Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα
Διδάσκοντες: Α. Παγουρτζής, Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου, Π. Γροντάς
3η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 6/2/2024

Άσκηση 1: Υπολογισιμότητα (3 μον.)

Η κλάση **RE** περιέχει όλα τα ημιαποκρίσιμα υπολογιστικά προβλήματα (δηλαδή αυτά για τα οποία υπάρχει αλγόριθμος που τα ημιαποφασίζει).

(α) Στο **Πρόβλημα Διοφαντικών Εξισώσεων** (γνωστό και ως '10ο πρόβλημα του Hilbert') δίνεται ως είσοδος μια πολυωνυμική εξίσωση με ακέραιους συντελεστές και πεπερασμένο αριθμό αγνώστων και ζητείται αν έχει ακέραιες λύσεις ή όχι.

Αποδείξτε ότι το **Πρόβλημα Διοφαντικών Εξισώσεων** ανήκει στην κλάση **RE**.[1]

(β) Αποδείξτε ότι το **Πρόβλημα Τερματισμού (HP)** είναι **RE**-πλήρες, περιγράφοντας αναγωγή από οποιοδήποτε ημιαποκρίσιμο πρόβλημα στο **HP**.

Υπόδειξη: ίσως σας βοηθήσει να αναγάγετε πρώτα το **Πρόβλημα Διοφαντικών Εξισώσεων** στο **HP**.

(γ) Αποδείξτε ότι το **Πρόβλημα Καθολικού Τερματισμού** (δίνεται μια μηχανή Turing M και ζητείται αν η M τερματίζει για *όλες* τις εισόδους ή όχι) είναι **RE**-δύσκολο και επομένως μη επιλύσιμο.

Άσκηση 2: Πολυπλοκότητα - Αναγωγές (4 μον.)

Αποδείξτε τα παρακάτω:

(α) Περιγράψτε αναγωγή πολυωνυμικού χρόνου ($\leq_P$) από το πρόβλημα **UnSat** (το συμπλήρωμα του προβλήματος **Satisfiability**) στο πρόβλημα **NoLargeClique** (δίνεται γράφος G και ακέραιος k, και ζητείται αν ισχύει ότι κάθε κλίκα του G έχει μέγεθος το πολύ k).

(β) Έστω μια κλάση πολυπλοκότητας $\mathcal{C}$. Αν ένα πρόβλημα Π είναι $\mathcal{C}$-πλήρες ως προς μια αναγωγή $\leq_R$ τότε το συμπληρωματικό πρόβλημα Π' είναι co$\mathcal{C}$-πλήρες ως προς την $\leq_R$.

Πώς μπορείτε να χρησιμοποιήσετε αυτή την ιδιότητα για να συμπεράνετε ότι το **NoLargeClique** είναι coNP-πλήρες; Χρειάζεται να χρησιμοποιήσετε και το αποτέλεσμα του (α);

(γ) Αν ένα NP-πλήρες (ως προς την αναγωγή πολυωνυμικού χρόνου $\leq_P$) πρόβλημα ανήκει στην κλάση NP $\cap$ coNP τότε NP = coNP.

(δ) Το πρόβλημα **NAE3SAT** (Not-All-Equal 3-SAT: δίνεται ένας τύπος του προτασιακού λογισμού σε μορφή 3-SAT και ζητείται αν υπάρχει ανάθεση η οποία σε κάθε clause ικανοποιεί τουλάχιστον 1 και το πολύ 2 literals) είναι NP-πλήρες.

