Quicksort

Διδάσκοντες:
Αρ. Παγουρτζής, Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

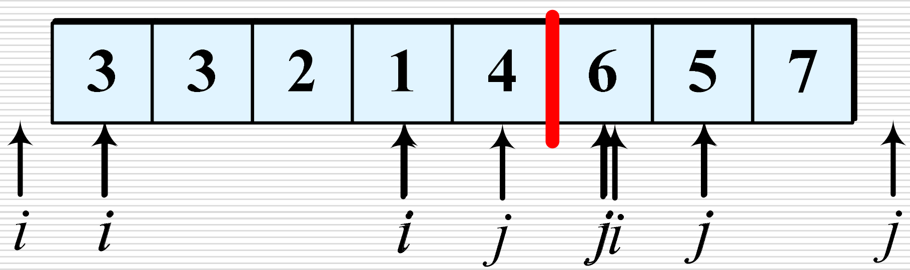
Quicksort [Hoare, 62]

- Στοιχείο διαχωρισμού (pivot), π.χ. πρώτο, τυχαίο, …
- Αναδιάταξη και διαίρεση εισόδου σε δύο υπο-ακολουθίες:
  - Στοιχεία αριστερής υπο-ακολ. ≤ στοιχείο διαχωρισμού.
  - Στοιχεία δεξιάς υπο-ακολ. ≥ στοιχείο διαχωρισμού.
- Ταξινόμηση υπο-ακολουθιών αναδρομικά.
- Ακολουθία ταξινομημένη – όχι σύνθεση!

```
quickSort(int A[], int left, int right) {
  if (left >= right) return; // At most 1 element
  q = partition(A, left, right);
  quickSort(A, left, q);
  quickSort(A, q+1, right);   }
```

Διαχωρισμός

- Στοιχείο χωρισμού (pivot), π.χ. **πρώτο**, τυχαίο, …
- Διαίρεση σε ένα πέρασμα :
  - Σάρωση από αριστερά (με δείκτη i) μέχρι $A[i] \geq$ pivot.
  - Σάρωση από δεξιά (με δείκτη j) μέχρι $A[j] \leq$ pivot.
  - Δεν έχουν εξεταστεί όλα τα στοιχεία ($i < j$): αντιμετάθεση($A[i]$, $A[j]$) και συνέχεια.
  - Έχουν εξεταστεί όλα: επιστροφή ορίου χωρισμού (δείκτη j).



Στοιχείο χωρισμού : 5

Διαχωρισμός

```
partition(int A[], int left, int right) {
    int pivot = A[left]; i = left - 1; j = right + 1;
    while (1) {
        while (A[++i] < pivot) ;
        while (A[--j] > pivot) ;
        if (i < j) swap(A[i], A[j]);
        else return(j); }   }
```

6	2	9	5	12	8	7	4	11	19	13	21

i i i j j j j

Στοιχείο χωρισμού : **13**

Διαχωρισμός

```
partition(int A[], int left, int right) {
    int pivot = A[left]; i = left - 1; j = right + 1;
    while (1) {
        while (A[++i] < pivot) ;
        while (A[--j] > pivot) ;
        if (i < j) swap(A[i], A[j]);
        else return(j); }   }
```

