

# Union – Find

---

**Δημήτρης Φωτάκης**

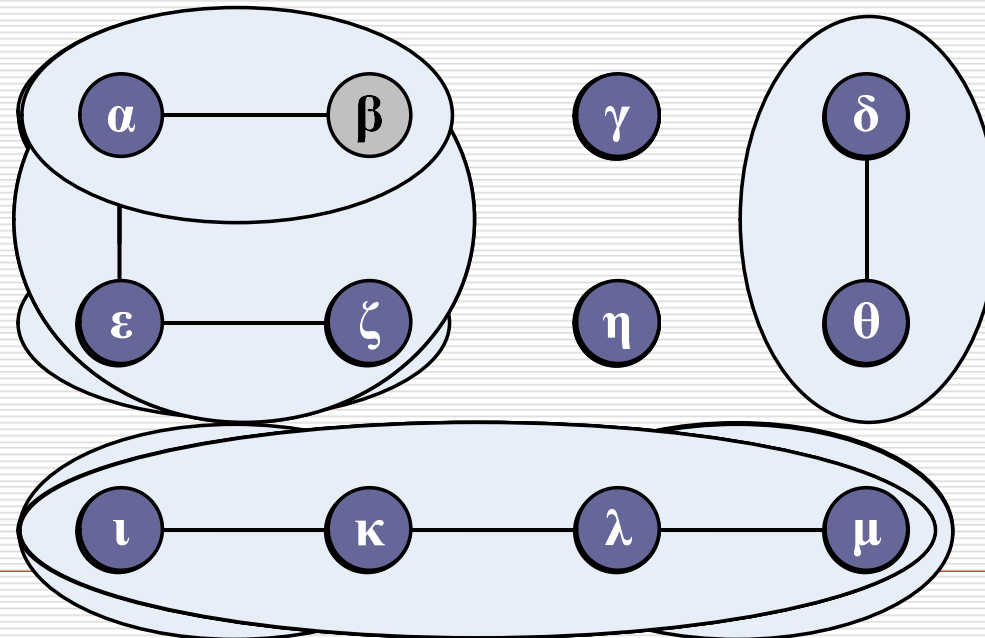
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών  
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



# Διαχείριση Διαμερίσεων Συνόλου

- Στοιχεία σύμπαντος διαμερίζονται σε **κλάσεις ισοδυναμίας** που **μεταβάλλονται δυναμικά** με ένωση.
- Λειτουργίες:
  - Εύρεση **find(x)**: **αντιπρόσωπο** κλάσης όπου ανήκει x.
  - Ένωση **union(x, y)**: **ένωση** κλάσεων όπου ανήκουν x και y.



