Πρόχειρες Σημειώσεις Μαθηματικής Ανάλυσης
1ο Εξάμηνο ΣΑΤΜ 2023–2024

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ TAYLOR

1. Προκαταρκτικά

Θα λέγαμε ότι οι πιο απλές πραγματικές συναρτήσεις είναι οι *πολυωνυμικές*, δηλαδή οι συναρτήσεις της μορφής

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

ή γενικότερα της μορφής

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n$$

όπου x_0 και $a_0, a_1, \ldots, a_n$ σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Στις πολυωνυμικές συναρτήσεις μπορούμε να βρούμε σχετικά εύκολα τις τιμές τους και γενικά να μελετήσουμε τις ιδιότητές τους. Όμως η πλειονότητα των συναρτήσεων που χρησιμοποιούμε στην πράξη είναι συναρτήσεις που δεν μπορούν να γραφούν ως πολυώνυμα όπως πχ. η εκθετική συνάρτηση e^x, ή οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις: συνημίτονο του x ($\cos x$), ημίτονο του x ($\sin x$) κλπ.

Το Θεώρημα Taylor είναι από τα πλέον χρήσιμα εργαλεία της Μαθηματικής Ανάλυσης που δίνουν πολυωνυμικές προσεγγίσεις τέτοιων μη πολυωνυμικών συναρτήσεων και στην ουσία λέει ότι κάτω από κάποιες προυποθέσεις, πολλές συναρτήσεις ενώ δεν είναι πολυώνυμα είναι κατά μια έννοια "πολυώνυμα απείρου βαθμού".

Για να διατυπώσουμε το Θεώρημα Taylor θα χρειασθούμε τους παρακάτω συμβολισμούς.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1. *Στα επόμενα για κάθε ακέραιο $n \geq 1$ με $n!$ (διαβάζεται "n* ***παραγοντικό****") συμβολίζουμε το γινόμενο όλων των θετικών ακεραίων που είναι μικρότεροι ή ίσοι με το n, δηλαδή*

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

Επίσης ορίζουμε

$$0! = 1$$

Πχ. $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, κοκ.

Παρατηρείστε ότι για κάθε ακέραιο $n \geq 0$ ισχύει ότι

$$(n+1)! = n!(n+1)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2. *Αν $f : I \to \mathbb{R}$ είναι μία πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα διάστημα I του $\mathbb{R}$. Για κάθε ακέραιο $k \geq 1$ με $f^{(k)}$ συμβολίζουμε την παράγωγο k-τάξης της f. Επίσης θέτουμε $f^{(0)} = f$.*

Πχ. έστω n θετικός ακέραιος και $a, x_0 \in \mathbb{R}$. Αν

$$f(x) = a(x - x_0)^n$$

τότε

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} n(n-1)\dots(n-k+1)a(x-x_0)^{n-k} & \text{αν } 1 \leq k < n \\ k!a & \text{αν } k = n \\ 0 & \text{αν } k > n \end{cases}$$

Ειδικότερα για $x = x_0$,

$$f^{(k)}(x_0) = \begin{cases} 0 & \text{αν } k < n \text{ ή } k > n \\ k!a & \text{αν } k = n \end{cases} \tag{1.1}$$

Χρησιμοποιώντας την (1.1) και τον κανόνα παραγώγισης αθροίσματος συναρτήσεων έχουμε την εξής πρόταση.

Πρόταση 1.3. *Έστω $p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n$ μια πολυωνυμική συνάρτηση. Τότε*

$$p^{(k)}(x_0) = k!a_k \tag{1.2}$$

για κάθε $k = 0, \dots, n$.

Από την (1.2) έχουμε ότι για κάθε $0 \leq k \leq n$, ο συντελεστής a_k σχετίζεται με την $p^{(k)}(x_0)$, μέσω του τύπου

$$a_k = \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!} \tag{1.3}$$

Συνεπώς το $p(x)$ γράφεται και στην μορφή

$$p(x) = p(x_0) + \frac{p'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{p''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{1.4}$$

2. Πολυώνυμα Taylor

Γενικεύοντας τον τύπο (1.4) θέτοντας στην θέση του $p(x)$ μια n-φορές παραγωγίσιμη πραγματική συνάρτηση $f(x)$ δίνουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός 1.4. *Έστω $n \geq 0$ ακέραιος, I ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in I$ τέτοιο ώστε οι τιμές $f^{(k)}(x_0)$ υπάρχουν και είναι πεπερασμένες για κάθε $k = 0, \dots, n$. Το πολυώνυμο*

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{1.5}$$

καλείται ***πολυώνυμο Taylor τάξης n της f με κέντρο το x_0.***

Χρησιμοποιώντας το σύμβολο του αθροίσματος "$\sum$" και τις συμβάσεις $f^{(0)}(x) = f(x)$ και $0! = 1$, το πολυώνυμο Taylor τάξης n της f με κέντρο το x_0 γράφεται σύντομα με τον τύπο

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Στην ειδική περίπτωση όπου $x_0 = 0$ το πολυώνυμο Taylor τάξης n της f με κέντρο το $x_0 = 0$ παίρνει την πιο απλή μορφή

$$T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \tag{1.6}$$

Όταν μια συνάρτηση είναι απεριόριστα παραγωγίσιμη τότε ορίζονται τα πολυώνυμα Taylor οποιασδήποτε τάξης της f.

