Ουρές Προτεραιότητας, Δυαδικός Σωρός, Union-Find

Δημήτρης Φωτάκης, Αριστείδης Παγουρτζής, Δώρα Σούλιου, Παναγιώτης Γροντάς

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Περιεχόμενα

- Δομές Δεδομένων
- Ουρές Προτεραιότητας
- Σωροί
  - Ορισμός – Ιδιότητα Σωρού
  - Αναπαράσταση με πίνακα
  - Αποκατάσταση ιδιότητας σωρού
  - Δημιουργία σωρού
- Heap Sort
- Δομές Union-Find (disjoint-set)
  - Αναπαράσταση με πίνακα
  - Join By Size
  - Path Compression

Δομές Δεδομένων

Δομές Δεδομένων

- (Αναπαράσταση,) οργάνωση και διαχείριση συνόλων αντικειμένων για αποδοτική **ενημέρωση** και **ανάκτηση** πληροφορίας.
  - Αποδοτική υλοποίηση αλγορίθμων και Βάσεων Δεδομένων.
- (Αποδοτική) αναπαράσταση – **οργάνωση** «σύνθετων» αντικειμένων με χρήση:
  - Βασικών τύπων δεδομένων (ints, floats, chars, strings, arrays).
  - Μηχανισμών ομαδοποίησης που παρέχονται από γλώσσες προγραμματισμού (structs – records, objects).
- **Διαχείριση:** υλοποίηση στοιχειωδών λειτουργιών
  - Ταξινόμηση, αναζήτηση, min/max/median, first/last, …
  - Εισαγωγή, διαγραφή, ενημέρωση.
- Λύσεις και τεχνικές για αποδοτική διαχείριση δεδομένων.
  - Ανάλυση για απαιτήσεις και καταλληλότητα.

Γενικευμένος Τύπος Δεδομένων

- **Abstract Data Type** (ADT): σύνολο (στιγμιότυπα) με λειτουργίες (μεθόδους) επί των στοιχείων του.
- **Δομή Δεδομένων**: Υλοποίηση ενός ADT
  - Αναπαράσταση – οργάνωση στιγμιοτύπων και υλοποίηση λειτουργιών με κατάλληλους αλγόριθμους.
  - Διατύπωση: ορισμός αναπαράστασης και περιγραφή υλοποίησης λειτουργιών (ψευδο-κώδικας).
  - Ανάλυση: προσδιορισμός απαιτήσεων σε χώρο αποθήκευσης και χρόνο εκτέλεσης για κάθε (βασική) λειτουργία.
- **Αναλογία Java: Interface vs Κλάση**

Ουρά Προτεραιότητας (Priority Queue)

- Ουρά όπου **σειρά διαγραφής** καθορίζεται από **προτεραιότητα (μεγαλύτερη** – μικρότερη).
- Στοιχεία (προτεραιότητα, πληροφορία).
- Ακολουθία από λειτουργίες:
  - insert(x): εισαγωγή x.
  - deleteMax(): διαγραφή και επιστροφή στοιχείου μέγιστης προτεραιότητας.
  - max(): επιστροφή στοιχείου μέγιστης προτεραιότητας (χωρίς διαγραφή).
  - changePriority(k): αλλαγή προτεραιότητας θέσης k.
  - isEmpty(), size(): βοηθητικές λειτουργίες.

Εφαρμογές

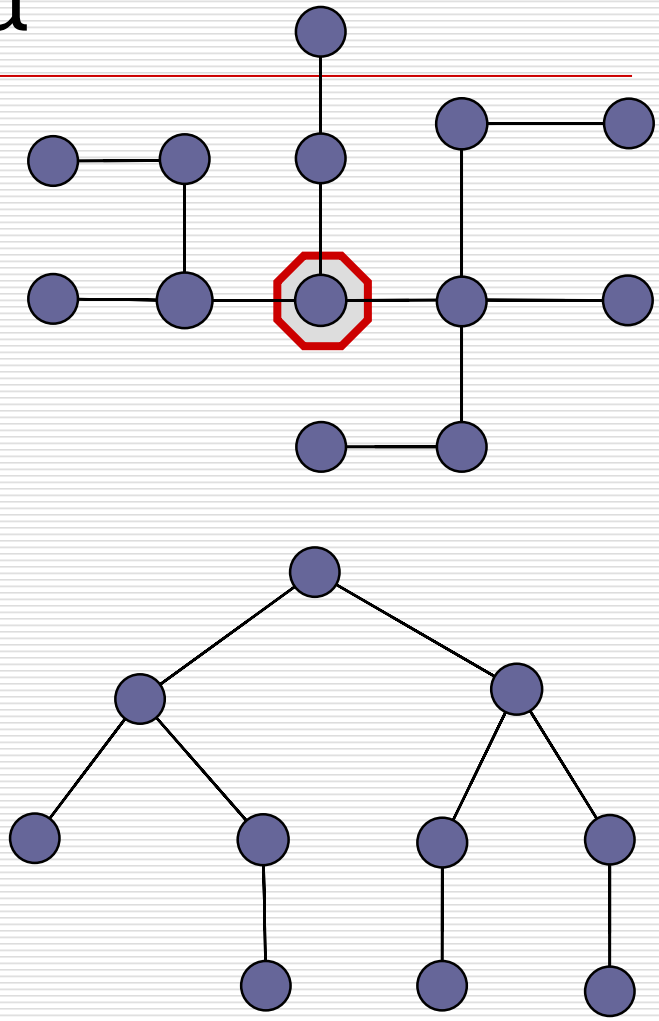
- Άμεσες εφαρμογές:
  - Υλοποίηση ουρών αναμονής με προτεραιότητες.
    - Δρομολόγηση με προτεραιότητες.
    - Largest (Smallest) Processing Time First.
- Έμμεσες εφαρμογές:
  - Βασικό συστατικό **πολλών** ΔΔ και αλγορίθμων:
    - HeapSort (γενικά ταξινόμηση με επιλογή).
    - Αλγόριθμος Huffman.
    - Αλγόριθμοι Prim και Dijkstra.
    - ...

