Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών

Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Διδάσκοντες: Άρ. Παγουρτζής, Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου

1η Σειρά Προγραμματιστικών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 25/11/2024

Άσκηση 1: Υπαίθρια Αγορά

Εν όψει των εορτών, σχεδιάζετε την υπαίθρια Χριστουγεννιάτικη αγορά που θα στηθεί στον κεντρικό πεζόδρομο, στην πρωτεύουσα της χώρας των Αλγορίθμων. Πρόκειται να εγκατασταθούν N υπαίθρια καταστήματα κατά μήκος του πεζόδρομου και έχουν ήδη εντοπισθεί M μη-επικαλυπτόμενες περιοχές, ανάμεσα στα παρτέρια που κοσμούν τον πεζόδρομο, που είναι κατάλληλες για την εγκατάσταση των καταστημάτων. Κάθε τέτοια περιοχή i του πεζόδρομου προσδιορίζεται από ένα διάστημα φυσικών αριθμών $[s_i, f_i]$, όπου το s_i ορίζει την αρχή και το f_i το τέλος του διαστήματος. Υπαίθρια καταστήματα μπορούν να εγκατασταθούν σε οποιοδήποτε (ακέραιο) σημείο αυτών των περιοχών, χωρίς φυσικά να επιτρέπεται η εγκατάσταση περισσότερων του ενός καταστήματος στο ίδιο σημείο.

Ο χώρος που θα έχουν στη διάθεσή τους οι πελάτες ενός καταστήματος είναι ανάλογος της απόστασής του από το πλησιέστερο γειτονικό κατάστημα. Για να μεγιστοποιηθεί ο διαθέσιμος χώρος για τους πελάτες όλων των καταστημάτων, ο Δήμαρχος πρότεινε τον υπολογισμό μιας τοποθέτησης όλων των N καταστημάτων στις επιλεγμένες περιοχές $[s_1, f_1], \ldots, [s_M, f_M]$ του πεζόδρομου ώστε να μεγιστοποιηθεί η ελάχιστη απόσταση ενός καταστήματος από το πλησιέστερό του γειτονικό κατάστημα. Αποφασίζετε λοιπόν να γράψετε ένα πρόγραμμα που θα υπολογίζει, εύκολα και γρήγορα, μια τέτοια τοποθέτηση των καταστημάτων.

Δεδομένα Εισόδου: Το πρόγραμμά σας αρχικά θα διαβάζει από το standard input δύο θετικούς ακεραίους, το πλήθος N των καταστημάτων και το πλήθος M των περιοχών. Σε καθεμία από τις επόμενες M γραμμές, θα δίνονται δύο μη-αρνητικοί ακέραιοι s_i και f_i, χωρισμένοι με ένα κενό μεταξύ τους, που προσδιορίζουν την αρχή και το τέλος της i-οστής περιοχής. Οι περιοχές $[s_i, f_i]$ θα δίνονται με αυθαίρετη σειρά και θα είναι ανά δύο ξένες μεταξύ τους, ενώ το συνολικό τους μήκος δεν θα υπολείπεται του N.

Δεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμά σας πρέπει να τυπώνει στο standard output έναν θετικό ακέραιο, την ελάχιστη απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών καταστημάτων σε μια τοποθέτηση όλων των N καταστημάτων που μεγιστοποιεί αυτή την ελάχιστη απόσταση.

Περιορισμοί:

$1 \le N \le 10^6$
$1 \le M \le 10^5$
$0 \le s_i \le f_i \le 15 \cdot 10^8$
$\sum_{i=1}^{M}(f_i - s_i + 1) \ge N$
Όριο χρόνου εκτέλεσης: 1 sec.
Όριο μνήμης: 64 MB.

