Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών

Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Διδάσκοντες: Άρ. Παγουρτζής, Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου, Π. Γροντάς

1η Σειρά Προγραμματιστικών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 13/11/2023

Άσκηση 1: Στατιστικές Αλχημείες

Στη χώρα των Αλγορίθμων υπάρχουν τελευταία ανησυχίες σχετικά με την επάρκεια προϊόντων δημητριακών κατά τη διάρκεια του χειμώνα. Στην προσπάθειά σας να διασκεδάσετε αυτές τις ανησυχίες, και έτσι να κάνετε νέους φίλους, έχετε συγκεντρώσει στοιχεία για την διαθεσιμότητα προϊόντων δημητριακών στα N μεγαλύτερα supermarkets κατά μήκος του κεντρικού εμπορικού δρόμου της πρωτεύουσας. Γνωρίζετε λοιπόν ότι στις αποθήκες του supermarket i υπάρχουν διαθέσιμες c_i συσκευασίες. Διαπιστώνετε ότι σε κάποιες περιπτώσεις οι διαθέσιμες συσκευασίες είναι αρκετές, αν και ποτέ δεν ξεπερνούν το N, ενώ σε άλλες περιπτώσεις, είναι πολύ λίγες και μάλλον δεν επαρκούν για τον χειμώνα.

Δεν θέλετε να βγάλετε συμπεράσματα από ακραίες περιπτώσεις, με μεγάλη ή μικρή διαθεσιμότητα. Μετά από αρκετή σκέψη, καταλήγετε ότι μια καλή εκτίμηση για την διαθεσιμότητα προϊόντων δημητριακών προκύπτει από τη διάμεσο (median) των διαθέσιμων συσκευασιών σε **τουλάχιστον** K διαδοχικά supermarkets, για κατάλληλα επιλεγμένη τιμή του K. Στην προσπάθειά σας για αισιόδοξη αντιμετώπιση του θέματος, δέχεστε ότι η μέγιστη τιμή αυτών των διαμέσων αποτελεί μια αντιπροσωπευτική εκτίμηση για τη διαθεσιμότητα προϊόντων δημητριακών, και θέλετε να γράψετε ένα πρόγραμμα που την υπολογίζει.

Δεδομένα Εισόδου: Το πρόγραμμά σας αρχικά θα διαβάζει από το standard input δύο θετικούς ακεραίους, το πλήθος N των supermarkets για τα οποία γνωρίζετε τη διαθεσιμότητα προϊόντων δημητριακών και το ελάχιστο πλήθος διαδοχικών supermarkets K που πρέπει να λάβετε υπόψη για την εκτίμησή σας. Στην επόμενη γραμμή, θα δίνονται N θετικοί ακέραιοι $c_1, \ldots, c_N$ χωρισμένοι με ένα κενό μεταξύ τους. Ο ακέραιος c_i αντιστοιχεί στη διαθεσιμότητα συσκευασιών προϊόντων δημητριακών του supermarket i.

Δεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμά σας πρέπει να τυπώνει στο standard output έναν θετικό ακέραιο, που εκφράζει τη μέγιστη τιμή διαμέσου που μπορεί να επιτευχθεί σε τμήμα του κεντρικού εμπορικού δρόμου με **τουλάχιστον** K διαδοχικές θέσεις supermarkets. Υπενθυμίζεται ότι η διάμεσος μιας ακολουθίας K αριθμών είναι η τιμή στη θέση $\lfloor (K+1)/2 \rfloor$ της αντίστοιχης ταξινομημένης (σε αύξουσα σειρά) ακολουθίας.