Στοιχεία Ουράς Προτεραιότητας

- Ουρές Προτεραιότητας:
  - **Ολική διάταξη** στοιχείων με βάση προτεραιότητα.
  - Στοιχεία είναι αριθμοί (με συνήθη διάταξη) που δηλώνουν προτεραιότητα.
  - Εφαρμογή για στοιχεία κάθε συνόλου με σχέση ολικής διάταξης (αριθμοί, λέξεις, εισοδήματα, …).
- Ουρά Προτεραιότητας με γραμμική λίστα:
  - Διαγραφή μέγιστου ή εισαγωγή απαιτεί γραμμικό χρόνο.
- Υλοποίηση ουράς προτεραιότητας με **σωρό** (heap).
  - Δυαδικό δέντρο με διάταξη σε κάθε μονοπάτι ρίζα – φύλλο.
  - Πιο αποδοτικό

Ιεραρχικές Δομές: Δέντρα

- Γράφημα **ακυκλικό** και **συνεκτικό.**
- Δέντρο με **n κορυφές** έχει **m = n – 1 ακμές.**
- Δέντρο με **ρίζα : Ιεραρχία**
- **Ύψος** : μέγιστη απόσταση φύλλου από ρίζα.
- **Δυαδικό δέντρο** : έχει **ρίζα** και κάθε κορυφή **≤ 2 παιδιά** :
  - Αριστερό και δεξιό.
- Κάθε **υποδέντρο** είναι δυαδικό δέντρο.

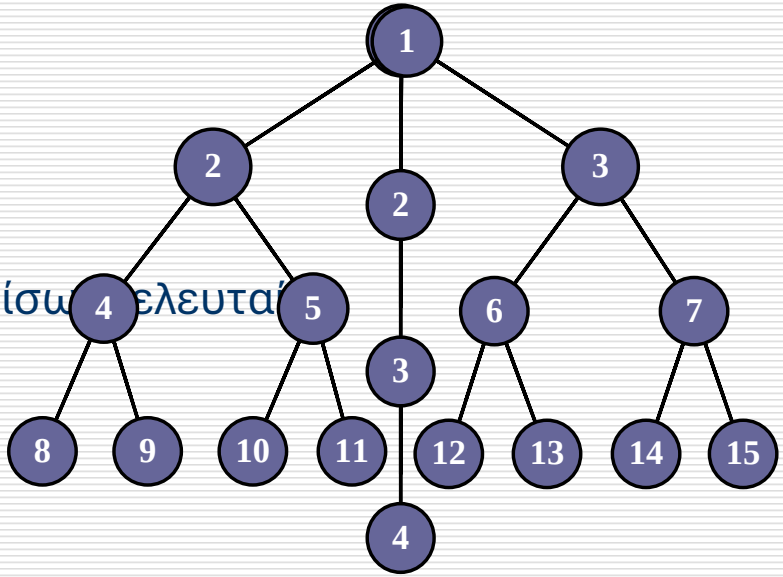


Δυαδικά Δέντρα

- **Γεμάτο** (full):
  - Κάθε κορυφή είτε φύλλο είτε 2 παιδιά.
- **Πλήρες** (complete) :
  - Όλα τα επίπεδα συμπληρωμένα (εκτός ίσως το τελευταίο)
- **Τέλειο** (perfect) : $n = 2^{h+1} - 1$
- **#κορυφών** για ύψος = h:

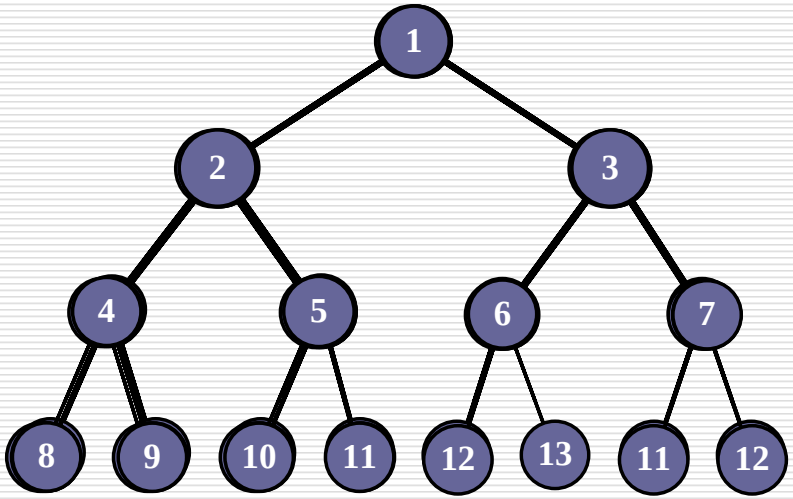
  $h+1 \leq$ #κορυφών $\leq 2^{h+1} - 1$
  - $h+1$: επίπεδα ≥ 1 κορ. / επίπ.
  - $\leq 2^i$ κορυφές στο επίπεδο i .

    $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^h = 2^{h+1} - 1$
- **Ύψος** για #κορυφών = n: $\log_2(n+1) - 1 \leq$ ύψος $\leq n - 1$



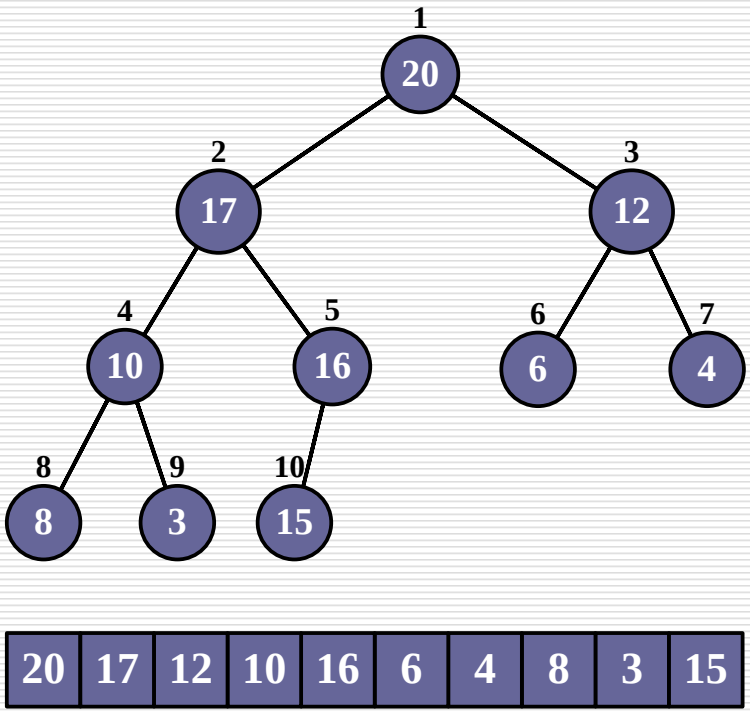
Πλήρες

- Όλα τα επίπεδα συμπληρωμένα εκτός ίσως από τελευταίο που γεμίζει από αριστερά προς τα δεξιά.
- $n(h)$: #κορυφών για ύψος h:
  $2^h \le n(h) \le 2^{h+1} - 1$
  - Μέγιστο πλήθος: τέλειο(h) : $2^{h+1} - 1$
  - Ελάχιστο πλήθος: τέλειο($h-1$) + 1 : $(2^h - 1) + 1 = 2^h$.
- $h(n)$: ύψος για n κορυφές:
  $\log_2(n+1) - 1 \le h(n) \le \log_2 n$
- Ύψος : $h(n) = \lfloor \log_2 n \rfloor$
- #φύλλων = $\lceil n / 2 \rceil$