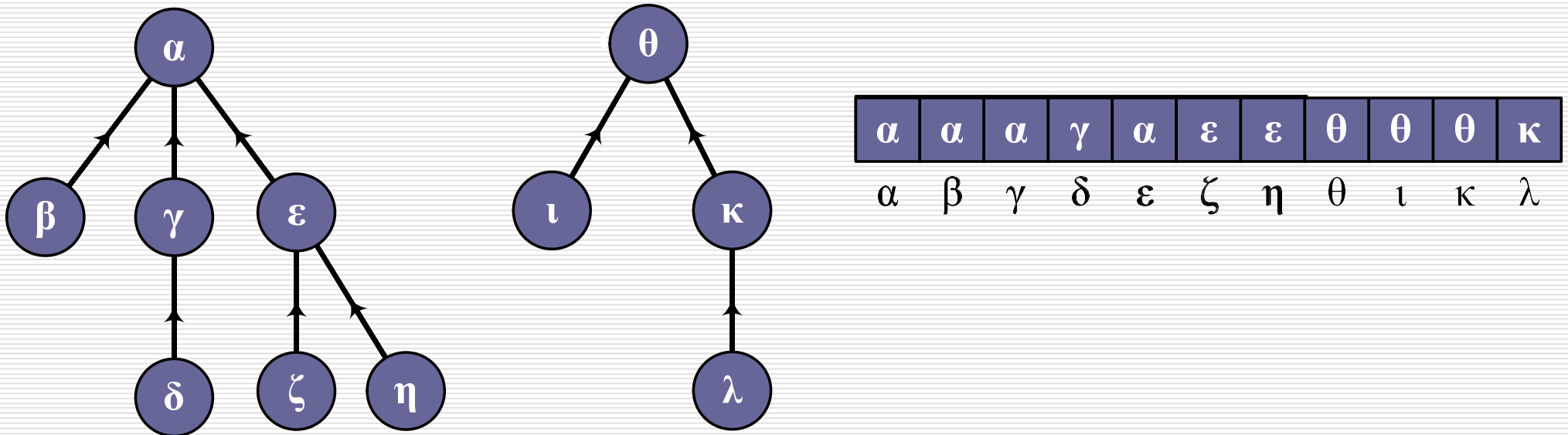
# Πρόβλημα Union – Find

---

- Στοιχεία  $U = \{1, 2, \dots, n\}$  αρχικά σε  $n$  κλάσεις.
  - Κάθε κλάση προσδιορίζεται από στοιχείο – αντιπρόσωπο.
- $\text{find}(x)$ : αντιπρόσωπος κλάσης όπου ανήκει  $x$ .
  - Διατηρούμε μοναδικό αντιπρόσωπο για κάθε κλάση.
- $\text{union}(x, y)$ : αντικατάσταση (αντιπροσώπων) κλάσεων  $x$  και  $y$  με κλάση που προκύπτει από ένωση.
  - Ελέγχουμε αν  $x$  και  $y$  ανήκουν σε διαφορετική κλάση.
  - Νέος αντιπρόσωπος από τους αντιπροσώπους κλάσεων  $x, y$
  - Πάντα διαμέριση του  $U$  σε κλάσεις.
  - $\leq n - 1$  ενώσεις (μετά από  $n - 1$ , μία μόνο κλάση).
- Δομή δεδομένων που ελαχιστοποιεί συνολικό χρόνο για ακολουθία  $m$  ευρέσεων και  $n - 1$  ενώσεων.

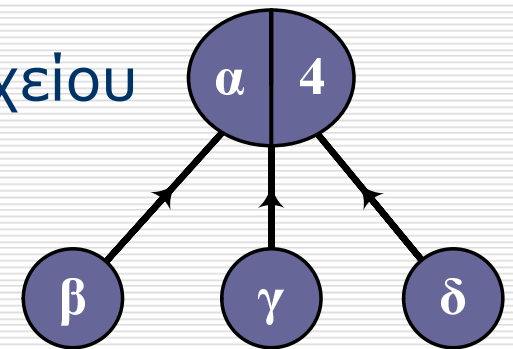
# Αναπαράσταση Δέντρου & Δάσους

- Πίνακας γονέων  $A[1\dots n]$  για δέντρο με ρίζα και  $n$  κόμβους:
  - $A[i] = j$  ανν  $j$  πατέρας του  $i$  στο δέντρο.
  - $A[\text{ρίζας}] = \text{ρίζα}$  (ή  $-1$ ).
  - Όμοια για δάσος όπου κάθε δέντρο έχει ρίζα.



# Αναπαράσταση με Δέντρα

- Κλάση: **δέντρο** με **ρίζα** το στοιχείο-**αντιπρόσωπο**.
  - Όνομα ρίζας.
  - Μέγεθος κλάσης.
- Στοιχείο: **κόμβος** δέντρου με πεδία
  - Όνομα στοιχείου.
  - Όνομα γονέα: όνομα προηγούμενου στοιχείου στο μονοπάτι προς τη ρίζα-αντιπρόσωπο.
- Αναπαράσταση με πίνακα γονέων:
  - $A[x]$  : γονέας στοιχείου  $x$ .
  - Ρίζα – στοιχείο αντιπρόσωπος έχει  $A[x] = x$  και επιπλέον πεδίο **size**.