Παραδειγμα 1.1. Για κάθε ακέραιο $n \geq 1$ το πολυώνυμο Taylor τάξης n της $f(x) = e^x$ με κέντρο $x_0 = 0$ έχει τύπο

$$T_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}. \tag{1.7}$$

Πράγματι, $f^{(k)}(x) = e^x$ και άρα $f^{(k)}(0) = 1$, για κάθε $k \geq 0$.

Επίσης αποδεικνύεται ότι αν η συνάρτηση είναι *άρτια* (δηλαδή $f(-x) = f(x)$) τότε στα πολυώνυμα Taylor της f με κέντρο το $x_0 = 0$ εμφανίζονται μόνο άρτιες δυνάμεις του x (αφού όπως αποδεικνύεται όλες οι παράγωγοι της f περιττής τάξης μηδενίζονται στο 0). Αντίστοιχα, αν η συνάρτηση είναι *περιττή* (δηλαδή $f(-x) = -f(x)$) τότε στα πολυώνυμα Taylor της f με κέντρο το $x_0 = 0$ εμφανίζονται μόνο περιττές δυνάμεις του x. Χαρακτηριστικά είναι τα επόμενα παραδείγματα.

Παραδειγμα 1.2. Επειδή η συνάρτηση $f(x) = \cos x$(=*συνημίτονο του* x), $x \in \mathbb{R}$ είναι άρτια ($\cos(-x) = \cos x$) στα πολυώνυμα Taylor της $\cos x$ με κέντρο το $x_0 = 0$ θα εμφανίζονται μόνο άρτιες δυνάμεις του x.

Έχουμε, $f'(x) = (\cos x)' = -\sin x$, $f''(x) = (-\sin x)' = -\cos x$, $f^{(3)}(x) = (-\cos x)' = \sin x$, $f^{(4)}(x) = (\sin x)' = \cos x = f(x)$ και άρα $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$, $f^{(3)}(0) = 0$, $f^{(4)}(0) = 1 = f(0)$. Συνεπώς,

$$T_0(x) = T_1(x) = 1, \quad T_2(x) = T_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2}, \quad T_4(x) = T_5(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

Γενικά, αποδεικνύεται ότι

$$T_{2n}(x) = T_{2n+1}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \tag{1.8}$$

για κάθε $n \geq 0$.

Παραδειγμα 1.3. Αντίστοιχα, επειδή η συνάρτηση $f(x) = \sin x$(=*ημίτονο του* x), $x \in \mathbb{R}$ είναι περιττή στα πολυώνυμα Taylor της $\sin x$ με κέντρο το $x_0 = 0$ θα εμφανίζονται μόνο περιττές δυνάμεις του x. Εύκολα βλέπουμε ότι

$$T_0(x) = 0, \quad T_1(x) = T_2(x) = \frac{x}{1!}, \quad T_3(x) = T_4(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!}$$

Γενικά, αποδεικνύεται ότι

$$T_{2n+1}(x) = T_{2n+2}(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{1.9}$$

Παραδειγμα 1.4. Τα πολυώνυμα Taylor της $f(x) = \ln(x+1)$, $x \in (-1, +\infty)$ με κέντρο το $x_0 = 0$ είναι τα εξής:

$$T_0(x) = 0, \quad T_1(x) = \frac{x}{1}, \quad T_2(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2}, \quad T_3(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}, \quad \ldots$$

και γενικά για $n \geq 1$, αποδεικνύεται ότι

$$T_n(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}. \tag{1.10}$$

Παραδειγμα 1.5. Τα πολυώνυμα Taylor της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $x \neq 1$ με κέντρο το $x_0 = 0$ είναι τα εξής:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = 1 + x, \quad T_2(x) = 1 + x + x^2, \quad T_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3, \quad \ldots$$