Υλοποίηση

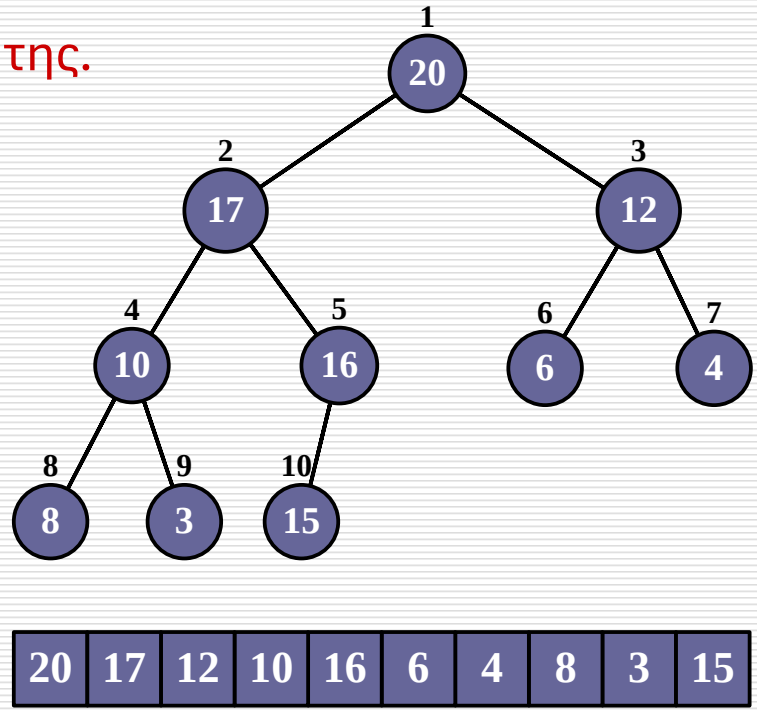
- **Δείκτες** σε παιδιά, πατέρα
  - Structs, δυναμική διαχείριση μνήμης
- **Πλήρη** δυαδικά δέντρα :
  - **Πίνακας** (στατική).
  - Αρίθμηση αριστερά → δεξιά και πάνω → κάτω.
  - **Ρίζα** : **Π[1]**
  - **Π[*i*]** : πατέρας **Π[*i* /2]**
    αριστερό παιδί **Π[2*i*]**
    δεξιό παιδί **Π[2*i*+1]**



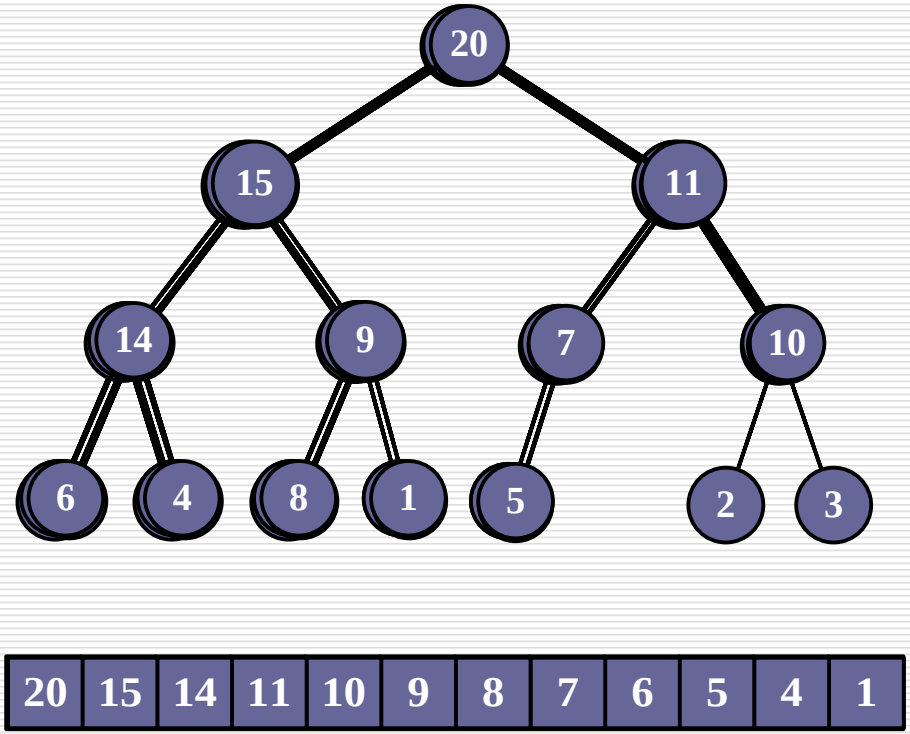
Δυαδικοί Σωροί

Σωρός (heap)

- Δέντρο **μέγιστου** (ελάχιστου):
  - τιμή *κάθε* κορυφής ≥ (≤) τιμές παιδιών της.
- **Σωρός** : πλήρες δυαδικό δέντρο μέγιστου (ελάχιστου).
  - Ύψος $\Theta(\log n)$, #φύλλων = $\lceil n/2 \rceil$
- Πίνακας **A[ ]** ιδιότ. **σωρού** :
  $\forall i$ A[i] ≥ A[2i], A[2i+1].
- **Μέγιστο**: ρίζα
  Ελάχιστο: κάποιο φύλλο



