



Ασκηση 1: Μετακινήσεις

Στη μακρινή Χώρα των Αλγορίθμων υπάρχουν N πόλεις που συνδέονται μεταξύ τους με M λεωφόρους διπλής κατεύθυνσης. Κάθε λεωφόρος συνδέει δύο πόλεις. Μάλιστα η μετακίνηση στις λεωφόρους είναι τόσο γρήγορη που μπορούμε να θεωρήσουμε ότι γίνεται στιγμιαία! Έτσι είναι συνηθισμένο οι κάτοικοι να διαμένουν σε διαφορετική πόλη από αυτή στην οποία εργάζονται.

Οι λεωφόροι είναι παλιές και χρειάζονται καθημερινή συντήρηση, με αποτέλεσμα να κλείνουν από μία χρονική στιγμή και μετά. Ξέρουμε ότι η i -οστή λεωφόρος κλείνει για συντήρηση τη χρονική στιγμή $t_i > 0$, και συνεπώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί για μετακινήσεις μόνο κατά τις χρονικές στιγμές $t \in [0, t_i]$. Βέβαια οι λεωφόροι έχουν σχεδιαστεί ώστε τη χρονική στιγμή 0, όλοι να μπορούν να μεταβούν στην εργασία τους.

Σας έχει ανατεθεί να βελτιώσετε τις συγκοινωνίες της χώρας. Το χρήματα που έχετε στη διάθεσή σας επαρκούν για K οδικά έργα. Κάθε οδικό έργο περιλαμβάνει είτε την πλήρη ανακατασκευή μιας υπάρχουσας λεωφόρου είτε τη δημιουργία μιας νέας στη θέση της. Μετά από αυτό, η αντίστοιχη λεωφόρος δεν θα χρειάζεται πλέον συντήρηση, και θα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για μετακινήσεις οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Στόχος αυτών των έργων είναι να μεγιστοποιήσουμε την τελευταία χρονική στιγμή T^* όπου εξασφαλίζεται ότι όλοι μπορούν να μεταβούν στην εργασία τους (ή ισοδύναμα, εξασφαλίζεται ότι η συνδεσιμότητα της χώρας είναι αντίστοιχη με τη συνδεσιμότητα κατά τη χρονική στιγμή 0). Αυτό είναι σημαντικό γιατί οι κάτοικοι δεν θα χρειάζεται να ξεκινήσουν για την εργασία τους πριν τη χρονική στιγμή T^* , και έτσι θα έχουν περισσότερο χρόνο για να ξεκουραστούν. Πρέπει λοιπόν να υπολογίσετε τη μέγιστη χρονική στιγμή T^* που μπορεί να επιτευχθεί με K οδικά έργα.

Σημείωση: Προσέξτε ότι δεν γνωρίζουμε ποιος δουλεύει πού. Γνωρίζουμε μόνο ότι τη χρονική στιγμή 0, ο καθένας μπορεί να μεταβεί από την κατοικία στην εργασία του. Αυτό δεν σημαίνει απαραίτητα ότι τη χρονική στιγμή 0 μπορούμε να μεταβούμε από κάθε πόλη σε οποιαδήποτε άλλη!

Λεδομένα Εισόδου: Το πρόγραμμά σας θα διαβάζει από το standard input τρεις θετικούς ακεραίους N , M , και K , που αντιστοιχούν στο πλήθος των πόλεων, στο πλήθος των λεωφόρων, και στο πλήθος των οδικών έργων. Σε κάθε μία από τις επόμενες M γραμμές, θα δίνονται τρεις θετικοί ακέραιοι a_i , b_i , και t_i που δηλώνουν ότι υπάρχει μια λεωφόρος που συνδέει τις πόλεις a_i και b_i και κλείνει για συντήρηση τη χρονική στιγμή t_i . Μεταξύ κάθε ζεύγους πόλεων, θα υπάρχει το πολύ μία λεωφόρος που τις συνδέει.

Λεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμα σας πρέπει να τυπώνει στο standard output (στην πρώτη γραμμή) έναν θετικό ακέραιο, τη μέγιστη χρονική στιγμή T^* όπου εξασφαλίζεται ότι όλοι μπορούν να μεταβούν στην εργασία τους, αν κάνουμε τα οδικά έργα με βέλτιστο τρόπο. Αν τα οδικά έργα μπορούν να εξασφαλίσουν απεριόριστο χρόνο ξεκούρασης για τους κατοίκους, το πρόγραμμα πρέπει να τυπώνει μόνο μία γραμμή με τη λέξη “infinity”.

Περιορισμοί:

$$1 \leq N, M, K \leq 3 \cdot 10^5$$

$$1 \leq t_i \leq 2 \cdot 10^9$$

Όριο χρόνου εκτέλεσης: 1 sec.

Όριο μνήμης: 64 MB.

Παράδειγμα Εισόδου:

4 5 1

4 2 4

3 4 10

4 1 5

2 1 3

3 2 8

Παράδειγμα Εξόδου:

8

Άσκηση 2: Κάρτες Απεριορίστων Διαδρομών

Σχεδιάζετε την αγορά ενός συνόλου ετήσιων καρτών ελάχιστου συνολικού κόστους που επιτρέπουν απεριόριστες μετακινήσεις μεταξύ της πόλης s , όπου είναι το πατρικό σας, και της πόλης t , όπου σπουδάζετε.

