Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών

Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Διδάσκοντες: Άρ. Παγουρτζής, Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου

2η Σειρά Προγραμματιστικών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 9/1/2025

Άσκηση 1: Πρωτοχρονιάτικο Ρεβεγιόν

Είστε μέλος της οργανωτικής επιτροπής για το Πρωτοχρονιάτικο Ρεβεγιόν στο Προεδρικό Μέγαρο της Χώρας των Αλγορίθμων, και έχετε αναλάβει την κατανομή των προσκεκλημένων στα τραπέζια. Το πρωτόκολλο είναι αυστηρό: οι N καλεσμένοι εισέρχονται στην μεγάλη τραπεζαρία ένας-ένας, με τη σειρά που έχουν λάβει τις προσκλήσεις τους. Κάθε τραπέζι χωράει μέχρι K καλεσμένους το πολύ, ενώ δεν υπάρχει περιορισμός στο πλήθος των τραπεζιών που μπορείτε να χρησιμοποιήσετε. Κάθε νεοεισερχόμενος είτε ακολουθεί τον προηγούμενο καλεσμένο στο τραπέζι του (έστω t, αυτό μόνο αν υπάρχουν διαθέσιμες θέσεις στο t) είτε είναι ο πρώτος που κάθεται σε ένα άδειο τραπέζι (έστω $t+1$). Στη δεύτερη περίπτωση (η οποία μπορεί να συμβεί ακόμη και αν το τραπέζι t δεν είναι γεμάτο), θεωρούμε ότι το τραπέζι t έχει "κλείσει" οριστικά, και οι επόμενοι καλεσμένοι δεν μπορούν να καθίσουν σε αυτό (όπως και σε όλα τα προηγούμενα).

Γνωρίζετε καλά ότι η χαρά, η αγάπη και το χαμόγελο είναι μεταδοτικά! Έτσι ο βαθμός ευθυμίας των καλεσμένων που κάθονται στο ίδιο τραπέζι είναι ίσος με τον μέγιστο βαθμό ευθυμίας ενός από αυτούς. Έχετε κάνει την έρευνά σας και γνωρίζετε τον βαθμό ευθυμίας $h(1), h(2), \ldots, h(N)$ των καλεσμένων στο Πρωτοχρονιάτικο Ρεβεγιόν. Αν τώρα οι καλεσμένοι $i, \ldots, j$, για κάποια $i \leq j$ με $j - i + 1 \leq K$, καθίσουν στο ίδιο τραπέζι, ο συνολικός βαθμός ευθυμίας του τραπεζιού είναι ίσος με $(j - i + 1) \cdot \max_{i \leq \ell \leq j}\{h(\ell)\}$.

Επειδή η Πρωτοχρονιά πλησιάζει και οι καλεσμένοι είναι πολλοί, χρειάζεται να γράψετε ένα πρόγραμμα που υπολογίζει πως πρέπει να καθίσουν οι καλεσμένοι ώστε να μεγιστοποιηθεί το άθροισμα του συνολικού βαθμού ευθυμίας για όλα τα τραπέζια.

Δεδομένα Εισόδου: Αρχικά, το πρόγραμμα θα διαβάζει από το standard input δύο θετικούς ακέραιους αριθμούς που αντιστοιχούν στο πλήθος των καλεσμένων N και στη χωρητικότητα K των τραπεζιών. Στην επόμενη γραμμή, θα υπάρχουν N φυσικοί αριθμοί (χωρισμένοι με κενό) που αντιστοιχούν στον βαθμό ευθυμίας $h(1), h(2), \ldots, h(N)$ των καλεσμένων στο Πρωτοχρονιάτικο Ρεβεγιόν.

Δεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμα πρέπει να τυπώνει στο standard output (στην πρώτη γραμμή) το μέγιστο δυνατό άθροισμα του συνολικού βαθμού ευθυμίας για όλα τα τραπέζια[1].

Περιορισμοί:

$3 \leq N \leq 5 \cdot 10^4$
$2 \leq K \leq 10^3$
$0 \leq h(i) \leq 10^5$
$N \cdot \max_{1 \leq i \leq N}\{h(i)\} \leq 10^9$
Όριο χρόνου εκτέλεσης: 1 sec.
Όριο μνήμης: 64 MB.

Παραδείγματα Εισόδου:	**Παράδειγμα Εξόδου:**
`7 3` `9 15 8 9 4 7 10`	`84`
`10 4` `4 14 22 6 19 14 18 20 8 16`	`206`
`10 3` `4 14 22 6 19 14 18 20 8 16`	`201`

[1] **Εξήγηση πρώτου παραδείγματος:** Η βέλτιστη κατανομή είναι να έχουμε τους πρώτους 3 καλεσμένους στο τραπέζι 1, τον τέταρτο καλεσμένο μόνο του στο τραπέζι 2, και τους τελευταίους 3 καλεσμένους στο τραπέζι 3. Οι συνολικοί βαθμοί ευθυμίας των τριών τραπεζιών είναι $3 \times 15 + 9 + 3 \times 10 = 84$.

