Άπληστοι Αλγόριθμοι

Διδάσκοντες: **Αρ. Παγουρτζής, Δ. Φωτάκης,**
Δ. Σούλιου, Παν. Γροντάς

Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Άπληστοι Αλγόριθμοι

- ... για προβλήματα βελτιστοποίησης:
  - Λειτουργούν σε βήματα.
  - Κάθε βήμα κάνει μια **αμετάκλητη** επιλογή για λύση.
  - **Άπληστη** επιλογή: αυτό που φαίνεται καλύτερο με βάση τρέχουσα κατάσταση και κάποιο (απλό) κριτήριο.
  - Ίδια στρατηγική στο υποπρόβλημα που προκύπτει.
- Πλεονεκτήματα:
  - Γρήγοροι, απλοί, και «φυσιολογικοί» αλγόριθμοι.
  - Εφαρμόζεται (επιτυχώς) σε πολλά και σημαντικά προβλήματα.
- Μειονεκτήματα:
  - Βέλτιστη λύση μόνο **υπό προϋποθέσεις**!
- Βέλτιστη λύση: **απόδειξη ορθότητας** (συν. επαγωγή).

Άπληστη Στρατηγική

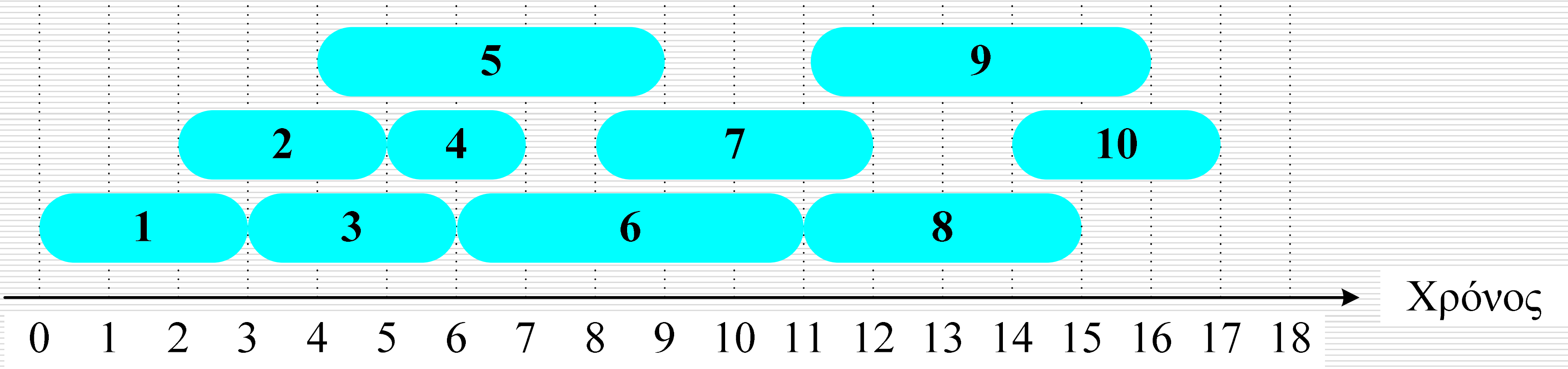
- Ταξινόμηση συνιστωσών με βάση κάποιο απλό κριτήριο.
- (Αμετάκλητη) επιλογή καθορίζει αν «καλύτερη» συνιστώσα θα συμπεριληφθεί στη λύση.
  - Επιλογή με κάποιον απλό κανόνα.
- Ίδια στρατηγική σε υποπρόβλημα που προκύπτει.
  - **Μη-προσαρμοστικός**: ίδια ταξινόμηση σε όλα τα βήματα.
  - **Προσαρμοστικός**: αλλάζει ταξινόμηση σε κάθε βήμα.
- Χρόνος εκτέλεσης συνήθως καθορίζεται από επιλογή «καλύτερης» συνιστώσας σε κάθε βήμα.

Επιλογή Δραστηριοτήτων

- *n* δραστηριότητες: αρχή και τέλος $[s_i, f_i) :\ f_i > s_i \geq 0$ (π.χ. μαθήματα, υπολογιστικές διεργασίες).
- Επιλογή δραστηριοτήτων χωρίς χρονικές επικαλύψεις και δρομολόγηση σε κοινό πόρο (π.χ. αίθουσα διδασκαλίας, επεξεργαστής).
- Ζητούμενο: δρομολόγηση **μέγιστου** #δραστηριοτήτων.
- Πρόβλημα συνδυαστικής βελτιστοποίησης:
  - Κάθε δρομολόγηση χωρίς επικαλύψεις: εφικτή λύση.
  - Ζητούμενο: εφικτή δρομολόγηση με μέγιστο #δραστηριοτήτων.