5	8	6	12	19	23	17	10

Στοιχείο χωρισμού : **10**

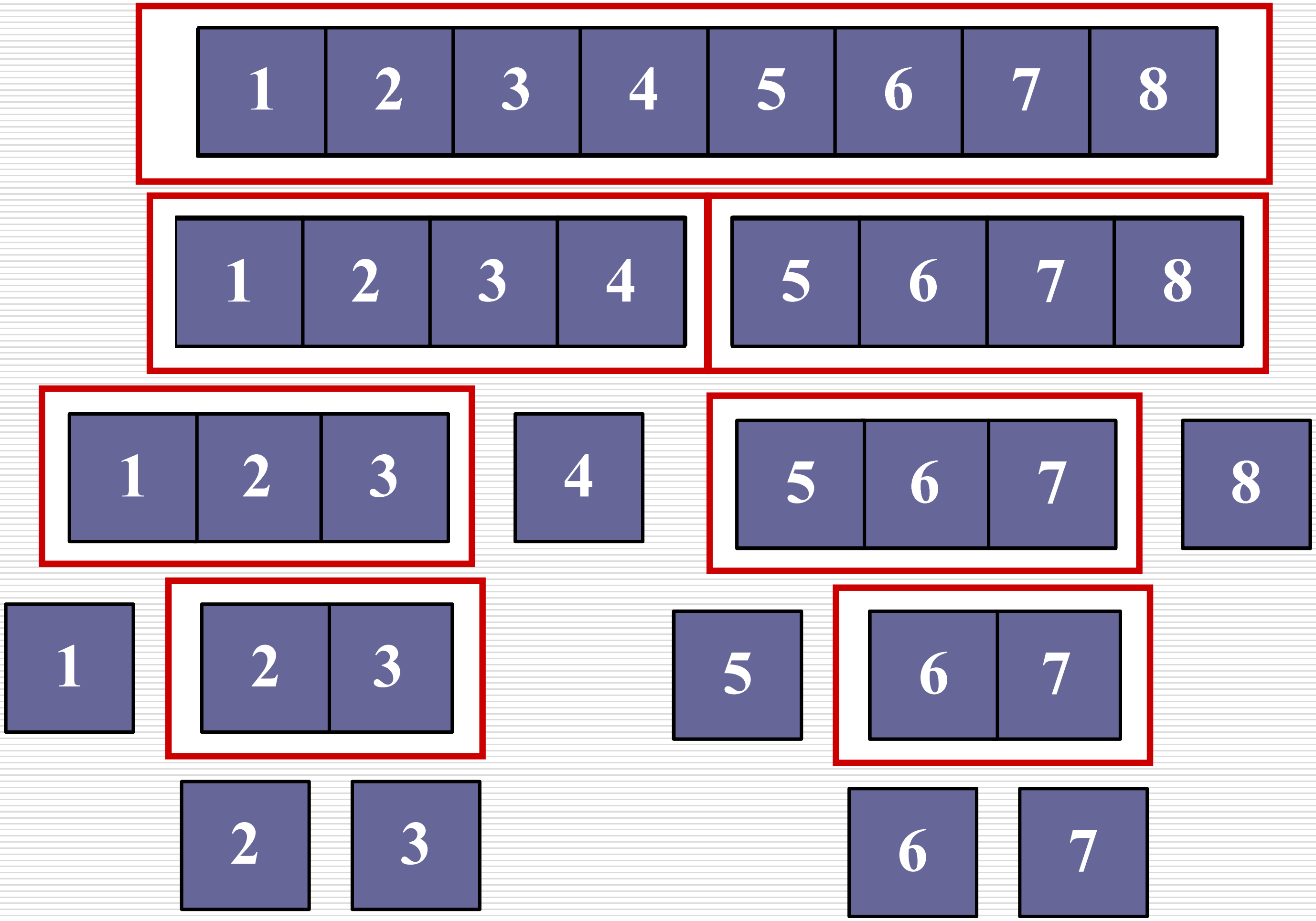
Ανάλυση Διαχωρισμού

- Ορθότητα **partition** :
  - Διατηρεί και επεκτείνει αριστερή περιοχή με στοιχεία ≤ pivot και δεξιά περιοχή με στοιχεία ≥ pivot.
  - $A[i] \geq$ pivot : επέκταση αριστερής περιοχής σταματά.
  - $A[j] \leq$ pivot : επέκταση δεξιάς περιοχής σταματά.
  - Ξένες περιοχές : αντιμετάθεση στοιχείων και συνέχεια.
  - Επικάλυψη : ολοκλήρωση διαίρεσης.
  - Τελικά τα στοιχεία αριστερά ≤ pivot και τα στοιχεία δεξιά ≥ pivot, **όπως απαιτείται.**
- Κάθε περιοχή ≥ 1 στοιχείο. **Quicksort τερματίζει.** ($1 \leq$ σημείο διαχωρισμού $\leq n-1$)
  - Απαραίτητα: i και j σταματούν στο pivot.