Παραδείγματα Εισόδου:	Παραδείγματα Εξόδου:
5 3 5 9 0 3 12 12	3
6 3 10 12 0 4 5 8	2

Άσκηση 2: Συνδετικά Δέντρα με Δύο Κριτήρια

Τελευταία έχει ξεσπάσει διαμάχη στη χώρα των Αλγορίθμων σχετικά με τη χρησιμότητα και την αποδοτικότητα διαφόρων αλγοριθμικών τεχνικών. Στους πλέον αδιάλλακτους συγκαταλέγονται οι υποστηρικτές της Απληστίας και οι υποστηρικτές της Δυαδικής Αναζήτησης. Ο Πρόεδρος της χώρας προσπαθεί να ηρεμήσει τα πνεύματα και να εξηγήσει ότι όλες οι τεχνικές είναι χρήσιμες και ότι η αποδοτική επίλυση σύνθετων αλγοριθμικών προβλημάτων συνήθως απαιτεί συνδυασμό αλγοριθμικών τεχνικών. Ως παράδειγμα, προτείνει τον υπολογισμό ενός συνδετικού δέντρου που μεγιστοποιεί τον λόγο του συνολικού κέρδους προς το συνολικό βάρος των ακμών που περιλαμβάνει.

Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε μη κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα $G(V, E)$ με $|V| = N$ κορυφές και $|E| = M$ ακμές. Κάθε ακμή e προσφέρει κέρδος $p(e)$ και επιβαρύνει με βάρος $w(e)$ εφόσον συμπεριληφθεί στο επιλεγμένο συνδετικό δέντρο του G. Το ζητούμενο είναι να υπολογίσουμε ένα συνδετικό δέντρο T του G που μεγιστοποιεί τον λόγο $\sum_{e\in T} p(e)/\sum_{e\in T} w(e)$. Ο Πρόεδρος της χώρας ισχυρίζεται ότι η αποδοτική επίλυση αυτού του προβλήματος απαιτεί έναν έξυπνο συνδυασμό αλγοριθμικών τεχνικών και σας ζητά να γράψετε ένα πρόγραμμα που επιβεβαιώνει αυτόν τον ισχυρισμό.

Δεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμα σας αρχικά θα διαβάζει από το standard input δύο θετικούς ακεραίους, το πλήθος N των κορυφών και το πλήθος M των ακμών ενός συνεκτικού γραφήματος. Σε κάθε μία από τις επόμενες M γραμμές, θα δίνονται τέσσερις θετικοί ακέραιοι $u(e), v(e), p(e), w(e)$ που αναπαριστούν μια ακμή e. Οι δύο πρώτοι ακέραιοι δηλώνουν τις κορυφές $u(e)$ και $v(e)$, με $u(e) \neq v(e)$, που αποτελούν τα άκρα της e. Οι δύο επόμενοι ακέραιοι δηλώνουν το κέρδος $p(e)$ και το βάρος $w(e)$ της ακμής e.

Δεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμα σας πρέπει να τυπώνει στο standard output δύο ακέραιους, το συνολικό κέρδος $p(T) = \sum_{e\in T} p(e)$ και το συνολικό βάρος $w(T) = \sum_{e\in T} w(e)$ του συνδετικού δέντρου T του G που μεγιστοποιεί τον λόγο $p(T)/w(T)$. Για την ακρίβεια, το πρόγραμμά σας πρέπει να τυπώνει τους ακεραίους $p(T)/\gcd(p(T), w(T))$ και $w(T)/\gcd(p(T), w(T))$, χωρισμένους με ένα κενό μεταξύ τους (η διαίρεση με τον ΜΚΔ αντιμετωπίζει την περίπτωση που υπάρχουν περισσότερα του ενός βέλτιστα συνδετικά δέντρα).

Περιορισμοί:

$2 \leq N \leq 50.000$
$1 \leq \ \leq 200.000$
$1 \leq u(e), v(e) \leq N$
$1 \leq p(e), w(e) \leq 200$
Για το 60% της βαθμολογίας,
θα είναι $w(e) = 1$.

Όριο χρόνου εκτέλεσης: 3 sec.
Όριο μνήμης: 64 MB.

Παραδείγματα Εισόδου:	**Παραδείγματα Εξόδου:**
3 3 1 2 1 3 2 3 2 2 3 1 3 1	5 3
4 5 1 2 2 3 2 3 3 1 3 4 1 2 4 1 2 1 2 4 4 4	3 2