Παράδειγμα

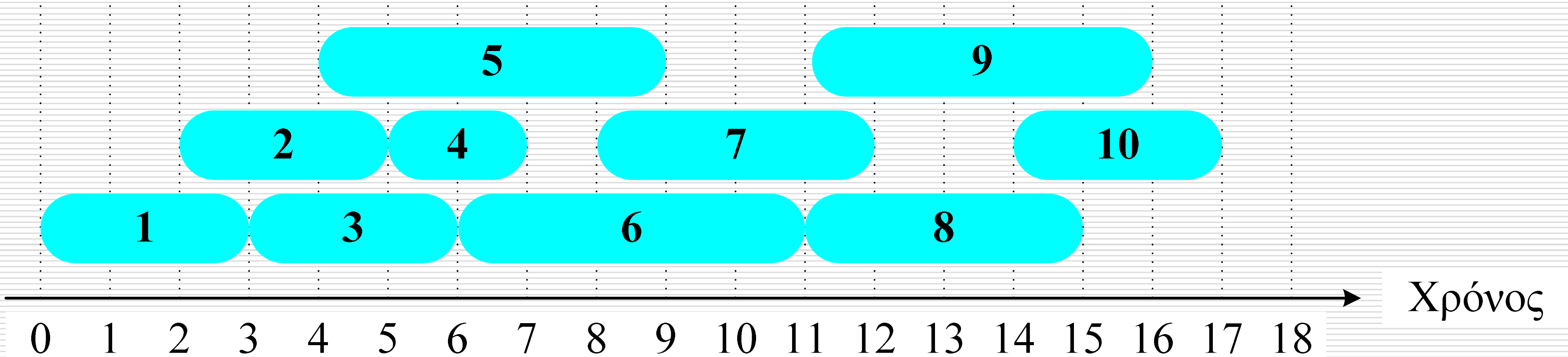
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
s_i	0	2	3	5	4	6	8	11	11	14
f_i	3	5	6	7	9	11	12	15	16	17



- Βέλτιστη λύση: **4** δραστηριότητες.
  Π.χ. {1, 3, 6, 8}, {2, 4, 7, 10}, {1, 4, 7, 10}, …

Άπληστος Αλγόριθμος

- Κριτήριο άπληστης επιλογής;
  - Ελάχιστος **χρόνος ολοκλήρωσης.**
- Ταξινόμηση σε αύξουσα σειρά χρόνου ολοκλήρωσης. Επόμενη δραστηριότητα:
  - **Δρομολογείται** αν είναι εφικτό (πόρος είναι ελεύθερος).
  - **Αγνοείται** αν δρομολόγηση δεν είναι εφικτή.



Υλοποίηση

greedySelection($(s_1, f_1), \ldots, (s_n, f_n)$)