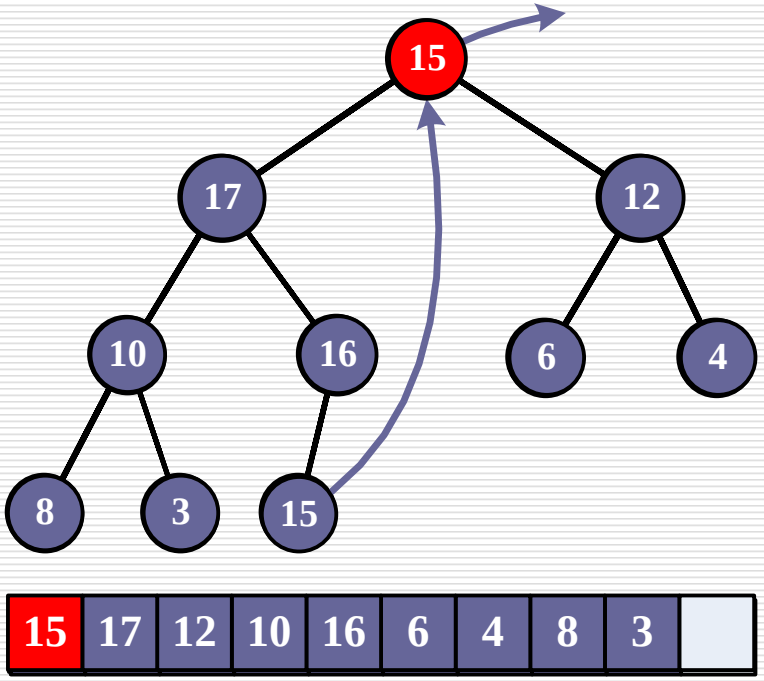
Σωροί και Μη-Σωροί



Σωρός σαν Ουρά Προτεραιότητας

- `int A[n], hs;`
- max() : O(1)
  - ρίζα
  - `int max() { return(A[1]); }`
- deleteMax() :
  - Αντικατάσταση ρίζας με το τελευταίο φύλλο και διαδικασία αποκατάστασης

```
int deleteMax() {
   if (isEmpty()) return(EMPTY);
   max = A[1]; A[1] = A[hs--];
   combine(1);
   return(max);   }
```



Γιατί να μην αντικαταστήσω απλά τη ρίζα με το μέγιστο παιδί της?

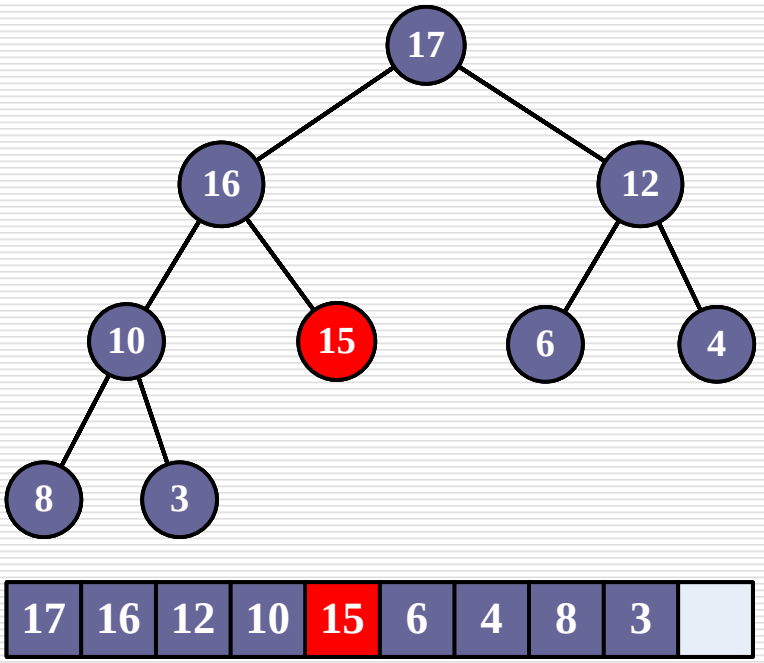
Αποκατάσταση Προς-τα-Κάτω

- combine(*i*) :

  Ενόσω όχι σωρός,

  - A[i] ↔ max{A[2*i*], A[2*i*+1]}
  - συνεχίζω στο αντίστοιχο υποδέντρο.

```
combine(int i) {
  l = 2*i; r = 2*i+1; mp = i;
  if ((l <= hs) && (A[l] > A[mp]))
     mp = l;
  if ((r <= hs) && (A[r] > A[mp]))
     mp = r;
  if (mp != i) {
     swap(A[i], A[mp]);
     combine(mp); } }
```

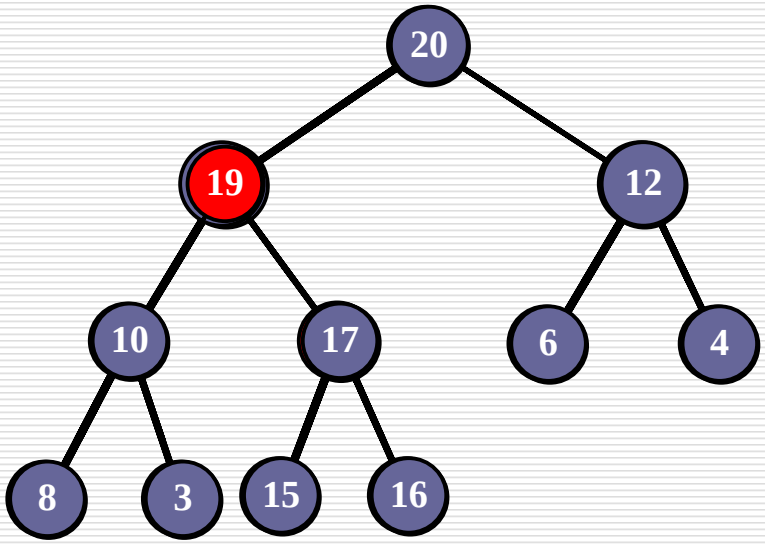


- Χρόνος για deleteMax() : O(ύψος) = O(log n)

Εισαγωγή: Αποκατάσταση Προς-τα-Πάνω

- insert(k) :
  - Εισαγωγή στο τέλος.
  - Ενόσω όχι σωρός, A[i] ↔ A[i / 2]