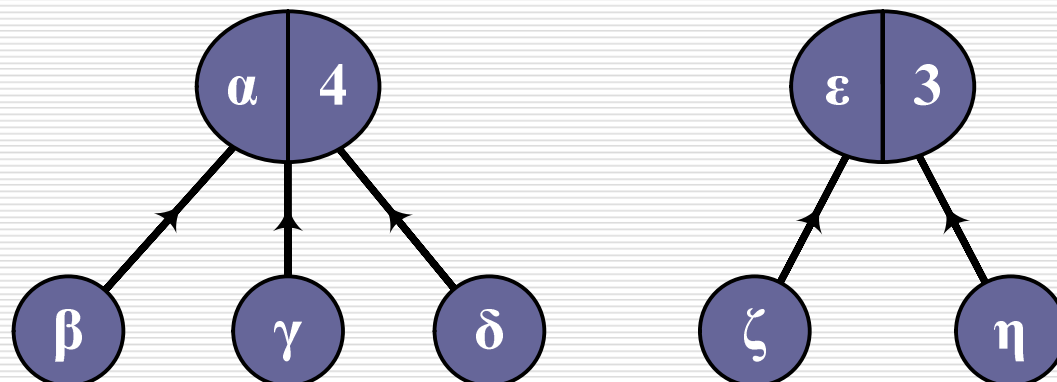
4			
α	α	α	α
α	β	γ	δ

# Αναπαράσταση με Δέντρα

- `find(x)`: ακολουθούμε δείκτες σε γονέα μέχρι τη ρίζα.

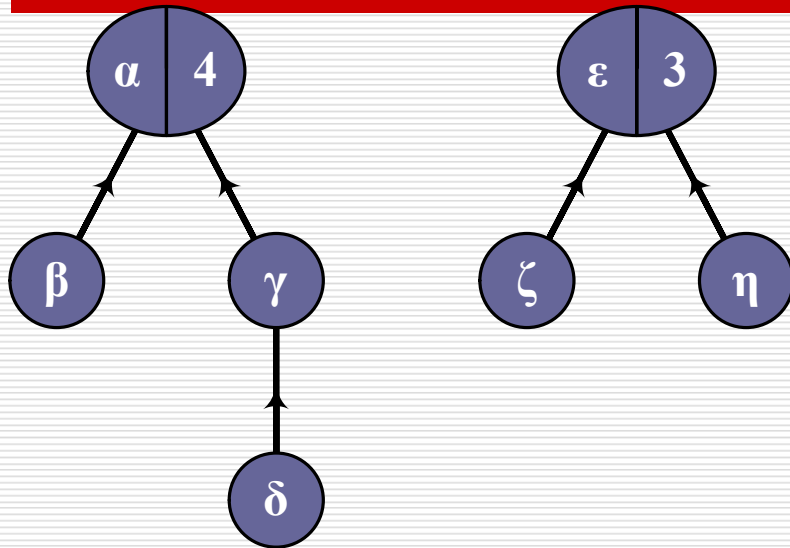
```
elem find(elem x) {  
    while (x != A[x])  
        x = A[x];  
    return x; }
```

- `union(x, y)`:  $x$  και  $y$  αντιπρόσωποι διαφορετικών συνόλων
  - Συνένωση δέντρων: ρίζα 1<sup>ου</sup> συν. γίνεται γονέας ρίζας 2<sup>ου</sup> συν.
  - Ενημέρωση μεγέθους

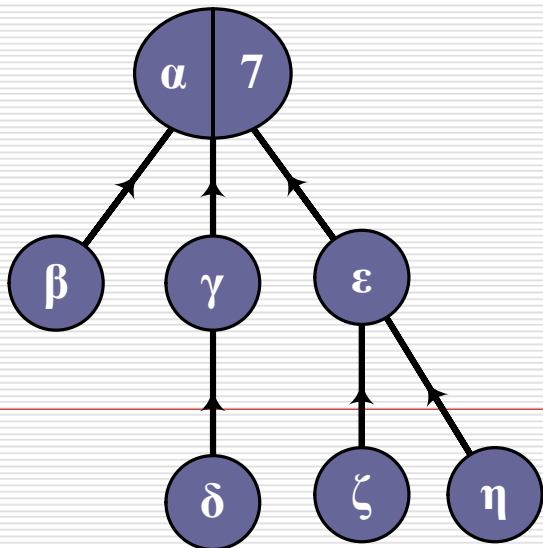


# Ένωση

---



```
unionTree(elem x, elem y) {  
    if (x == y) return;  
    A[y] = x;  
    A[x].size += A[y].size; }
```



# Απόδοση

---

- Χρόνος χ.π. για  $m$  finds και  $n$  unions:  $O(mn + n)$ 
  - Union :  $O(1)$  χρόνος.
  - Find :  $O(\text{ύψος δέντρου})$ 
    - Χειρότερη περίπτωση:  $\text{ύψος} = n - 1$ 
      - $\text{union}(n-1, n), \text{union}(n-2, n-1), \text{union}(n-3, n-2),$   
 $\text{union}(n-4, n-3), \dots, \text{union}(3, 2), \text{union}(1, 2).$
- Απλή δομή, εύκολη υλοποίηση, αλλά ακριβό find!



