Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών

Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Διδάσκοντες: Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου

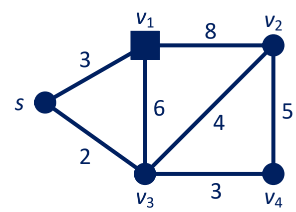
3η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 15/1/2026

Άσκηση 1: Συντομότερες Διαδρομές με Περιορισμούς (1 μον.)

Θεωρούμε συνεκτικό μη-κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, \boldsymbol{w})$ με n κορυφές, m ακμές, μήκος $w(e) \in \mathbb{N}$ για κάθε ακμή $e \in E$ και τελική κορυφή $s \in V$. Κάποιες κορυφές $M \subseteq V \setminus \{s\}$ του G αντιστοιχούν σε σταθμούς ανεφοδιασμού. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που για κάθε κορυφή $v \in V$, υπολογίζει το μήκος της συντομότερης $v - s$ διαδρομής που διέρχεται τουλάχιστον μία φορά από σταθμό ανεφοδιασμού (δηλ. από κορυφή του M). Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

Σημειώνεται ότι: (i) οι κορυφές $u \in M$ ικανοποιούν αυτόματα τον περιορισμό, και (ii) η συντομότερη $v - s$ διαδρομή που διέρχεται τουλάχιστον μία φορά από κορυφή του M μπορεί να μην είναι απλή (π.χ., θα μπορούσε μια τέτοια συντομότερη διαδρομή να μεταβεί στο s, στη συνέχεια σε κάποιον σταθμό ανεφοδιασμού $u \in M$, και τέλος να επιστρέψει στο s).

Παράδειγμα: Στο διπλανό γράφημα έχουμε έναν μόνο σταθμό ανεφοδιασμού στην κορυφή v_1 (εικονίζεται με τετράγωνο). Τα μήκη των συντομότερων διαδρομών με κατάληξη την s που διέρχονται από την v_1 για τις κορυφές s, v_1, v_2, v_3, v_4 είναι 6, 3, 11, 8 και 11, αντίστοιχα.



Άσκηση 2: Αποστάσεις σε Δέντρα (1.3 μον.)

Δίνεται συμμετρικός (ως προς την κύρια διαγώνιο) $n \times n$ πίνακας D όπου $D[i, j]$ είναι το μήκος ενός συντομότερου μονοπατιού μεταξύ των κορυφών v_i και v_j (σε ένα άγνωστο συνεκτικό μη κατευθυνόμενο γράφημα με σύνολο κορυφών $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ – υποθέτουμε ότι $D[i, i] = 0$ για κάθε κορυφή v_i). Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που αποφαίνεται αν υπάρχει δέντρο T με σύνολο κορυφών V και μη αρνητικά μήκη $\boldsymbol{w}$ στις ακμές του στο οποίο η απόσταση μεταξύ κάθε ζεύγους κορυφών v_i και v_j είναι ίση με $D[i, j]$. Αν υπάρχουν τέτοια δέντα, ο αλγόριθμός σας πρέπει να υπολογίζει ένα. Διαφορετικά, ο αλγόριθμός σας πρέπει να πιστοποιεί (πως;) ότι τέτοιο δέντρο δεν μπορεί να υπάρξει. Να αιτιολογήσετε προσεκτικά την ορθότητα και να βελτιστοποιήσετε την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

Άσκηση 3: Κυκλικές συμβολοσειρές (1 μον.)

Μια κυκλική συμβολοσειρά μήκους n είναι μια συμβολοσειρά στην οποία ο χαρακτήρας n θεωρείται ότι προηγείται του χαρακτήρα 1. Παράδειγμα: Οι συμβολοσειρές rc, arc, $arca$ και $rcarcarc$ είναι όλες υπο-συμβολοσειρές της κυκλικής συμβολοσειράς car. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που αποφαίνεται αν μια συμβολοσειρά p_1 είναι υπο-συμβολοσειρά μιας κυκλικής συμβολοσειράς p_2. Να αιτιολογήσετε προσεκτικά την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

Άσκηση 4: Παρουσίαση Διπλωματικών Εργασιών (1.3 μον.)