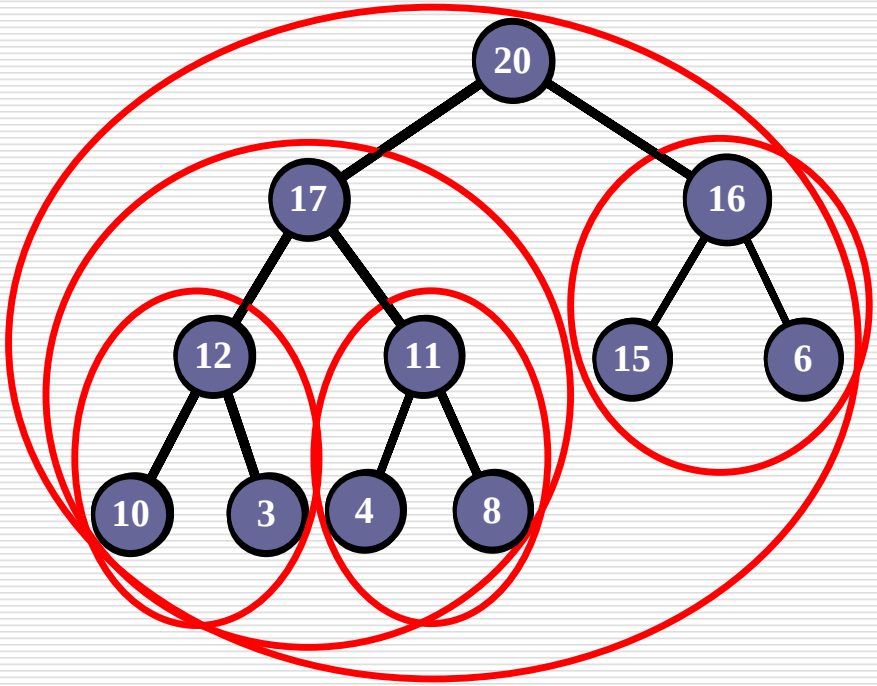
```
insert(int k) {
    A[++hs] = k;
    i = hs; p = i / 2;
    while ((i > 1) && (A[p] < A[i]))
    {    swap(A[p], A[i]);
         i = p; p = i / 2; }  }
```



- Χρόνος για insert() : O(ύψος) = O(log n)

Δημιουργία Σωρού

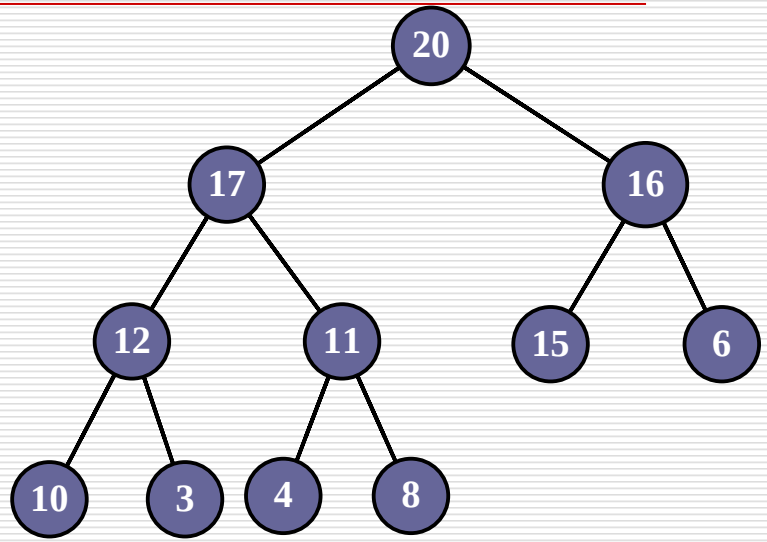
- A[n] → σωρός με *n* εισαγωγές
  [3, 4, 6, 10, 8, 15, 16, 17, 12, 11, 20]
- Χρόνος O(*n*log*n*) .
- **Μπορούμε καλύτερα;**
- **Ιεραρχικά** (bottom-up):
  Υποδέντρα-σωροί ενώνονται σε δέντρο-σωρό.




```
constructHeap(int n) {
   hs = n;
   for (i = n / 2; i > 0; i--)
      combine(i);
}
```

Χρόνος Δημιουργίας

```
for (i = n / 2; i > 0; i--)
    combine(i);
```



- Χρόνος combine(i) = O(ύψος i).

  $n/4$ στοιχεία χρόνος $1\times c$

  $n/8$ στοιχεία χρόνος $2\times c$

  . . . . . .

  $n/2^k$ στοιχεία χρόνος $(k-1)\times c$, $k \le \log_2 n$

- $$\sum_{k=2}^{\log n} \frac{n \cdot k \cdot c}{2^k} = \mathrm{O}\left(n \cdot \sum_{k=2}^{\log n} \frac{k}{2^k}\right) = \mathrm{O}(n), \text{ γιατί } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k} = 2$$

- Χρόνος constructHeap( ) = $O(n)$.

Απόδοση Σωρού

- Χώρος : $\Theta(1)$ (in-place)
- Χρόνοι :
  - createHeap : $\Theta(n)$
  - insert, deleteMax : $O(\log n)$
  - max, size, isEmpty : $\Theta(1)$
- Εξαιρετικά εύκολη υλοποίηση!
- Συμπέρασμα:
  - Γρήγορη και ευρύτατα χρησιμοποιούμενη ουρά προτεραιότητας.

Heap-Sort

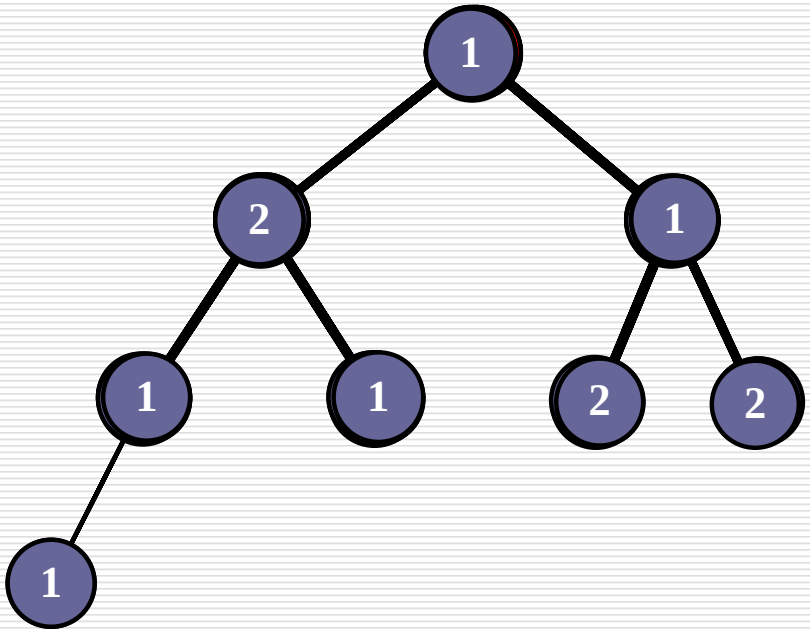
- **Αρχικοποίηση** : δημιουργία σωρού με n στοιχεία.
  - constructHeap() : χρόνος $\Theta(n)$.
- **Εξαγωγή μέγιστου** και τοποθέτηση στο τέλος ($n-1$ φορές).
  - deleteMax() : χρόνος $\Theta(\log n)$.
- **Χρόνος** : $\Theta(n) + (n-1)\,\Theta(\log n) = \Theta(n \log n)$.

```
hs = n;
constructHeap(n);
for (i = n; i > 1; i--) {
   swap(A[1], A[i]); hs--;
   combine(1);  }
```

- Χρονική Πολυπλοκότητα Ταξινόμησης: $O(n \log n)$.