  $/^*\ f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_n\ ^*/$

  $C \leftarrow \{1\};\ j \leftarrow 1;$

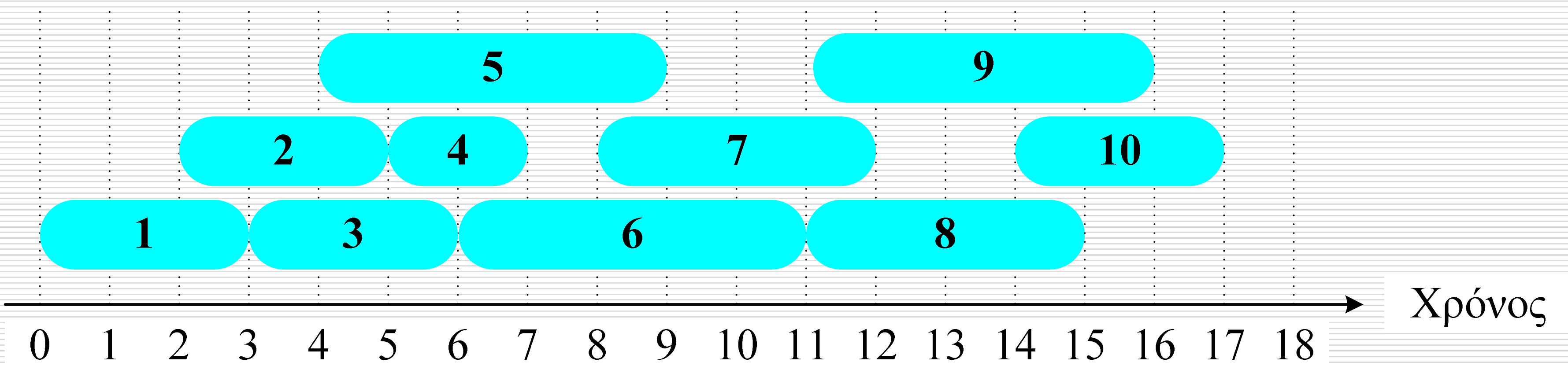
  for $i \leftarrow 2$ **to** n **do**

    if $s_i \geq f_j$ **then**

      $C \leftarrow C \cup \{i\};\ j \leftarrow i;$

  return(C);

Χρόνος **O(n log n)**
(ταξινόμηση ως προς χρόνο ολοκλήρωσης).



Υπολογισμός Βέλτιστης Λύσης

- Βέλτιστη λύση: **απόδειξη ορθότητας** (επαγωγή).
- Βασίζεται σε δύο ιδιότητες (απαραίτητες!):
  - **Αρχή βελτιστότητας** (βέλτιστες επιμέρους λύσεις):
    - Κάθε τμήμα βέλτιστης λύσης αποτελεί βέλτιστη λύση για αντίστοιχο υποπρόβλημα.
    - π.χ. κάθε τμήμα μιας συντομότερης διαδρομής είναι συντομότερη διαδρομή μεταξύ των άκρων του.
    - Χαρακτηριστικό και δυναμικού προγραμματισμού.
  - Ιδιότητα **άπληστης επιλογής**:
    - Υπάρχει βέλτιστη λύση που συμφωνεί με την άπληστη επιλογή που κάνει ο αλγόριθμος.
    - ... ή ισοδύναμα: η άπληστη επιλογή μπορεί να οδηγήσει σε βέλτιστη λύση.

Ορθότητα

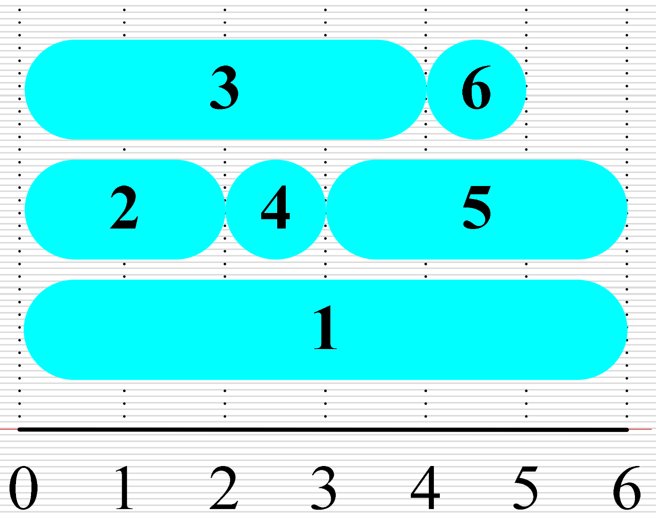
- Επαγωγή στον #δραστηριοτήτων.
  Υποθέτουμε πάντα ότι $f_1 \le f_2 \le \cdots \le f_n$
- Βάση: αν 1 δραστ., αυτή επιλέγεται πάντα.
- Έστω αλγ. υπολογίζει βέλτιστη λύση για ≤ n – 1 δραστ.
  Θδο. υπολογίζει βέλτιστη λύση για σύνολο Α με *n* δραστ.
  - Αλγ. επιλέγει 1 (f_1) και βέλτιστη λύση $A_1 = \{i : s_i \ge f_1\}$
  - C^*(A) βέλτιστη λύση και *j* δραστ. C^*(A) ολοκληρώνεται πρώτη.
  - $|C^*(A)| \le 1 + |C^*(A_1)| =$ #δραστηριοτήτων άπληστου αλγ.
  - Άπληστη επιλογή: $f_j \ge f_1 \Rightarrow (C^*(A) \setminus \{j\}) \cup \{1\}$ **βέλτιστη**.
- Άπληστος αλγόριθμος υπολογίζει βέλτιστη λύση για Α.