Ανάλυση Διαχωρισμού

- Χρόνος εκτέλεσης **partition** :
  - Κάθε στοιχείο συγκρίνεται με pivot μία φορά (εκτός από στοιχεία εκατέρωθεν σημείου χωρισμού).
  - Τελικά *i* και *j* «δείχνουν» είτε γειτονικές είτε ίδια θέση γιατί όπου πέρασε το *i* δεν συνεχίζει *j*.
  - Χρόνος εκτέλεσης **partition για n στοιχεία = Θ(n).**
- Μετά τον διαχωρισμό, στοιχεία δεν αλλάζουν «πλευρά» (δηλ. αριστερά μένουν αριστερά, δεξιά μένουν δεξιά).
- Υπάρχουν πολλές άλλες μορφές διαίρεσης, π.χ. pivot παίρνει τελική του θέση στον πίνακα, διαίρεση στα τρία, …

Παράδειγμα Quicksort



Ορθότητα Quicksort

- Συνέπεια ορθότητας **partition** :
  - Τερματισμός : μέγεθος υπο-ακολουθιών $\leq n - 1$.
  - Ταξινόμηση :
    - Αριστερά στοιχεία ≤ pivot ≤ δεξιά στοιχεία.
    - Επαγωγικά, αριστερή περιοχή και δεξιά περιοχή ταξινομημένες.
    - Συνολικά, πίνακας ταξινομημένος.

Χρόνος Εκτέλεσης (χ.π.)

- Χρόνος εκτελ. αναδρομικών αλγ. με διατύπωση και λύση αναδρομικής εξίσωσης.
- Χρόνος εκτέλεσης **partition**(n στοιχεία) : $\Theta(n)$
- ***T*(*n*)** : χρόνος (χ.π.) για ταξινόμηση n στοιχείων.
  - **Θ(*n*)** : αναδιάταξη και διαίρεση εισόδου.
  - ***T*(*k*)** : ταξινόμηση αριστερού τμήματος (k στοιχεία).
  - ***T*(*n* – *k*)** : ταξινόμηση δεξιού τμήματος ($n - k$ στοιχεία).

$$T(n) = \Theta(n) + \max_{1 \leq k \leq n-1} \{T(k) + T(n-k)\}\,, \quad T(1) = \Theta(1)$$

Χρόνος Εκτέλεσης (χ.π.)

$$T(n) = \Theta(n) + \max_{1 \le k \le n-1} \{T(k) + T(n-k)\}\,, \quad T(1) = \Theta(1)$$

- Χειρότερη περίπτωση : $k = 1$ ή $k = n - 1$ (σε κάθε κλήση).
  - Ουσιαστικά δεν γίνεται διαίρεση (μόνο αναδιάταξη) !
  - Partition «βοηθάει ελάχιστα» τον αλγόριθμο.

$$T(n) = \Theta(n) + T(n-1) + T(1)\,, \quad T(1) = \Theta(1)$$

$$T(n) = \Theta(n) + \Theta(n-1) + \Theta(n-2) + \cdots + \Theta(1) = \Theta(n^2)$$

- Στιγμιότυπα που quicksort χρειάζεται χρόνο $\Omega(n^2)$;

Χρόνος Εκτέλεσης

- **Καλύτερη περίπτωση** : $k = n / 2$ (σε κάθε κλήση).
  - Ουσιαστικά τέλεια διαίρεση !
  - Partition «βοηθάει τα μέγιστα» !

$$T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n) \Rightarrow T(n) = \Theta(n \log n)$$

- Αν $\min\{k, n-k\} \geq n/4$ (περίπου ίδιο μεγέθος)

$$T(n) = \Theta(n) + T(n/4) + T(3n/4) \Rightarrow T(n) = \Theta(n \log n)$$

- Χειρότερη και καλύτερη περίπτωση εξαιρετικά σπάνιες !
- Αν τυχαίο στοιχείο pivot,
  πιθανότητα διαίρεσης $(n / 4, 3n / 4)$ ή καλύτερης $\geq$ **1/2** !

