



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών

Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Διδάσκοντες: Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου

2η Σειρά Προγραμματιστικών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 8/1/2026

Άσκηση 1: Δώρο Χριστουγέννων

Η κυβέρνηση της επαρχίας του Δυναμικού Προγραμματισμού, στη χώρα των Αλγορίθμων, θέλει να πείσει τους πάντες ότι το Δώρο των Χριστουγέννων, που λαμβάνουν ως επιμίσθιο οι εργαζόμενοι για τις γιορτές, αυξάνεται σχεδόν κάθε χρόνο τα τελευταία N χρόνια. Η στατιστική υπηρεσία συνέλεξε τα δεδομένα και άρχισε να τα επεξεργάζεται. Εκτίμησαν το μέσο ύψος p_i του Δώρου, για κάθε έτος $i = 1, \dots, N$, και υπολόγισαν τη Μέγιστη Αύξουσα Υπακολουθία της ακολουθίας $(p_1, p_2, \dots, p_N)$.

Δυστυχώς, τα αποτελέσματα δεν ήταν ακριβώς αυτά που περίμεναν. Σας ανέθεσαν λοιπόν να “πειραματιστείτε” με τα δεδομένα, με στόχο να υπολογίσετε μια ελαφρώς τροποποιημένη ακολουθία, που όμως θα περιέχει σημαντικά μεγαλύτερη Μέγιστη Αύξουσα Υπακολουθία. Θεωρούν ότι αν για το μέσο ύψος του Δώρου των Χριστουγέννων διαμορφωθεί μια ακολουθία $(q_1, q_2, \dots, q_N)$ που προκύπτει από την αρχική $(p_1, p_2, \dots, p_N)$ προσθέτοντας την ίδια τιμή x , $-K \leq x \leq K$, στις τιμές ενός διαστήματος $(p_l, \dots, p_r)$ της αρχικής, η τροποποίηση δύσκολα θα γίνει αντιληπτή και η κυβέρνηση δεν θα αναγκαστεί να αναιρέσει τον ισχυρισμό της.

Έχετε λοιπόν στη διάθεσή σας την πραγματική ακολουθία $(p_1, p_2, \dots, p_N)$ του Δώρου των Χριστουγέννων για τα τελευταία N χρόνια και έναν μη αρνητικό ακέραιο K . Ζητείται να υπολογίσετε τη μέγιστη δυνατή Μέγιστη Αύξουσα Υπακολουθία που μπορεί να επιτευχθεί από μια τροποποιημένη ακολουθία $(q_1, q_2, \dots, q_N)$, για την οποία ισχύει ότι υπάρχει ένα διάστημα δεικτών $[l, r]$ και μια τιμή x , $-K \leq x \leq K$, έτσι ώστε $q_i = p_i + x$, για κάθε έτος i στο διάστημα $[l, r]$, και $q_i = p_i$ για κάθε έτος i εκτός του διαστήματος $[l, r]$.

Δεδομένα Εισόδου: Η πρώτη γραμμή της εισόδου θα αποτελείται από δύο ακέραιους N και K που εκφράζουν το πλήθος των ετών (το N) και τη μέγιστη δυνατή απόκλιση από τις πραγματικές τιμές (το K). Προσέξτε ότι το K μπορεί να είναι 0. Η δεύτερη γραμμή της εισόδου θα περιέχει N μη αρνητικούς ακέραιους $p_1, p_2, \dots, p_N$ που εκφράζουν το μέσο ύψος του Δώρου των Χριστουγέννων για καθένα από τα τελευταία N χρόνια.

Δεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμά σας πρέπει να τυπώνει έναν μη αρνητικό ακέραιο που αντιστοιχεί στο μέγιστο μήκος της Μέγιστης Αύξουσας Υπακολουθίας που μπορεί να επιτευχθεί από μια τροποποιημένη ακολουθία $(q_1, q_2, \dots, q_N)$, για την οποία ισχύει ότι υπάρχει ένα διάστημα δεικτών $[l, r]$ και μια τιμή x , $-K \leq x \leq K$, έτσι ώστε $q_i = p_i + x$, για κάθε $i \in [l, r]$, και $q_i = p_i$ για κάθε $i \notin [l, r]$.

Περιορισμοί:

$$3 \leq N \leq 2 \cdot 10^5$$

$$0 \leq K \leq 10^9$$

$$0 \leq p_i \leq 10^9$$

Όριο χρόνου εκτέλεσης: 1 sec.

Όριο μνήμης: 64 MB.