Η Χώρα των Αλγορίθμων έχει πυκνό σιδηροδρομικό δίκτυο. Έτσι υπάρχουν πολλά διαφορετικά σύνολα ετήσιων καρτών με ελάχιστο συνολικό κόστος που προσφέρουν απεριόριστες μετακινήσεις μεταξύ των πόλεων s και t . Αποφασίζετε λοιπόν να αγοράσετε εκείνο το σύνολο καρτών που (εκτός από το συνολικό κόστος αγοράς για την κάλυψη της διαδρομής μεταξύ των πόλεων s και t) ελαχιστοποιεί και το επιπλέον κόστος για την κάλυψη, με αγορά ετήσιων καρτών απεριορίστων μετακινήσεων, της διαδρομής μεταξύ της πόλης a , όπου βρίσκεται η έδρα της αγαπημένης σας ομάδας, και της πόλης b , όπου πηγαίνετε συχνά για πεζοπορία και σκι. Με βάση τον κανονισμό της Εταιρείας Σιδηροδρόμων, για την μετακίνηση σε μια διαδρομή μεταξύ των πόλεων a και b χρειάζεται να αγοράσετε κάρτες απεριορίστων διαδρομών μόνο για τις σιδηροδρομικές συνδέσεις που δεν διαθέτετε ήδη κάρτα απεριορίστων διαδρομών.

Το μέγεθος και η πυκνότητα του σιδηροδρομικού δικτύου καθιστούν επίπονο τον υπολογισμό της πιο ενδελεχόμενης λύσης με “χαρτί και μολύβι”. Αποφασίζετε λοιπόν να γράψετε ένα πρόγραμμα για αυτόν τον σκοπό.

Δεδομένα Εισόδου: Το σιδηροδρομικό δίκτυο αναπαρίσταται ως ένα απλό, συνεκτικό, μη κατευθυνόμενο γράφημα με N κορυφές, M ακμές και θετικά ακέραια κόστη στις ακμές. Το πρόγραμμά σας θα διαβάσει από την πρώτη γραμμή του standard input δύο θετικούς ακεραίους N και M , που αντιστοιχούν στο πλήθος των πόλεων και στο πλήθος των συνδέσεων. Στη δεύτερη γραμμή, θα δίνονται δύο θετικοί ακέραιοι s και t , που δηλώνουν το ζευγάρι των πόλεων για τις οποίες αγοράζετε αρχικά ένα σύνολο καρτών ελάχιστου συνολικού κόστους που καλύπτουν τη μετακίνηση μεταξύ τους. Στην τρίτη γραμμή, θα δίνονται δύο θετικοί ακέραιοι a και b , που δηλώνουν το δεύτερο ζευγάρι πόλεων που θέλετε να καλύψετε με ένα σύνολο καρτών ελάχιστου συνολικού κόστους, δεδομένου ότι έχει προηγηθεί η αγορά ενός κατάλληλα επιλεγμένου συνόλου καρτών ελάχιστου συνολικού για την μετακίνηση μεταξύ των πόλεων s και t . Σε κάθε μία από τις επόμενες M γραμμές, θα δίνονται τρεις θετικοί ακέραιοι $u(i)$, $v(i)$ και $c(i)$ που δηλώνουν ότι υπάρχει αμφίδρομη σιδηροδρομική σύνδεση μεταξύ των πόλεων $u(i)$ και $v(i)$ και ότι το κόστος της κάρτας απεριορίστων διαδρομών μεταξύ των $u(i)$ και $v(i)$ είναι $c(i)$.

Δεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμά σας πρέπει να τυπώνει στο standard output (στην πρώτη γραμμή) έναν θετικό ακέραιο, που αντιστοιχεί στο ελάχιστο συνολικό κόστος¹ για να καλύψετε με κάρτες απεριορίστων διαδρομών την μετακίνηση μεταξύ των πόλεων a και b , δεδομένου ότι έχει προηγηθεί η αγορά ενός βέλτιστα επιλεγμένου συνόλου καρτών ελάχιστου συνολικού κόστους για την μετακίνηση μεταξύ των πόλεων s και t . Ενδέχεται το τελικό αποτέλεσμα, καθώς και κάποια από τα ενδιάμεσα αποτελέσματα που απαιτούνται για τον υπολογισμό του, να υπερβαίνουν το 2^{32} .

Περιορισμοί:

$$2 \leq N \leq 10^5$$

$$1 \leq M \leq 2 \cdot 10^5$$

$$1 \leq c(i) \leq 10^9$$

$$s \neq t, a \neq b \text{ και } (s \neq a \text{ ή } t \neq b)$$

Όριο χρόνου εκτέλεσης: 2 sec.

Όριο μνήμης: 64 MB.

Η συνολική βαθμολογία θα είναι 120% (20% bonus).

Για το 50% της βαθμολογίας, θα ισχύει ότι $s = a$ ή ότι υπάρχει μοναδικό συντομότερο $s - t$ μονοπάτι.

Για ένα επιπλέον 30% της βαθμολογίας, θα ισχύει ότι $N \leq 300$.

Για το ανώτερο 40%, δεν θα υπάρχουν άλλοι περιορισμοί.

Παράδειγμα Εισόδου:

8 8

5 7

6 8

1 2 2

2 3 3

3 4 4

1 4 1

1 5 5

2 6 6

3 7 7

4 8 8

Παράδειγμα Εξόδου:

15

¹ **Εξήγηση παραδείγματος:** Αν αγοράσετε κάρτες για το συντομότερο $5 - 7$ μονοπάτι $(5, 1, 4, 3, 7)$, το ελάχιστο επιπλέον κόστος για να καλύψετε τη διαδρομή $6 - 8$ είναι $6 + 2 + 0 + 8 = 16$. Η βέλτιστη λύση είναι να αγοράσετε κάρτες για το συντομότερο $5 - 7$ μονοπάτι $(5, 1, 2, 3, 7)$, οπότε το ελάχιστο επιπλέον κόστος για να καλύψετε τη διαδρομή $6 - 8$ είναι $6 + 0 + 1 + 8 = 15$.