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Πιθανοτική Quicksort

- Τυχαίο στοιχείο σαν στοιχείο χωρισμού (pivot).
- Για κάθε $k \in [n-1]$,
  πιθανότητα διαίρεσης (k, $n - k$) = $\dfrac{1}{n-1}$

```
randomQuickSort(int A[], int left, int right) {
   if (left >= right) return; // At most 1 element
   pivot = random(left, right);
   swap(A[left], A[pivot]);
   q = partition(A, left, right);
   randomQuickSort(A, left, q);
   randomQuickSort(A, q+1, right);   }
```

Χρόνος Εκτέλεσης (μ.π.)

$$S(n) = \Theta(n) + \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}[S(k) + S(n-k)]$$

$$= \Theta(n) + \frac{2}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} S(k)$$

- Λύση αναδρομής : $S(n) = \Theta(n \log n)$
  Αυτός ο χρόνος εκτέλεσης με μεγάλη πιθανότητα !
- Πιθανότητα διαίρεσης (n / 4, 3n / 4) ή καλύτερης ≥ **1/2** !
  - Κατά «μέσο όρο», κάθε 2 επίπεδα στο δέντρο της αναδρομής, έχουμε «επιτυχημένη» διαίρεση.
  - Σε κάθε επίπεδο, συνολικός χρόνος διαίρεσης Θ(n).
  - Θ(n log n) από «επιτυχημένες» διαιρέσεις + Θ(n log n) από «αποτυχημένες» διαιρέσεις.

Χρόνος Εκτέλεσης (μ.π.)

- Πιθανότητα διαδοχικές «αποτυχημένες» διαιρέσεις $> c \log n$ είναι **εκθετικά** μικρή !
  - Χρόνος εκτέλεσης $\Theta(n \log n)$ με **μεγάλη πιθανότητα** !
- Μέση περίπτωση δεν εξαρτάται από είσοδο ! Αφορά στη συμπεριφορά του αλγόριθμου.
- Εκθετικά μικρή πιθανότητα χειρότερης περίπτωσης.
  - Ανάλυση χειρότερης περίπτωσης δεν έχει νόημα !

Πιθανοτικοί Αλγόριθμοι

- Ντετερμινιστικοί αλγόριθμοι:
  - Προκαθορισμένη συμπεριφορά για κάθε είσοδο.
  - Υπάρχει χειρότερη περίπτωση και μπορεί να συμβεί.
- Πιθανοτικοί αλγόριθμοι:
  - Συμπεριφορά από είσοδο και τυχαίες επιλογές.
  - Χρήση τυχαιότητας ώστε χειρότερη περίπτωση να συμβαίνει με πολύ μικρή πιθανότητα.
  - Ποια είναι η χειρότερη περ. για πιθανοτική quicksort;
  - Χρόνος (απόδοση) κατά μέση τιμή.
    Ορθότητα με μεγάλη πιθανότητα.
  - Las-Vegas: αποτέλεσμα σωστό, χρόνος τυχαία μετ/τη.
  - Monte-Carlo: χρόνος προκαθορισμένος, μπορεί λάθος αποτέλεσμα (αλλά με πολύ μικρή πιθανότητα).

Σύνοψη

- Quicksort:
  - Πιθανοτικός αλγόριθμος.
  - Χρόνος χειρότερης περ.: $\Theta(\ n^2\ )$
  - Χρόνος μέσης περίπτωσης: $\Theta(n \log n)$
  - Χώρος: πρακτικά in-place.
    - Αναδρομή καθυστερεί και απαιτεί μνήμη.
  - Εύκολη και γρήγορη υλοποίηση.
  - Γρηγορότερος αλγόριθμος στην πράξη (για $n \geq 30$).

Σύνοψη

Αλγόριθμος	Καλύτερη	Μέση	Χειρότερη	Χώρος
BubbleS	$\Omega(n)$	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(1)$
InsertionS	$\Omega(n)$	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(1)$
SelectionS	$\Omega(n)$	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(1)$
HeapS	$\Omega(n \log n)$	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$	$O(1)$
MergeS	$\Omega(n \log n)$	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$	$O(n)$
QuickS	$\Omega(n \log n)$	$O(n \log n)$	$O(n^2)$	?