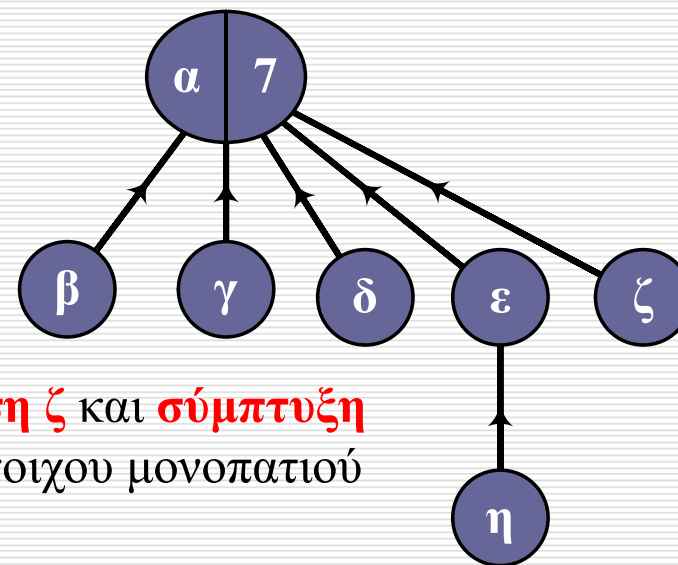
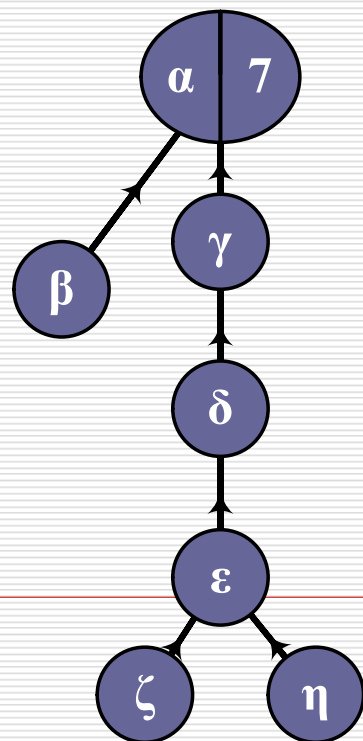
# Βεβαρυμένη Ένωση

---

- «Δεύτερο» σύνολο αυτό με τα λιγότερα στοιχεία.
  - Λογαριθμικό ύψος δέντρου :  $O(\log n)$ .
  - Βεβαρυμένη ένωση: δέντρο ύψους  $h$  έχει  $\geq 2^h$  στοιχεία.
- Απόδειξη με επαγωγή:
  - Ισχύει για  $h = 0$  (δέντρο ενός στοιχείου).
  - Ένωση δέντρων  $x$  και  $y$  με ύψη  $h_x, h_y$ , και στοιχεία  $s_x \geq s_y$
  - Επαγωγικά, υποθέτουμε  $s \geq 2^h$  (για  $x$  και  $y$ )
    - Ύψος ένωσης =  $h_x$  : στοιχεία ένωσης  $\geq 2^{\text{ύψος}}$
    - Ύψος ένωσης =  $h_y + 1$  : στοιχεία ένωσης  $\geq 2 s_y \geq 2^{\text{ύψος}}$
- Χρόνος χ.π. για  $m$  finds και  $n$  unions:  $O(m \log n + n)$ 
  - Απλή υλοποίηση και αποδεκτή απόδοση.