Παράδειγμα Εισόδου:

8 10

7 3 5 12 2 7 3 4

Παράδειγμα Εξόδου:

5

Άσκηση 2: Χριστουγεννιάτικος Φωτισμός

Η χώρα των Αλγορίθμων προετοιμάζεται εντατικά για τον εορτασμό των Χριστουγέννων και της Νέας Χρονιάς. Όλες οι πόλεις θα φωταγωγηθούν, ώστε οι κάτοικοι να μουν στο πνεύμα των εορτών. Η οικολογική συνείδηση των κατοίκων, αλλά και κάποιες μικρές οικονομικές δυσκολίες, επιβάλουν ο φωτισμός να γίνει φέτος με τον πλέον οικονομικό (και οικολογικό) τρόπο. Με κάποια μικρή καθυστέρηση, είναι αλήθεια, ο Πρόεδρος της χώρας των Αλγορίθμων ζήτησε τη βοήθειά σας για αυτό τον σκοπό.

Είναι γνωστό ότι στη χώρα των Αλγορίθμων, το οδικό δίκτυο των πόλεων έχει δενδρική δομή. Μια τυπική πόλη έχει N διασταυρώσεις και $N - 1$ δρόμους που προσπίπτουν σε αυτές. Οι μελέτες σας έδειξαν ότι η εγκατάσταση φωτιστικού σώματος σε μία διασταύρωση επαρκεί για τον φωτισμό όλων των δρόμων που προσπίπτουν σε αυτή. Για τις μεγάλες πόλεις, όπου θα φωταγωγηθούν όλοι δρόμοι, η αποστολή σας είναι εύκολη. Δεδομένου του οδικού δικτύου μιας πόλης (που, όπως είπαμε, έχει δενδρική δομή), πρέπει να υπολογίσετε το ελάχιστο πλήθος φωτιστικών σωμάτων που χρειάζεται να τοποθετηθούν στις διασταυρώσεις της πόλης, ώστε όλοι οι δρόμοι να φωταγωγηθούν.

Ο πραγματικός πονοκέφαλος είναι οι μικρές πόλεις! Το Δημοτικό Συμβούλιο κάθε μικρής πόλης έχει αποφασίσει το ελάχιστο πλήθος δρόμων K που πρέπει να φωταγωγηθούν. Για λόγους οικονομίας, το K μπορεί να είναι μικρότερο του $N - 1$. Πρέπει λοιπόν, και για τις μικρές πόλεις, να υπολογίσετε το ελάχιστο πλήθος φωτιστικών σωμάτων που χρειάζεται να τοποθετηθούν στις διασταυρώσεις, ώστε τουλάχιστον K δρόμοι να φωταγωγηθούν.

Δεδομένα Εισόδου: Το πρόγραμμα θα διαβάζει από το standard input, στην πρώτη γραμμή, δύο θετικούς ακέραιους N και K , το συνολικό πλήθος των διασταυρώσεων της πόλης και το ελάχιστο πλήθος των δρόμων που πρέπει να φωταγωγηθούν. Σε καθεμία από τις επόμενες $N - 1$ γραμμές, θα υπάρχουν δύο θετικοί φυσικοί αριθμοί v_i και u_i (χωρισμένοι με κενό, θα είναι $1 \leq v_i < u_i \leq N$) που δηλώνουν ότι ο i -οστός δρόμος της πόλης προσπίπτει στις διασταυρώσεις v_i και u_i .

Δεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμά σας πρέπει να τυπώνει στο standard output (στην πρώτη γραμμή) τον ελάχιστο πλήθος διασταυρώσεων που πρέπει να καλυφθούν με φωτιστικό σώμα ώστε τουλάχιστον K δρόμοι της πόλης να φωταγωγηθούν.

Περιορισμοί:

Παράδειγμα Εισόδου:

Παράδειγμα Εξόδου:

$$3 \leq N \leq 2 \cdot 10^5$$

$$9 \ 6$$

$$2$$

$$2 \leq K \leq N - 1$$

$$1 \ 2$$

$$1 \leq v_i < u_i \leq N$$

$$1 \ 3$$

Όριο χρόνου εκτέλεσης: 2 sec.

$$1 \ 4$$

Όριο μνήμης: 128 MB.

$$2 \ 5$$

$$2 \ 6$$

$$3 \ 7$$

$$4 \ 8$$

$$4 \ 9$$

Η είσοδος θα αντιστοιχεί πάντα σε ένα δέντρο με N κορυφές και $N - 1$ ακμές. Για το 60% της βαθμολογίας, θα είναι $3 \leq N \leq 2 \cdot 10^5$ και $K = N - 1$. Για το υπόλοιπο 60% της βαθμολογίας (θα υπάρχει bonus 20%), θα είναι $3 \leq N \leq 4 \cdot 10^3$ και $2 \leq K < N - 2$.