Ορθότητα

- Αποδείξαμε ότι $|C^*(A)| = 1 + |C^*(A_1)|$
- Ιδιότητα **άπληστης επιλογής**:
  - (Άπληστη) επιλογή δραστηριότητας με ελάχιστο χρόνο ολοκλήρωσης οδηγεί σε συνολικά βέλτιστη λύση.
- Ιδιότητα **βέλτιστων επιμέρους λύσεων**:
  - Βέλτιστη λύση περιέχει βέλτιστη λύση για υποπρόβλημα A_1 (δραστ. που δεν επικαλύπτονται με πρώτη).

Χρωματισμός Διαστημάτων

- *n* διαστήματα: αρχή και τέλος $[s_i, f_i) : \; f_i > s_i \geq 0$
- Χρωματισμός όλων ώστε επικαλυπτόμενα διαστήματα να έχουν διαφορετικό χρώμα.
- Ζητούμενο: χρωματισμός με **ελάχιστο** #χρωμάτων.
- Άπληστος αλγόριθμος:
  - Ταξινόμηση με χρόνο έναρξης.
  - Κάθε διάστημα που αρχίζει παίρνει πρώτο διαθέσιμο χρώμα.
  - Κάθε διάστημα που τελειώνει «απελευθερώνει» το χρώμα του.
- Χρήση χρώματος d ≥ 2 μόνο αν επικάλυψη d διαστημάτων.



Δρομολόγηση Εργασιών

- **Ένας** εξυπηρετητής (π.χ. επεξεργαστής, εκτυπωτής, ταμίας).
- Σύνολο *N* με *n* εργασίες: χρόνο εκτέλεσης $t_i > 0$
  (π.χ. υπολογιστικές διεργασίες, εκτυπώσεις, συναλλαγές).
- Δρομολόγηση για ελαχιστοποίηση **συνολικού** (ισοδύναμα, μέσου) χρόνου εξυπηρέτησης.
  - $t_1 = 8$, $t_2 = 7$, $t_3 = 2$, $t_4 = 5$.
    - 1, 2, 3, 4: 8 + 15 + 17 + 22 = **62**.
    - 3, 4, 2, 1: 2 + 7 + 14 + 22 = **45**.
  - Δρομολόγηση: μετάθεση $\pi : \{1, \ldots, n\} \mapsto \{1, \ldots, n\}$
  - Χρόνος εξυπηρέτησης *i* : $c_i(\pi) = \sum_{j:\pi(j) \leq \pi(i)} t_j$
  - Συνολικός χρόνος εξυπηρέτησης: $T(\pi) = \sum_{i=1}^{n} c_i(\pi)$

Άπληστος Αλγόριθμος

- Δρομολόγηση σε αύξουσα σειρά χρόνου εκτέλεσης:

$$t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n$$

- Συνολικός χρόνος εξυπηρέτησης:

$$\begin{aligned} T &= t_1 + (t_1 + t_2) + (t_1 + t_2 + t_3) + \cdots + (t_1 + \cdots + t_n) \\ &= n\, t_1 + (n-1)t_2 + (n-2)t_3 + \cdots + t_n \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} (n-i+1)t_i \end{aligned}$$

  - Βέλτιστος γιατί **όσο μεγαλύτερος** χρόνος εκτέλεσης, **τόσο λιγότερες φορές** συνεισφέρει στο συνολικό χρόνο εξυπηρέτησης.

Ορθότητα: Επιχείρημα Ανταλλαγής

- Έστω π^* βέλτιστη δρομολόγηση, $T(\pi^*)$ συνολικός χρόνος. $\lambda^*(j)$: σειρά εργασίας j στη βέλτιστη δρομολόγηση.
- Έστω π^* διαφορετική από άπληστη:
  - k **πρώτη** που δρομολογείται αργότερα στην π^*: $\lambda^*(k) > k$
  - j αυτή που δρομολογείται k-οστή στην π^*: $\lambda^*(j) = k$
  - … συμφωνούν σε $k - 1$ αρχικές: $k < j$ και $t_k \leq t_j$
  - t_k και t_j στο $T(\pi^*)$: $(n-k+1)t_j + \cdots + (n-\lambda^*(k)+1)t_k$
  - Ανταλλαγή k και j: $(n-k+1)t_k + \cdots + (n-\lambda^*(k)+1)t_j$ (k πηγαίνει στη θέση που έχει στην άπληστη δρομολόγηση).
  - Διαφορά: $(\lambda^*(k)-k)(t_k-t_j) \leq 0$
- Έτσι π^* γίνεται ίδια με άπληστη **χωρίς αύξηση** χρόνου.
  - **Άπληστη** δρομολόγηση είναι **βέλτιστη**.