Heap-Sort : Παράδειγμα

```
constructHeap(n);
for (i = n; i > 1; i--)  {
   swap(A[1], A[i]); hs--;
   combine(1);   }
```

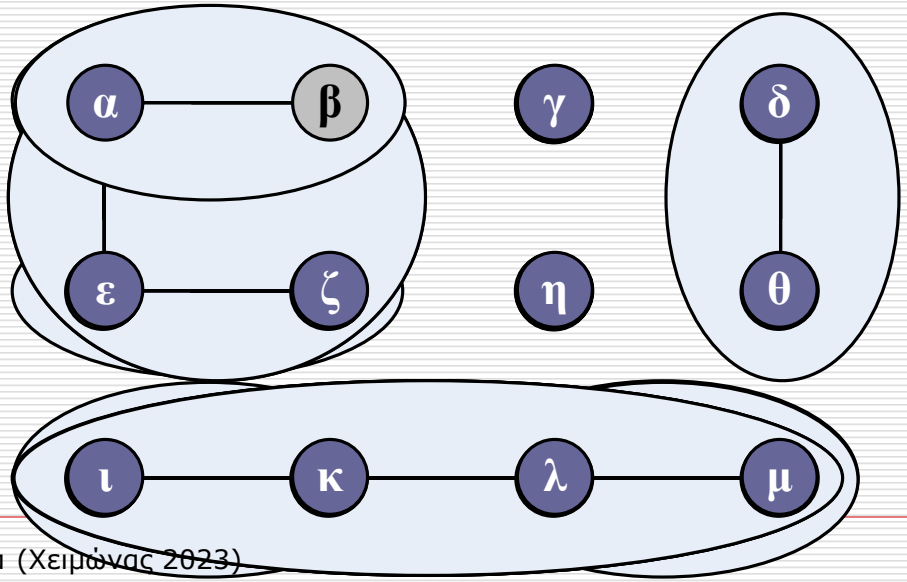


1	2	3	4	5	6	7	8

Union – Find

Διαχείριση Διαμερίσεων Συνόλου

- Στοιχεία σύμπαντος διαμερίζονται σε κλάσεις ισοδυναμίας που μεταβάλλονται δυναμικά με ένωση.
- Λειτουργίες:
  - Εύρεση find(x): βρες αντιπρόσωπο κλάσης όπου ανήκει x.
  - Ένωση union(x, y): ένωση κλάσεων όπου ανήκουν x και y.

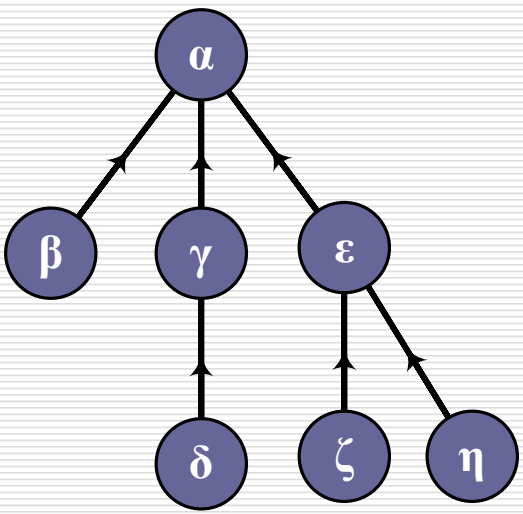


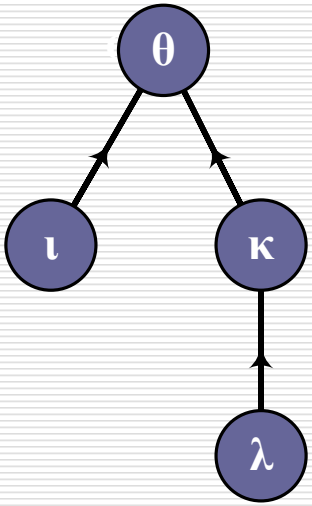
Πρόβλημα Union – Find

- Στοιχεία $U = \{1, 2, \ldots, n\}$ αρχικά σε n κλάσεις.
  - Κάθε κλάση προσδιορίζεται από στοιχείο – αντιπρόσωπο.
- find(x): αντιπρόσωπος κλάσης όπου ανήκει x.
  - Διατηρούμε μοναδικό αντιπρόσωπο για κάθε κλάση.
- union(x, y): αντικατάσταση (αντιπροσώπων) κλάσεων x και y με κλάση που προκύπτει από ένωση.
  - Ελέγχουμε αν x και y ανήκουν σε διαφορετική κλάση.
  - Νέος αντιπρόσωπος από τους αντιπροσώπους κλάσεων x, y
  - Πάντα διαμέριση του U σε κλάσεις.
  - $\leq n - 1$ ενώσεις (μετά από $n - 1$, μία μόνο κλάση).
- Δομή δεδομένων που ελαχιστοποιεί συνολικό χρόνο για ακολουθία m ευρέσεων και $n - 1$ ενώσεων.

Αναπαράσταση Δέντρου & Δάσους

- Πίνακας **γονέων** A[1...n] για δέντρο με ρίζα και n κόμβους:
  - A[i] = j ανν j γονιός του i στο δέντρο.
  - A[ρίζας] = ρίζα (ή -1).
  - Όμοια για δάσος όπου κάθε δέντρο έχει ρίζα.