Άσκηση 2: Χημικά Απόβλητα

Σε ένα χημικό εργαστήριο, υπάρχουν N διαφορετικές ουσίες που αποτελούν επικίνδυνα απόβλητα πειραμάτων και πρέπει να τοποθετηθούν σε K μεταλλικές φιάλες για να μεταφερθούν με ασφάλεια σε ειδικό χώρο εκτός του εργαστηρίου. Οι ουσίες είναι αριθμημένες από το 1 μέχρι το N και, για λόγους ασφαλείας, πρέπει να τοποθετηθούν στις φιάλες με αυτή τη σειρά και με τη συνολική ποσότητα κάθε ουσίας να βρίσκεται σε μία μόνο φιάλη. Οι φιάλες είναι αρκετά μεγάλες και η συνολική ποσότητα κάθε ουσίας αρκετά μικρή ώστε να μην υπάρχουν προβλήματα χωρητικότητας (δηλ. ακόμη και όλες οι ουσίες θα μπορούσαν να χωρέσουν στην ίδια φιάλη). Υπάρχει όμως ο κίνδυνος χημικής αντίδρασης μεταξύ των ουσιών στην ίδια φιάλη, οπότε και εκλύονται σημαντικά ποσά ενέργειας. Συγκεκριμένα, για κάθε ζευγάρι ουσιών i και j που βρίσκονται στην ίδια φιάλη, η χημική αντίδραση μεταξύ τους παράγει ενέργεια ίση με $A[i, j]$ μονάδες.

Με βάση τα παραπάνω, η διαδικασία που ακολουθούν οι υπεύθυνοι του εργαστηρίου για τη συσκευασία των ουσιών είναι η εξής: Οι πρώτες t_1 ουσίες στη σειρά τοποθετούνται στην πρώτη φιάλη, οι επόμενες t_2 ουσίες στη δεύτερη φιάλη, κ.ο.κ., μέχρι να τοποθετηθούν όλες οι ουσίες στις K φιάλες. Έτσι, η ενέργεια που μπορεί να παραχθεί από τη χημική αντίδραση των ουσιών στην πρώτη φιάλη είναι $\sum_{1\le i<j\le t_1} A[i, j]$, για την δεύτερη φιάλη είναι $\sum_{t_1+1\le i<j\le t_2} A[i, j]$, κ.ο.κ. Η συνολική ενέργεια που θα μπορούσε να παραχθεί από την χημική αντίδραση των ουσιών σε όλες τις K φιάλες είναι το άθροισμα των παραπάνω ποσοτήτων. Για λόγους ασφαλείας κατά τη μεταφορά των ουσιών, οι υπεύθυνοι του εργαστηρίου θέλουν να προσδιορίσουν τους δείκτες $t_1, t_2, \ldots, t_{K-1}$ των ουσιών όπου θα γίνεται αλλαγή φιάλης, ώστε η συνολική ενέργεια που μπορεί να εκλυθεί από όλες τις φιάλες να είναι η ελάχιστη δυνατή. Χρειάζεται να γράψετε ένα πρόγραμμα για αυτόν τον σκοπό.

Δεδομένα Εισόδου: Αρχικά, το πρόγραμμα θα διαβάζει από το standard input δύο θετικούς ακέραιους N και K που αντιπροσωπεύουν το πλήθος των ουσιών και το πλήθος των φιαλών. Στη συνέχεια, το πρόγραμμα θα διαβάζει $N-1$ γραμμές, η i-οστή από τις οποίες θα περιέχει $N-i$ ακεραίους χωρισμένους με κενά. Ο j-οστός ακέραιος της i-οστής γραμμής αντιστοιχεί στην ενέργεια $A[i, j+i]$ (ο πίνακας A είναι συμμετρικός ως προς τη διαγώνιο, δηλ. $A[i, j] = A[j, i]$ για κάθε $1 \le i < j \le N$, και η διαγώνιος έχει μηδενικά στοιχεία, δηλ. $A[i, i] = 0$ για κάθε $1 \le i \le N$).

Δεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμα πρέπει να τυπώνει στο standard output (στην πρώτη γραμμή) έναν ακέραιο που αντιστοιχεί στο ελάχιστο ποσό ενέργειας που μπορεί να εκλυθεί[2].

Περιορισμοί:

$0 \le A[i, j] \le 99$
$1 \le K \le 500$
$K \le N \le 1500$
Όριο χρόνου εκτέλεσης: 1 sec.
Όριο μνήμης: 64 MB.

Παράδειγμα Εισόδου:

```
3 2
3 2
4
```

Παράδειγμα Εξόδου:

```
3
```

Bonus: Θα υπάρχουν αρχεία εισόδου με $1 \le K \le 700$ και $K \le N \le 2500$.

[2] **Εξήγηση παραδείγματος:** Αν βάλουμε τις ουσίες 1 και 2 στην πρώτη φιάλη και την ουσία 3 στη δεύτερη φιάλη, τότε μπορεί να εκλυθεί ενέργεια ίση με $A[1, 2] = 3$. Από την άλλη, αν βάλουμε την ουσία 1 στην πρώτη φιάλη και τις ουσίες 2 και 3 στη δεύτερη φιάλη, τότε μπορεί να εκλυθεί ενέργεια ίση με $A[2, 3] = 4$. Συνεπώς η πρώτη είναι η καλύτερη επιλογή και η απάντηση είναι 3.