Ιδιότητες

- Ιδιότητα **άπληστης επιλογής**:
  - Για κάθε *k*, βέλτιστη δρομολόγηση π* συμφωνεί με άπληστη στη σειρά των *k* πρώτων εργασιών.
  - (Άπληστη) επιλογή συντομότερης διαθέσιμης $\rightarrow$ βέλτιστη.
- Ιδιότητα **βέλτιστων επιμέρους λύσεων**:
  - $T = n\,t_1 + (n-1)t_2 + (n-2)t_3 + \cdots + t_n$
  - Αν αγνοήσουμε t_1, π* παραμένει βέλτιστη για υπόλοιπες.
- Απόδειξη **ορθότητας**: (επαγωγική) εφαρμογή ιδιότητας άπληστης επιλογής.

Πρόβλημα του Περιπτερά

- Κέρματα αξίας 1, 5, και 20 λεπτών.
- Ρέστα ποσό *x* με **ελάχιστο** #κερμάτων.
- Αλγόριθμος:
  - Όσο περισσότερα 20λεπτα: $c_{20}(x) = \lfloor x/20 \rfloor$
  - Όσο περισσότερα 5λεπτα: $c_5(x) = \lfloor (x - 20\, c_{20}(x))/5 \rfloor$
  - Υπόλοιπα 1λεπτα: $c_1(x) = x - 20\, c_{20}(x) - 5\, c_5(x)$
- Βέλτιστη λύση χρησιμοποιεί ίδιο #κερμάτων:
  - 20λεπτα: Δεν μπορεί περισσότερα. Βελτιώνεται αν λιγότερα.
  - Αν ίδιο #20λέπτων, τότε ίδιο #5λέπτων.
  - … **επαγωγή** στα πλήθος διαφορετικών κερμάτων.
- Δουλεύει αλγόριθμος αν κέρματα 1, 12, και 20 λεπτών;
  - Π.χ. ρέστα 24 λεπτά.

Κλασματικό Πρόβλημα Σακιδίου

- Δίνονται *n* είδη και ένα **σακίδιο** μεγέθους B.
  Είδος *i* διαθέσιμο σε ποσότητα s_i με αξία p_i : (s_i, p_i)
- Είδος *i* μπορεί να συμπεριληφθεί στο σακίδιο σε οποιοδήποτε ποσοστό.
- Ζητείται συλλογή μέγιστης αξίας που χωράει στο σακίδιο.

$$\begin{aligned} \max & \sum_{i=1}^{n} f_i p_i \\ \text{ώστε} & \sum_{i=1}^{n} f_i s_i \leq B \\ & f_i \in [0,1] \quad \forall i \in [n] \end{aligned}$$

  - Είδη: { (3, 5), (2, 7), (4, 4), (6, 8), (5, 4) }
    Μέγεθος σακιδίου: **10**.
  - Βέλτιστη λύση = { 1×(3, 5), 1×(2, 7), (5/6)×(6, 8) }
    Βέλτιστη αξία = 5 + 7 + (5/6)×8 = 18.3333

Άπληστος Αλγόριθμος

- Είδη N = {1, …, *n*}, σακίδιο μεγέθους B. Βέλτιστη λύση $F^* = (f_1^*, f_2^*, \ldots, f_n^*)$
- **Βέλτιστες Επιμέρους Λύσεις**. Αγνοούμε είδος *i* :
  - $F_{-i}^* = (f_1^*, \ldots, f_{i-1}^*, f_{i+1}^*, \ldots, f_n^*)$ **βέλτιστη λύση** για N \ { *i* } με σακίδιο $B - f_i^* s_i$
- Είδος *i* : $r_i = p_i / s_i$ (αξία / μονάδα μεγέθους)
- Είδη σε φθίνουσα σειρά r_i : $r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_n$
  - Όσο περισσότερο από *i* χωράει στο (διαθέσιμο) σακίδιο. $$f_i = \begin{cases} 1 & \text{αν } B_{i-1} \geq s_i \\ B_{i-1}/s_i & \text{αν } B_{i-1} < s_i \end{cases}$$
  - Αναπροσαρμογή διαθέσιμου σακιδίου και επόμενο είδος. $$B_i = B_{i-1} - f_i s_i$$