Θεωρούμε σύνολο φοιτητών $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ που θα παρουσιάσουν τις διπλωματικές τους εργασίες σε επιτροπές καθηγητών. Οι επιτροπές θα σχηματιστούν από σύνολο καθηγητών $P = \{p_1, \ldots, p_m\}$. Για κάθε φοιτητή

s_i, οι καθηγητές στο σύνολο $E_i \subseteq P$ είναι ειδικοί στο αντικείμενο της διπλωματικής του s_i, ενώ οι υπόλοιποι $N_i = P \setminus E_i$ όχι. Κάθε φοιτητής πρέπει να παρουσιάσει την εργασία του σε k καθηγητές, από τους οποίους τουλάχιστον οι ℓ είναι ειδικοί στο αντικείμενο της διπλωματικής (θεωρούμε ότι $\ell \leq k \leq m$ και ότι $\ell \leq |E_i|$ για κάθε φοιτητή s_i). Στόχος είναι να υπολογίσουμε ένα σύνολο n επιτροπών, μία για κάθε φοιτητή, σύμφωνα με τους παραπάνω κανόνες ώστε να ελαχιστοποιήσουμε το πλήθος των επιτροπών στις οποίες συμμετέχει ο καθηγητής με τις περισσότερες συμμετοχές. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο για αυτό το πρόβλημα και να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

Άσκηση 5: Μετατροπή Ροής Ακμών σε Ροή Μονοπατιών (2.4 μον.)

Θεωρούμε $s - t$ δίκτυο $G(V, E, \boldsymbol{c})$ με n κορυφές, m (κατευθυνόμενες) ακμές, και θετική ακέραια χωρητικότητα $c(e)$ σε κάθε ακμή $e \in E$. Δίνεται μια (ακέραια) $s - t$ *ροή ακμών* $f : E \to \mathbb{N}$ που αναθέτει ακέραια ροή $f(e)$, με $0 \leq f(e) \leq c(e)$, σε κάθε ακμή $e \in E$ του G (και εξασφαλίζει διατήρηση ροής σε κάθε ενδιάμεση κορυφή $v \in V \setminus \{s, t\}$). Θα λέμε ότι μια $s - t$ ροή ακμών f είναι *ακυκλική* όταν δεν υπάρχει κύκλος C στο G τέτοιος ώστε $f(e) > 0$ για κάθε ακμή $e \in C$.

Έστω $\mathcal{P}$ το σύνολο όλων των $s - t$ μονοπατιών στο G. Μια (ακέραια) *ροή μονοπατιών* $g : \mathcal{P} \to \mathbb{N}$ αναθέτει ακέραια ροή $g(p)$ σε κάθε $s - t$ μονοπάτι $p \in \mathcal{P}$, έτσι ώστε $\sum_{p \in \mathcal{P} : e \in p} g(p) \leq c(e)$, για κάθε ακμή $e \in E$ (η διατήρηση ροής στις ενδιάμεσες κορυφές εξασφαλίζεται τετριμμένα, αφού η g είναι ροή $s - t$ μονοπατιών). Λέμε ότι μια $s - t$ ροή ακμών $f : E \to \mathbb{N}$ *αντιστοιχεί* σε μια $s - t$ ροή μονοπατιών $g : \mathcal{P} \to \mathbb{N}$, αν $f(e) = \sum_{p \in \mathcal{P} : e \in p} g(p)$ για κάθε ακμή $e \in E$.

1. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο ο οποίος μετατρέπει μια αυθαίρετη $s - t$ ροή ακμών $f' : E \to \mathbb{N}$ σε μια ακυκλική $s - t$ ροή ακμών $f : E \to \mathbb{N}$ με ίδιο συνολικό μέγεθος $s - t$ ροής. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα του αλγορίθμου σας και να προσπαθήσετε να βελτιστοποιήσετε την υπολογιστική του πολυπλοκότητα.
2. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο ο οποίος με είσοδο μια ακυκλική $s - t$ ροή ακμών $f : E \to \mathbb{N}$, υπολογίζει μια αντίστοιχη $s - t$ ροή μονοπατιών $g : \mathcal{P} \to \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $g(p) > 0$ για m το πολύ μονοπάτια $p \in \mathcal{P}$. Πως εξασφαλίζει ο αλγόριθμός σας τον τελευταίο περιορισμό και ποια είναι η υπολογιστική του πολυπλοκότητα;

Άσκηση 6: Αναγωγές και NP-Πληρότητα (3 μον.)

Να δείξετε ότι τα παρακάτω προβλήματα είναι NP-Πλήρη:

Άθροισμα Υποσυνόλου κατά Προσέγγιση

Είσοδος : Σύνολο $A = \{w_1, \ldots, w_n\}$ με n φυσικούς και φυσικοί B και x με $B > x \geq 1$.

Ερώτηση : Υπάρχει $S \subseteq A$ τέτοιο ώστε $B - x \leq w(S) \leq B$;

Μέγιστη Τομή με Βάρη στις Κορυφές

Είσοδος : Ακέραιος $B \geq 1$ και πλήρες γράφημα $G(V, E)$ με n κορυφές, όπου κάθε κορυφή v έχει ακέραιο βάρος $w(v) \geq 1$ και κάθε ακμή $e = \{u, v\}$ έχει βάρος $w(e) = w(u)w(v)$.

Ερώτηση : Υπάρχει τομή $(S, V \setminus S)$ στο G τέτοια ώστε το συνολικό βάρος των ακμών που διασχίζουν την τομή να είναι τουλάχιστον B;

Αραιό Γράφημα (Sparse Subgraph)

Είσοδος : Απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ και ακέραιος $k \geq 1$.

Ερώτηση : Υπάρχει σύνολο $S \subseteq V$ με τουλάχιστον k κορυφές τέτοιο ώστε το επαγόμενο υπογράφημα $G[S]$ του G, που ορίζεται από τις κορυφές του S, να περιέχει το πολύ $k/2$ ακμές;

Ικανοποιησιμότητα με Περιορισμούς

Είσοδος : Λογική πρόταση $\varphi = \bigwedge_{j=1}^{m} (\ell_{j1} \vee \ell_{j2} \vee \ell_{j3} \vee \ell_{j4})$ σε 4-Συζευκτική Κανονική Μορφή (4-CNF). Υπενθυμίζεται ότι στην αναπαράσταση της φ σε 4-CNF, κάθε literal ℓ_{ji} είναι είτε μια λογική μεταβλητή είτε η άρνηση μιας λογικής μεταβλητής.

Ερώτηση : Υπάρχει ανάθεση τιμών αλήθειας στις λογικές μεταβλητές ώστε κάθε όρος $\ell_{j1} \vee \ell_{j2} \vee \ell_{j3} \vee \ell_{j4}$ να περιλαμβάνει τουλάχιστον ένα αληθές και τουλάχιστον ένα ψευδές literal;

Συντομότερο Μονοπάτι με Περιορισμούς (Constrained Shortest Path)

Είσοδος : Κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w, c)$, όπου κάθε ακμή e έχει ακέραιο μήκος $w(e) \geq 0$ και ακέραιο κόστος $c(e) \geq 0$, κορυφές s, t και ακέραιοι $W, C \geq 0$.

Ερώτηση : Υπάρχει $s - t$ μονοπάτι στο G με συνολικό μήκος μικρότερο ή ίσο του W και συνολικό κόστος μικρότερο ή ίσο του C;