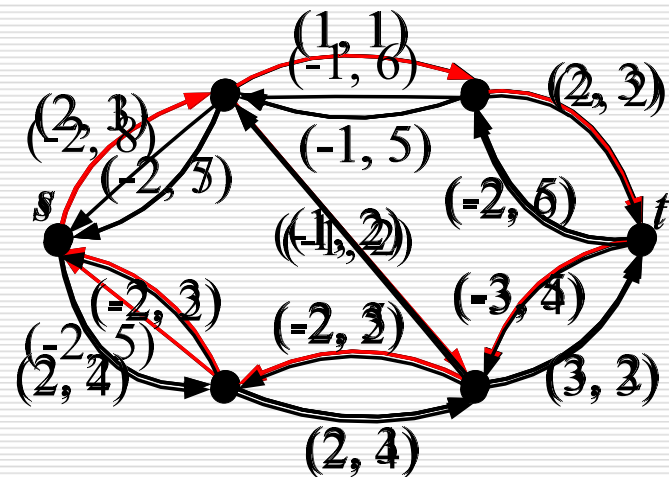
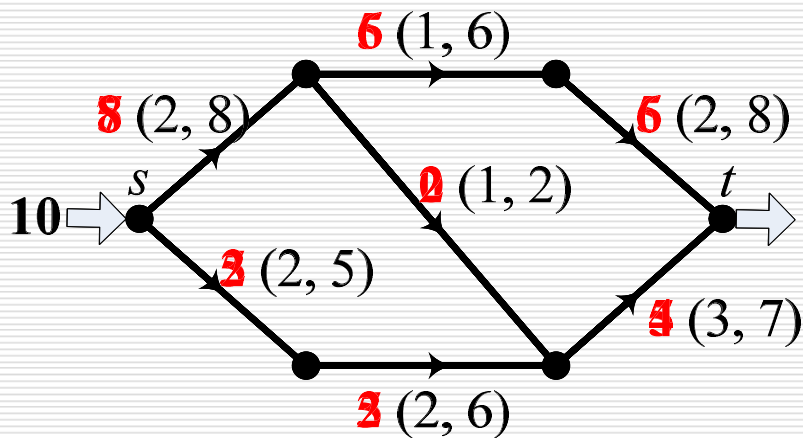
Χαρακτηρισμός Βέλτιστης Ροής

- Ροή ελάχιστου κόστους ανν όχι κύκλος αρνητικού κόστους.
 - Κύκλος κόστους λ : αύξηση ροής κατά δ σε μπρος ακμές και μείωση ροής κατά δ σε πίσω ακμές, μεταβολή κόστους $\lambda \cdot \delta$.
 - Κύκλος αρνητικού κόστους \Rightarrow μείωση κόστους \Rightarrow μη-βέλτιστη ροή.
 - Διαφορά μη-βέλτιστης με βέλτιστη ροή \Rightarrow κύκλοι, τουλάχιστον ένας αρνητικού κόστους.



Αλγόριθμος Klein (cycle canceling)

- Ενόσω **κύκλος αρνητικού κόστους κ** στο υπολειμματικό,
 - Χωρητικότητα κύκλου $\delta \leftarrow \min_{e \in \kappa} \{r_e\}$
 - **Αύξηση ροής κατά δ** στο κ και ενημέρωση υπολειμματικού δικτύου.
- Κύκλος αρνητικού κόστους με **Bellman-Ford**.