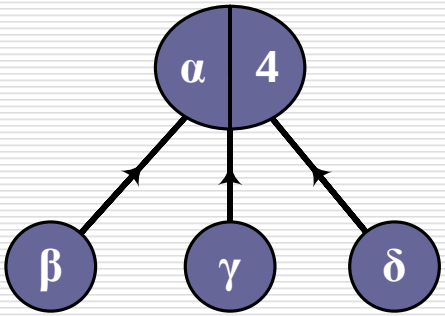


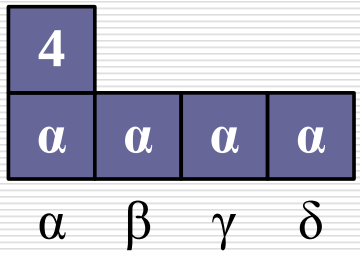


α	α	α	γ	α	ε	ε	θ	θ	θ	κ
α	β	γ	δ	ε	ζ	η	θ	ι	κ	λ

Αναπαράσταση με Δέντρα Βάρους

- Κλάση: **δέντρο** με **ρίζα** το στοιχείο-**αντιπρόσωπο**.
  - Όνομα ρίζας.
  - Μέγεθος κλάσης.
- Στοιχείο: **κόμβος** δέντρου με πεδία
  - Όνομα στοιχείου.
  - Όνομα γονέα: όνομα προηγούμενου στοιχείου στο μονοπάτι προς τη ρίζα-αντιπρόσωπο.
- Αναπαράσταση με πίνακα γονέων:
  - A[x] : γονέας στοιχείου x.
  - Ρίζα – στοιχείο αντιπρόσωπος έχει A[x] = x και επιπλέον πεδίο size.



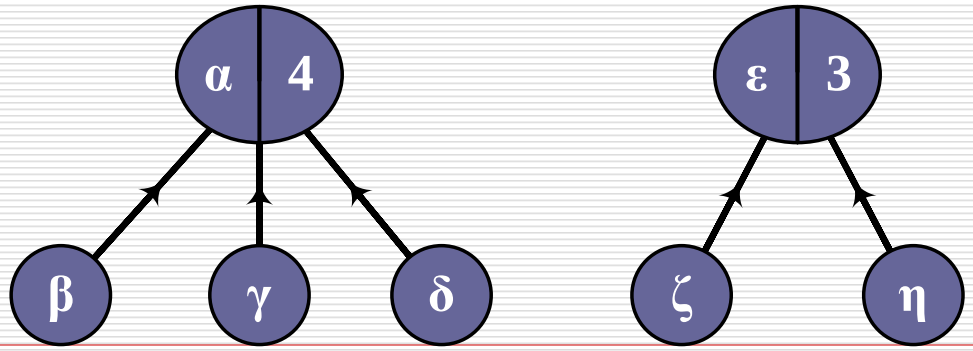


Αναπαράσταση με Δέντρα

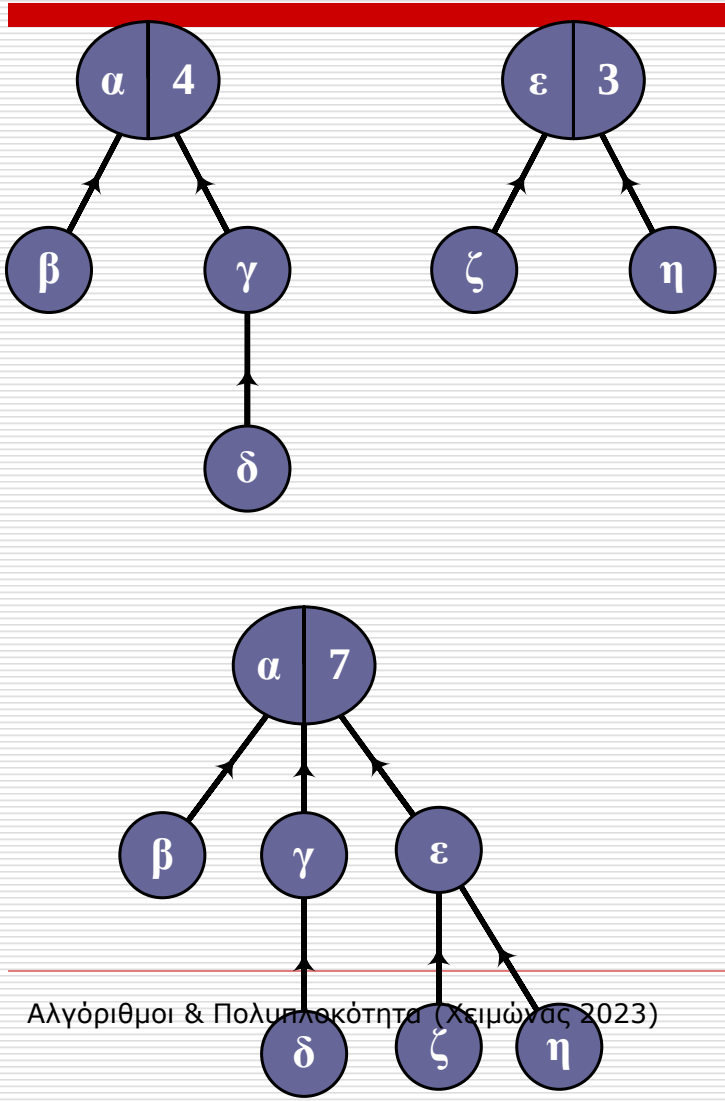
- find(x): ακολουθούμε δείκτες σε γονέα μέχρι τη ρίζα.

```
elem find(elem x) {
    while (x != A[x])
        x = A[x];
return(x); }
```

- union(x, y): x και y αντιπρόσωποι διαφορετικών συνόλων
  - Συνένωση δέντρων: ρίζα 1ου συν. γίνεται γονέας ρίζας 2ου συν.
  - Ενημέρωση μεγέθους



Ένωση




```
unionTree(elem x, elem y) {
    if (x == y) return;
    A[y] = x;
    A[x].size += A[y].size; }
```

Απόδοση

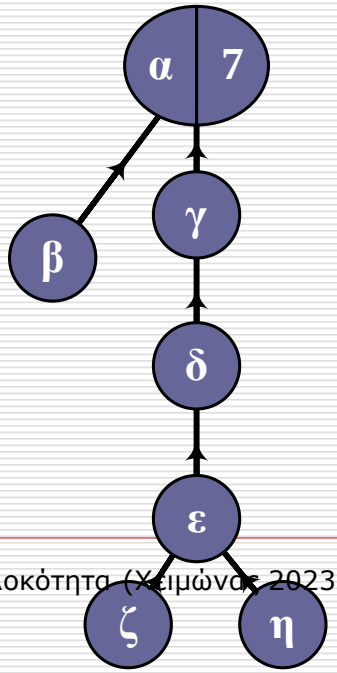
- Χρόνος χ.π. για m finds και n unions: $O(m\,n\,+\,n)$
  - Union : $O(1)$ χρόνος.
  - Find : $O(ύψος\ δεντρου)$
    - Χειρότερη περίπτωση: $ύψος\ =\ n\,-\,1$
      - union(n-1, n), union(n-2, n-1), union(n-3, n-2), union(n-4, n-3), …, union(3, 2), union(1, 2).
      - Δέντρο - λίστα
- Απλή δομή, εύκολη υλοποίηση, αλλά ακριβό find!
- Πώς δεν θα ψηλώνουν τα δέντρα;
- Δύο λύσεις:
  - Union by rank / size
  - Path compression