Περιορισμοί:	**Παραδείγματα Εισόδου:**	**Παραδείγματα Εξόδου:**
$1 \le K \le N \le 2 \cdot 10^5$ $1 \le c_i \le N$ Όριο χρόνου εκτέλεσης: 1 sec. Όριο μνήμης: 64 MB.	`5 3` `1 2 3 2 1`	`2`
	`4 2` `1 2 3 4`	`3`
	`10 2` `1 10 2 6 10 8 9 4 4 5`	`9`

Άσκηση 2: Συνδετικά Δέντρα με Δύο Κριτήρια

Τελευταία έχει ξεσπάσει διαμάχη στη χώρα των Αλγορίθμων σχετικά με τη χρησιμότητα και την αποδοτικότητα διαφόρων αλγοριθμικών τεχνικών. Στους πλέον αδιάλλακτους συγκαταλέγονται οι υποστηρικτές της Απληστίας και οι υποστηρικτές της Δυαδικής Αναζήτησης. Ο Πρόεδρος της χώρας προσπαθεί να ηρεμήσει τα πνεύματα και να εξηγήσει ότι όλες οι τεχνικές είναι χρήσιμες και ότι η αποδοτική επίλυση σύνθετων αλγοριθμικών προβλημάτων συνήθως απαιτεί συνδυασμό αλγοριθμικών τεχνικών. Ως παράδειγμα, προτείνει τον υπολογισμό ενός συνδετικού δέντρου που μεγιστοποιεί τον λόγο του συνολικού κόστους προς το συνολικό βάρος των ακμών που περιλαμβάνει.

Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε μη κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα $G(V, E)$ με $|V| = N$ κορυφές και $|E| = M$ ακμές. Κάθε ακμή e προσφέρει κέρδος $p(e)$ και επιβαρύνει με βάρος $w(e)$ εφόσον συμπεριληφθεί στο επιλεγμένο συνδετικό δέντρο του G. Το ζητούμενο είναι να υπολογίσουμε ένα συνδετικό δέντρο T του G που μεγιστοποιεί τον λόγο $\sum_{e\in T} p(e)/\sum_{e\in T} w(e)$. Ο Πρόεδρος της χώρας ισχυρίζεται ότι η αποδοτική επίλυση αυτού του προβλήματος απαιτεί έναν έξυπνο συνδυασμό αλγοριθμικών τεχνικών και σας ζητά να γράψετε ένα πρόγραμμα που επιβεβαιώνει αυτόν τον ισχυρισμό.

Δεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμα σας αρχικά θα διαβάζει από το standard input δύο θετικούς ακεραίους, το πλήθος N των κορυφών και το πλήθος M των ακμών ενός συνεκτικού γραφήματος. Σε κάθε μία από τις επόμενες M γραμμές, θα δίνονται τέσσερις θετικοί ακέραιοι $u(e), v(e), p(e), w(e)$ που αναπαριστούν μια ακμή e. Οι δύο πρώτοι ακέραιοι δηλώνουν τις κορυφές $u(e)$ και $v(e)$, με $u(e) \neq v(e)$, που αποτελούν τα άκρα της e. Οι δύο επόμενοι ακέραιοι δηλώνουν το κέρδος $p(e)$ και το βάρος $w(e)$ της ακμής e.

Δεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμα σας πρέπει να τυπώνει στο standard output δύο ακέραιους, το συνολικό κέρδος $p(T) = \sum_{e\in T} p(e)$ και το συνολικό βάρος $w(T) = \sum_{e\in T} w(e)$ του συνδετικού δέντρου T του G που μεγιστοποιεί τον λόγο $p(T)/w(T)$. Για την ακρίβεια, το πρόγραμμά σας πρέπει να τυπώνει τους ακεραίους $p(T)/\gcd(p(T), w(T))$ και $w(T)/\gcd(p(T), w(T))$, χωρισμένους με ένα κενό μεταξύ τους (η διαίρεση με τον ΜΚΔ αντιμετωπίζει την περίπτωση που υπάρχουν περισσότερα του ενός βέλτιστα συνδετικά δέντρα).

Περιορισμοί:

$2 \leq N \leq 50.000$
$1 \leq \ \leq 200.000$
$1 \leq u(e), v(e) \leq N$
$1 \leq p(e), w(e) \leq 200$
Για το 60% της βαθμολογίας,
θα είναι $w(e) = 1$.

Όριο χρόνου εκτέλεσης: 3 sec.
Όριο μνήμης: 64 MB.

Παραδείγματα Εισόδου:

```
3 3
1 2 1 3
2 3 2 2
3 1 3 1
```

```
4 5
1 2 2 3
2 3 3 1
3 4 1 2
4 1 2 1
2 4 4 4
```

Παραδείγματα Εξόδου:

```
5 3
```

```
3 2
```