# Σύμπτυξη Μονοπατιών

- Find ακριβό όταν στοιχεία μακριά από ρίζα.
- Σύμπτυξη μονοπατιού όταν  $\text{find}(x)$ :
  - Όλοι οι πρόγονοι του  $x$  (και το  $x$ ) γίνονται παιδιά ρίζας.
  - Δέντρο «κονταίνει» (όχι επιβάρυνση ασυμπτωτικού χρόνου).
  - Στο μέλλον, θα βρίσκουμε σύνολο των στοιχείων γρήγορα.

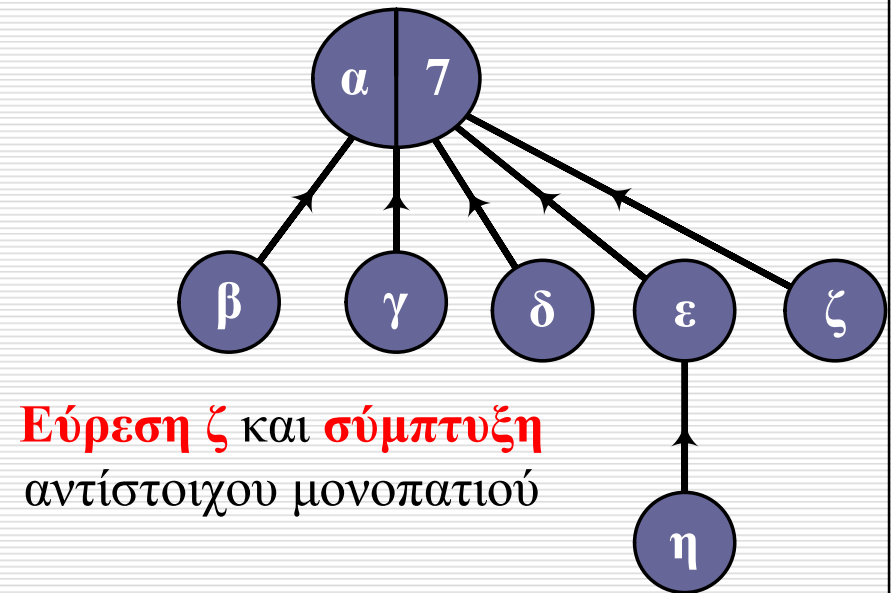
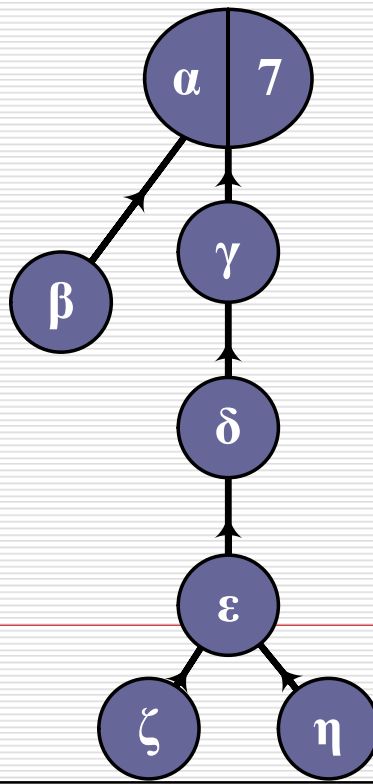


Εύρεση ζ και σύμπτυξη  
αντίστοιχου μονοπατιού

# Σύμπτυξη Μονοπατιών

```
elem findTreePathCompression(elem x) {  
    if (x != A[x])  
        A[x] = findTreePathCompression(A[x]);  
    return (A[x]); }  
}
```

- Ανεβαίνουμε μέχρι ρίζα.
- Επιστρέφοντας μέχρι  $x$ , όλοι οι δείκτες γονέων τίθενται να δείχνουν στη ρίζα.



Εύρεση ζ και σύμπτυξη  
αντίστοιχου μονοπατιού

# Απόδοση

---

- Δέντρα, βεβαρυμένη ένωση, και σύμπτυξη μονοπατιών.
- Χρόνος χ.π. για  $m \geq n$  finds και  $n$  unions:  $O(m a(n, m))$ 
  - $a(n, m)$ : αντίστροφη συνάρτηση Ackermann.
  - Μεγαλώνει εξαιρετικά αργά!
  - Στην πράξη, μπορεί να θεωρηθεί σταθερά.
- Απλή δομή, εύκολη υλοποίηση, και ουσιαστικά γραμμικός χρόνος!