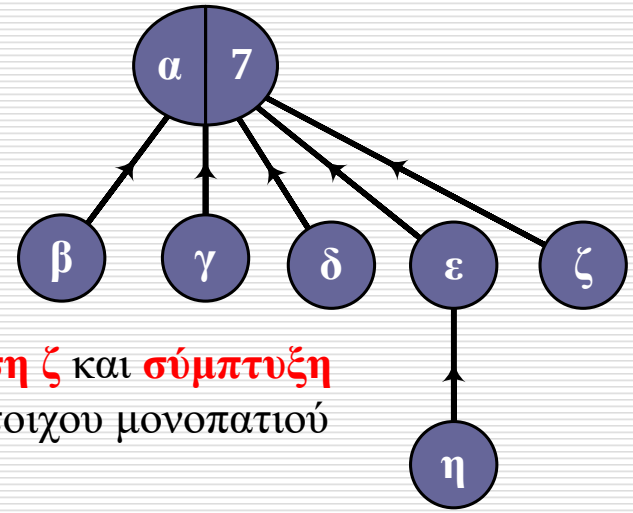
Βεβαρυμένη Ένωση
(Union By Rank / Union By Size)

- «Δεύτερο» σύνολο αυτό με τα λιγότερα στοιχεία.
  - Προκύπτει Λογαριθμικό ύψος δέντρου : $O(\log n)$.
  - Βεβαρυμένη ένωση: δέντρο ύψους h έχει $\geq 2^h$ στοιχεία.
- Απόδειξη με επαγωγή:
  - Ισχύει για $h = 0$ (δέντρο ενός στοιχείου).
  - Ένωση δέντρων x και y με ύψη h_x, h_y, και στοιχεία $s_x \geq s_y$
  - Επαγωγικά, υποθέτουμε $s \geq 2^h$ (για x και y)
    - Ύψος ένωσης = h_x : στοιχεία ένωσης $\geq 2^{\text{ύψος}}$
    - Ύψος ένωσης = $h_y + 1$: στοιχεία ένωσης $\geq 2\, s_y \geq 2^{\text{ύψος}}$
- Χρόνος χ.π. για m finds και n unions: $O(m \log n + n)$
  - Απλή υλοποίηση και αποδεκτή απόδοση.

Σύμπτυξη Μονοπατιών

- Find ακριβό όταν στοιχεία μακριά από ρίζα.
- Σύμπτυξη μονοπατιού κατά την εκτέλεση της find(x):
  - Όλοι οι πρόγονοι του x (και το x) γίνονται παιδιά ρίζας.
  - Δέντρο «κονταίνει» (όχι επιβάρυνση ασυμπτωτικού χρόνου).
  - Στο μέλλον, θα βρίσκουμε σύνολο των στοιχείων γρήγορα.



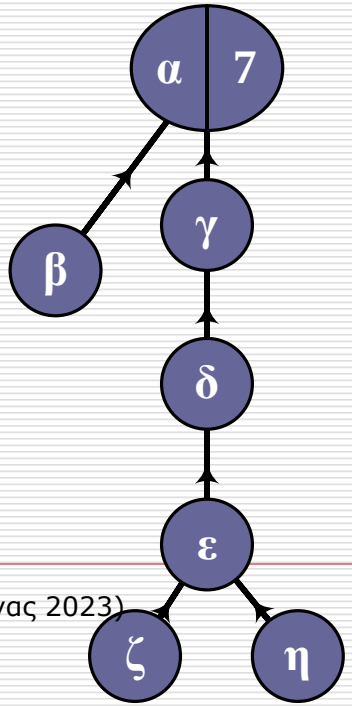


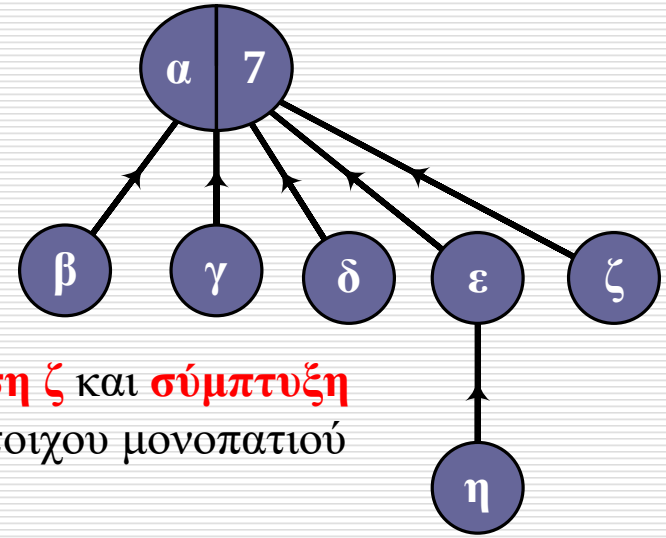
Εύρεση ζ και **σύμπτυξη** αντίστοιχου μονοπατιού

Σύμπτυξη Μονοπατιών

```
elem findTreePathCompression(elem x) {
    if (x != A[x])
        A[x] = findTreePathCompression(A[x]);
    return(A[x]);    }
```

- Ανεβαίνουμε μέχρι ρίζα.
- Κατεβαίνοντας μέχρι *x*, όλοι οι δείκτες γονέων τίθενται να δείχνουν στη ρίζα.





Εύρεση ζ και **σύμπτυξη** αντίστοιχου μονοπατιού

Απόδοση

- Δέντρα, βεβαρυμένη ένωση, και σύμπτυξη μονοπατιών.
- Χρόνος χ.π. για $m \geq n$ finds και n unions: $O(m\ \alpha(n, m))$
  - α(n, m): αντίστροφη συνάρτηση Ackermann.
  - Μεγαλώνει εξαιρετικά αργά!
  - Στην πράξη, μπορεί να θεωρηθεί σταθερά
  - Αρκετά σύνθετη ανάλυση στο CLRS v4 (19.4)
- Απλή δομή, εύκολη υλοποίηση, και ουσιαστικά γραμμικός χρόνος!