Υλοποίηση

$\text{greedyKnapsack}(B, (s_1, p_1), \ldots, (s_n, p_n))$

$\quad \textbf{for } i \leftarrow 1 \textbf{ to } n \textbf{ do}$

$\qquad r_i \leftarrow p_i / s_i;\ f_i \leftarrow 0;$

$\quad \text{Ταξινόμηση } r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_n$

$\quad \textbf{for } i \leftarrow 1 \textbf{ to } n \textbf{ do}$

$\qquad \textbf{if } B \leq 0 \textbf{ then } f_i \leftarrow 0;$

$\qquad \textbf{else if } B \geq s_i \textbf{ then}$

$\qquad\qquad f_i \leftarrow 1;\ B \leftarrow B - s_i;$

$\qquad\quad \textbf{else}$

$\qquad\qquad f_i \leftarrow B / s_i;\ B \leftarrow 0;$

Χρόνος **O(n log n)**
(ταξινόμηση ως προς λόγο αξίας / μέγεθος).

Άπληστη Επιλογή

- Έστω βέλτιστη λύση $F^* = (f_1^*, f_2^*, \ldots, f_n^*)$
  Έστω άπληστη λύση $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$
- Ιδιότητα **άπληστης επιλογής**:
  - Υπάρχει βέλτιστη λύση: $f_1^* = f_1$
  - Απληστία: καμία λύση με περισσότερο από είδος 1.
  - Αν βέλτιστη $f_1^* < f_1$, αντικαθιστούμε $(f_1 - f_1^*)s_1$ μονάδες άλλου είδους (ή κενού) με είδος 1:
    - Αποδεκτή λύση γιατί $B \geq f_1 s_1$
    - Αξία **δεν** μειώνεται.
- Απόδειξη ορθότητας με επαγωγική εφαρμογή ιδιότητας άπληστης επιλογής.

Ορθότητα

- Επαγωγή στον #ειδών.
  - Βάση: 1 είδος. Άπληστη επιλογή: $f_1^* = f_1$
  - Επαγωγική υπόθεση: ειδών ≤ *n* – 1, άπληστη = βέλτιστη.
  - Θεωρούμε *n* είδη.
  - Άπληστη επιλογή: $f_1^* = f_1$
  - Στιγμιότυπο με *n* – 1 είδη και σακίδιο $B - f_1 s_1$
  - Επαγωγική υπόθεση: $F_{-1} = (f_2, \ldots, f_n)$ **βέλτιστη** λύση.
  - Συνολικά για *n* είδη:

$$f_1 p_1 + \textstyle\sum_{i=2}^{n} f_i p_i \geq f_1^* p_1 + \sum_{i=2}^{n} f_i^* p_i$$

- **Άπληστος** αλγόριθμος υπολογίζει **βέλτιστη λύση.**

Άπληστη Στρατηγική

- Ταξινόμηση συνιστωσών με βάση κάποιο κριτήριο (π.χ. σακίδιο: είδη σε **φθίνουσα σειρά αξία / μέγεθος**).
- (Αμετάκλητη) επιλογή καθορίζει αν «καλύτερη» (βλ. «επόμενη») συνιστώσα θα συμπεριληφθεί στη λύση.
- Ίδια στρατηγική σε υπο-πρόβλημα που προκύπτει.
  - **Μη-προσαρμοστικός**: ίδια ταξινόμηση σε όλα τα βήματα.
  - **Προσαρμοστικός**: αλλάζει ταξινόμηση σε κάθε βήμα.
- Χρόνος εκτέλεσης καθορίζεται από χρόνο ταξινόμησης.
- Βέλτιστη λύση: **απόδειξη ορθότητας** (συνήθ. επαγωγή).
  - Ιδιότητα **άπληστης επιλογής**.
  - Αρχή **βελτιστότητας** (βέλτιστες επιμέρους λύσεις).