(ε) Το πρόβλημα **Επιλογής Αντιπροσώπων** που ορίζεται παρακάτω είναι NP-πλήρες. Ορισμός προβλήματος: Δίνεται ένα σύνολο ατόμων U που διαμένουν σε μια περιοχή, και διάφορες κοινωνικές ομάδες (υποσύνολα του U) $U_1, \ldots, U_r$, όχι κατ'ανάγκη ξένες μεταξύ τους, καθώς και ένας ακέραιος αριθμός k. Κάθε ομάδα μπορεί να αντιπροσωπεύεται από οποιοδήποτε μέλος της. Στο τοπικό κοινοβούλιο μπορούν να συμμετέχουν k αντιπρόσωποι. Ζητείται εάν είναι δυνατόν να αντιπροσωπευθούν όλες οι ομάδες στο κοινοβούλιο, δηλαδή αν υπάρχει $R \subseteq U$, με $|R| \leq k$, τέτοιο ώστε $\forall i \leq r, U_i \cap R \neq \emptyset$.

[1] Το 1970 αποδείχθηκε από τον Yuri Matiyasevich, ολοκληρώνοντας την πολυετή προσπάθεια των Martin Davis, Hilary Putnam, Julia Robinson, και του ίδιου, ότι το πρόβλημα είναι επιπλέον **RE**-δύσκολο, και επομένως **RE**-πλήρες και μη επιλύσιμο.

Άσκηση 3: Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι - Vertex Cover -TSP (3 μον.)

(α) Θεωρήστε τον παρακάτω αλγόριθμο προσέγγισης για το πρόβλημα Vertex Cover σε ένα γράφημα $G(V, E)$, όπου κάθε κορυφή $v \in V$ έχει βάρος $w(v) > 0$. Θυμηθείτε ότι το ζητούμενο είναι να υπολογίσουμε ένα σύνολο κορυφών $C \subseteq V$, με ελάχιστο συνολικό βάρος, ώστε κάθε ακμή $e \in E$ να έχει τουλάχιστον ένα άκρο της στο C.

Να δείξετε ότι ο αλγόριθμος επιτυγχάνει λόγο προσέγγισης 2. Ειδικότερα, να δείξετε ότι για τα C και $c(e)$, $e \in E$, στο τέλος του αλγορίθμου, ισχύουν τα εξής:

1. Το C καλύπτει όλες τις ακμές.
2. Το συνολικό βάρος του C είναι μικρότερο ή ίσο του $2\sum_{e \in E} c(e)$.
3. Το συνολικό βάρος της βέλτιστης λύσης είναι μεγαλύτερο ή ίσο του $\sum_{e \in E} c(e)$.

Να βρείτε ακόμη ένα (όσο γίνεται απλούστερο) γράφημα όπου ο αλγόριθμος υπολογίζει ένα Vertex Cover με συνολικό βάρος διπλάσιο από αυτό της βέλτιστης λύσης.

WeightedVertexCover($G(V, E)$, w)
  $C \leftarrow \emptyset$;
  $\forall v \in V$, $t(v) \leftarrow w(v)$;
  $\forall e \in E$, $c(e) \leftarrow 0$;
  while C δεν είναι vertex cover **do**
    $e = \{u, v\}$ μια ακάλυπτη ακμή;
    $\delta \leftarrow \min\{t(u), t(v)\}$;
    $t(u) \leftarrow t(u) - \delta$;
    $t(v) \leftarrow t(v) - \delta$;
    $c(e) \leftarrow \delta$;
    $C \leftarrow C \cup \{z \in \{u, v\} \mid t(z) = 0\}$;
  return(C);

(β) Αποδείξτε ότι για το πρόβλημα **TSP** κανείς πολυωνυμικός αλγόριθμος δεν μπορεί να επιτύχει λόγο προσέγγισης k, για οποιαδήποτε σταθερά $k \in \mathbb{N}$, εκτός εάν P = NP.

Υπόδειξη: τροποποιήστε κατάλληλα την "κλασική" αναγωγή **Hamilton Cycle** $\leq_P$ **TSP**, έτσι ώστε μια k-προσεγγιστική λύση για το παραγόμενο στιγμιότυπο του **TSP** να αποκαλύπτει την ύπαρξη ή μη κύκλου Hamilton στο αρχικό στιγμιότυπο, του προβλήματος **Hamilton Cycle**.