Εξέταση: Περιγραφική Θεωρία Συνόλων (Μεταπτυχιακό Μάθημα)

Ιούνιος 2025

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Διάρκεια εξέτασης: **2 ώρες**

Διδάσκων: Β. Γρηγοριάδης

Σημειώσεις.

- Υπάρχουν συνολικά **12 ερωτήματα** και παίρνει **1 μονάδα** το κάθε ένα. Η βαθμολογία του γραπτού σας είναι το $\min\{x, 10\}$, όπου x ο βαθμός που γράψατε. Μπορείτε να απαντήσετε σε **όσα ερωτήματα επιθυμείτε** χωρίς κανέναν περιορισμό.
- Οι απαντήσεις σας πρέπει να είναι πλήρεις και αιτιολογημένες.
- Οι φυσικοί αριθμοί είναι το σύνολο $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Το σύνολο όλων των πεπερασμένων ακολουθιών φυσικών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Η κενή ακολουθία συμβολίζεται με Λ.
- Αν $k, i \in \mathbb{N}$ με τον συμβολισμό $(k)^{(i)}$ εννοούμε την πεπερασμένη ακολουθία $(k, k, \dots, k)$ με μήκος i.
- Υπενθυμίζεται ότι η μετρική $d_{\mathcal{N}}$ του χώρου του Baire $\mathcal{N}$ ικανοποιεί για όλα τα $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$ με $\alpha \neq \beta$ ότι $d_{\mathcal{N}}(\alpha, \beta) = 2^{-n}$, όπου n είναι ο ελάχιστος $k \in \mathbb{N}$ με $\alpha(k) \neq \beta(k)$.

Ερώτημα 1. Εξετάστε ποια από τα ακόλουθα σύνολα με τη σχετική τοπολογία του $\mathbb{R}$ και του $\mathbb{R}^2$ αντίστοιχα είναι Πολωνικοί χώροι:

$$A = \mathbb{Q} \bigcup \{\sqrt{2}\} \quad \text{και} \quad B = [0, 1) \times (0, 1].$$

Ερώτημα 2. Ορίστε μια μετρική d στο ανοικτό διάστημα $I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ως προς την οποία ο μετρικός χώρος (I, d) να είναι πλήρης.

Ερώτημα 3. Βρείτε $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$ με $\frac{1}{10} < d_{\mathcal{N}}(\alpha, \beta) < \frac{1}{6}$.

Ερώτημα 4. Βρείτε μια ένα-προς-ένα ακολουθία $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ στον $\mathcal{N}$ η οποία συγκλίνει στο $(0, 0, 0, 0, \dots)$.

Επιπλέον εξετάστε ως προς τη σύγκλιση στον $\mathcal{N}$ την ακολουθία $(\beta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ που δίνεται από τον τύπο

$$\beta_i = (i)^{(i)} * (0, 0, 0, \dots), \quad i \in \mathbb{N}.$$

Ερώτημα 5. Δίνεται μια ακολουθία $(V_s)_{s \in \mathbb{N}}$ από ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι το σύνολο $G = \{(\alpha, x) \in \mathcal{N} \times \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N}\ (x \in V_{\alpha(n)})\}$ είναι ανοικτό.

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε είτε εσωτερικά σημεία είτε όρια ακολουθιών για το συμπλήρωμα του G.

Ερώτημα 6. Βρείτε τον τέλειο πυρήνα και το διάσπαρτο μέρος του κλειστού συνόλου $C = \{0\} \cup \{4^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Ερώτημα 7. Βρείτε δένδρα T και S στο $\mathbb{N}$ με τις ακόλουθες ιδιότητες.

(i) Ισχύει $(2, 4) \in T$, $(5, 1, 3) \in T$ και $[T] \neq \emptyset$.

(ii) Για κάθε $u \in S$ υπάρχει $v \in S$ που είναι γνήσια επέκταση του u.

Δώστε τον συνολοθεωρητικό ορισμό ή κάντε ένα σαφές διάγραμμα.

Ερώτημα 8. Θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και μια οικογένεια $(B_u)_{u\in 2^{<\mathbb{N}}}$ από μη κενά υποσύνολα του $\mathcal{X}$ με την ιδιότητα $B_{u*(0)} \cap B_{u*(1)} = \emptyset$ για κάθε $u \in 2^{<\mathbb{N}}$.

(Με $2^{<\mathbb{N}}$ εννοούμε το σύνολο όλων των πεπερασμένων ακολουθιών από στοιχεία του $\{0,1\}$.)

Αποδείξτε ότι κάθε συνάρτηση $\tau : 2^{\mathbb{N}} \to \mathcal{X}$ που ικανοποιεί $\tau(\alpha) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_{(\alpha(0),\ldots,\alpha(n))}$ για κάθε $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$ είναι ένα-προς-ένα.

Ερώτημα 9. Αναφέρετε (χωρίς αιτιολόγηση) ακριβώς ως προς ποιους από τους ακόλουθους τελεστές είναι κλειστή η κλάση $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_9$: $\exists^{\mathbb{N}}$, $\bigwedge_{\leq}$, $\vee$, c.

Ερώτημα 10. Δείξτε ότι αν μια κλάση Γ είναι κλειστή ως προς τον τελεστή της σύζευξης & τότε και η κλάση $\forall^{\mathbb{N}}\Gamma$ είναι επίσης κλειστή ως προς αυτόν τον τελεστή.

Ερώτημα 11. Θεωρούμε μια απαρίθμηση $(q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ του $\mathbb{Q}$. Βρείτε μια κλάση στην ιεραρχία των Borel συνόλων πεπερασμένης τάξης στην οποία ανήκει το σύνολο $P \subseteq \mathcal{N}$, το οποίο ορίζεται ως εξής:

$$\alpha \in P \iff \lim_{n\to\infty} q_{\alpha(n)} = 0.$$

Μπορείτε να πάρετε δεδομένο ότι η συνάρτηση $f : \mathcal{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R} : f(\alpha, n) = q_{\alpha(n)}$ είναι συνεχής.

Ερώτημα 12. Θεωρούμε τον Πολωνικό χώρο $\mathcal{X} = C([0,1])$ όλων των συνεχών συναρτήσεων $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με την τοπολογία της γνωστής νόρμας $\|\cdot\|_\infty$. Βρείτε μια κλάση στην ιεραρχία των προβολικών συνόλων στην οποία ανήκει το σύνολο $Q \subseteq \mathcal{X}^{\mathbb{N}}$, το οποίο ορίζεται ως εξής:

$$(f_i)_{i\in\mathbb{N}} \in Q \iff \text{η } (f_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ είναι κατά σημείο συγκλίνουσα.}$$

Μπορείτε να πάρετε δεδομένο ότι το σύνολο όλων των συγκλινουσών ακολουθιών του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ανήκει στην οικογένεια $\utilde{\mathbf{\Pi}}^0_3(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$.