Χρόνος Εκτέλεσης

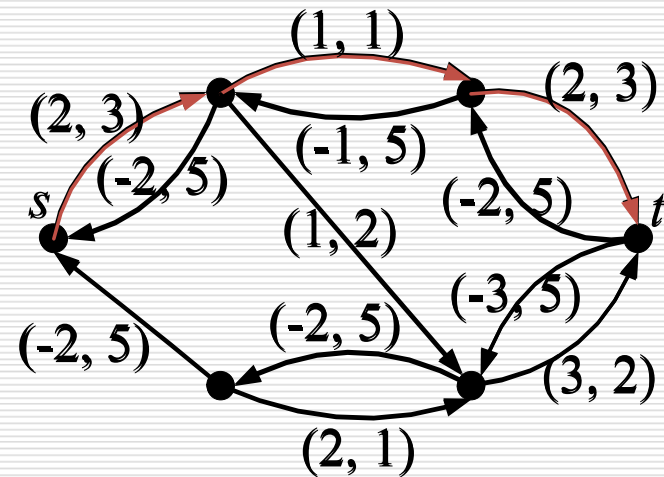
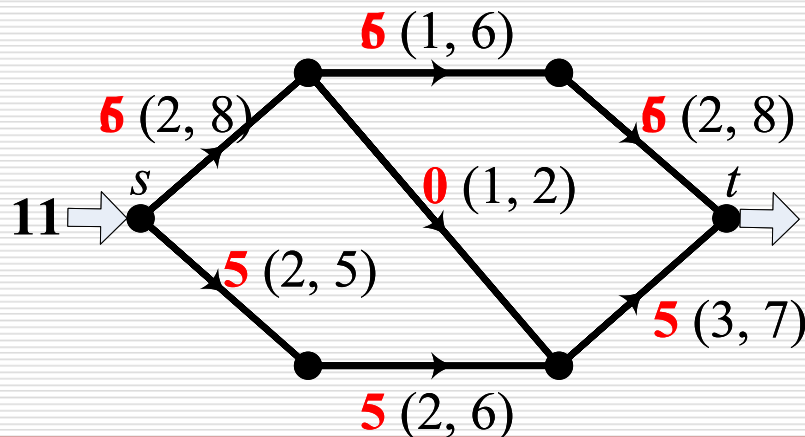
- **Ακέραιες χωρητικότητες $\leq U$ και κόστη $\leq C$:**
 - #επαναλήψεων $O(m C U)$:
 - Αρχικό κόστος $O(m C U)$, μείωση κατά 1 / επανάληψη.
 - Χρόνος εκτέλεσης $O(n m^2 C U)$
- Δίκτυο με ακέραιες χωρητικότητες, κόστη και απαιτήσεις έχει **ακέραιη ροή ελάχιστου κόστους.**
- Εκθετικός χρόνος για **μεγάλες χωρητικότητες !**
- Μπορεί να **μην τερματίσει** για **άρρητες** χωρητικότητες (ή μη-βέλτιστη ροή).

Βελτιώσεις

- Κύκλος με **μέγιστη βελτίωση**.
 - $O(m)$ επαυξήσεις \Rightarrow **μέγιστη βελτίωση στο μισό**.
 - Κύκλος μέγιστης βελτίωσης **NP-δύσκολο** να υπολογισθεί!
 - Αντί «μέγιστης», «αρκετά μεγάλη» βελτίωση.
 - #επαναλήψεων $O(m \log(m C U))$.
- Κύκλος με **ελάχιστο μέσο κόστος** (κόστος / ακμές). (Goldberg, Tarjan, 1986)
 - Υπολογισμός με αλγ. Karp σε χρόνο $O(n m)$.
 - #επαναλήψεων $O(n m \min\{\log(n C), m \log n\})$.

Επαναλαμβανόμενα Συντομότερα Μονοπάτια

- Ενόσω $s - t$ ροή $< d$, **συντομότερο $s - t$ μονοπάτι p στο υπολειμματικό δίκτυο και επαύξηση κατά μήκος του p .**
 - Επαύξηση κατά $\min\{\text{bottleneck χωρητικότητα } p, \text{ υπολειπόμενη απαίτηση }\}$.
 - Επαυξήσεις κατά μήκος συντομότερων μονοπατιών: **όχι κύκλοι αρνητικού μήκους** στο υπολειμματικό.
 - Υπολογισμός συντομότερων μονοπατιών και **βελτιστότητα!**



Χρόνος Εκτέλεσης

- #επαναλήψεων (για ακέραιες χωρητικότητες) $\leq d$.
 - Συντομότερα μονοπάτια με Bellman-Ford, χρόνος εκτέλεσης: $O(m n d)$.
 - Αποτελεί γενίκευση Ford-Fulkerson για max-flow.
- Επιτάχυνση αν συντομότερα μονοπάτια με Dijkstra(?).

Βελτίωση Edmonds – Karp

- Επιτάχυνση αν συντομότερα μονοπάτια με Dijkstra.
 - Χρησιμοποιούμε **δυναμικό** $\pi(v)$ σε κάθε κορυφή v , ώστε **ανηγμένο** κόστος ακμής $c^\pi(u, v) = c(u, v) + \pi(u) - \pi(v) \geq 0$.
 - Χρήση ανηγμένου κόστους **δεν επηρεάζει** κόστος ροής (τηλεσκοπικό άθροισμα, βλ. αλγόριθμο Johnson).
 - Ροή **ελάχιστου κόστους** αν **όχι κύκλος αρνητικού κόστους** αν υπάρχει **δυναμικό** π ώστε $c^\pi(u, v) \geq 0$ για όλες ακμές.
 - Δυναμικό $\pi(v) = 0$, αρχικά, και $\pi'(v) = \text{dist}^\pi(s, v)$, εξασφαλίζει $c^\pi(u, v) \geq 0$ για όλες ακμές.
 - Υπάρχουσες ακμές: «τριγωνική ανισότητα» αποστάσεων.
Νέες ακμές: ανηγμένο κόστος 0.
 - Χρόνος εκτέλεσης: $O(d m \log n)$.
Ταχύτερος combinatorial: $O(m^2 \log^2 n)$ (Orlin, 1993).