και γενικά για $n \geq 1$, αποδεικνύεται ότι

$$T_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \tag{1.11}$$

Πράγματι, δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι

$$f'(x) = (1-x)^{-2}, \quad f''(x) = 2(1-x)^{-3} \quad f'''(x) = 3!(1-x)^{-4}$$

και γενικά

$$f^{(n)}(x) = n!(1-x)^{-(n+1)}$$

Άρα

$$f^{(n)}(0) = n!$$

για όλα τα $n = 0, 1, 2, \ldots$, οπότε

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

Ασκηση 1.1. *(α) Έστω $c \in \mathbb{R}$. Δώστε τον τύπο του πολυωνύμου Taylor τάξης n της συνάρτησης $f(x) = e^{cx}$ με κέντρο το $x_0 = 0$.*

(β) Δώστε τον τύπο του πολυωνύμου Taylor τάξης n της συνάρτησης $f(x) = e^{-x}$ με κέντρο το $x_0 = 0$.

(γ) Δώστε τον τύπο του πολυωνύμου Taylor τάξης n με κέντρο το $x_0 = 0$ της συνάρτησης $f(x) = \sqrt[3]{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Αποδειξη. (α) Παρατηρούμε ότι $f'(x) = ce^x$, $f''(x) = c^2e^x$ και γενικά $f^{(n)}(x) = c^ne^x$ για κάθε $n \geq 0$. Άρα $f^{(n)}(x) = c^n$, οπότε το πολυώνυμο Taylor τάξης n της συνάρτησης $f(x) = e^{cx}$ με κέντρο το $x_0 = 0$, δίνεται από τον τύπο

$$T_n(x) = 1 + \frac{c}{1!}x + \frac{c^2}{2!}x^2 + \cdots + \frac{c^n}{n!}x^n$$

(β) Από το (α) για $c = -1$ έχουμε

$$T_n(x) = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^nx^n}{n!}$$

(γ) Έχουμε $f(x) = e^{\frac{x}{3}}$ και άρα $f^{(n)}(x) = \dfrac{1}{3^n} f(x)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (εδώ είναι $c = 1/3$). Ειδικότερα, $f^{(n)}(0) = \dfrac{1}{3^n}$ και άρα

$$T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 1 + \frac{x}{3 \cdot 1!} + \frac{x^2}{3^2 \cdot 2!} + \cdots + \frac{x^n}{3^n \cdot n!}$$

□

3. Το Θεώρημα Taylor

Παρατηρείστε ότι από τις (1.4) και (1.5) έχουμε ότι αν η f είναι πολυωνυμική βαθμού n,

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n$$

τότε τα πολυώνυμα Taylor τάξης n και πάνω με κέντρο το x_0 ταυτίζονται με την f. Όμως όταν η f δεν είναι πολυώνυμο, η f και τα πολυώνυμα Taylor της f είναι αναγκαστικά διαφορετικές συναρτήσεις. Μια εκτίμηση για το πόσο διαφέρουν δίνεται από το Θεώρημα του Taylor που θα παρουσιάσουμε στην συνέχεια.

Θεωρημα 1.5. ***(Taylor)*** *Έστω $n \geq 0$ ακέραιος, I διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f : I \to \mathbb{R}$ μια $(n+1)$-φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Έστω επίσης $x_0 \in I$ και έστω T_n το πολυώνυμο Taylor τάξης n της f με κέντρο το x_0, δηλαδή*

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Τότε για κάθε $x \in I$ με $x \neq x_0$ υπάρχει ξ στο ανοικτό διάστημα με άκρα τα x_0 και x τέτοιος ώστε

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \tag{1.12}$$

Ο τύπος (1.12) καλείται και ***τύπος του Taylor***. Παρατηρείστε ότι ο τύπος του Taylor γράφεται και ως εξής

$$\frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \tag{1.13}$$

και άρα για $n = 0$ είναι το κλασικό Θεώρημα Μέσης Τιμής: Μεταξύ των x και x_0 υπάρχει ξ τέτοιο ώστε

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi)$$

(θυμηθείτε ότι έχουμε ορίσει $T_0(x) = f(x_0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$). Για τον λόγο αυτόν το Θεώρημα 1.5 καλείται και ***Θεώρημα Μέσης Τιμής ανώτερης τάξης***.

Ειδικότερα για $n = 1$ έχουμε το εξής πόρισμα:

Πορισμα 1.6. *Έστω I διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f : I \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Έστω επίσης $x_0 \in I$ και έστω $T_1(x) = f(x_0) + \dfrac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)$ το πολυώνυμο Taylor πρώτης τάξης της f με κέντρο το x_0.*

Τότε για κάθε $x \in I$ με $x \neq x_0$ υπάρχει ξ στο ανοικτό διάστημα με άκρα τα x_0 και x τέτοιος ώστε

$$f(x) = T_1(x) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2 \tag{1.14}$$

Μια από τις αποδείξεις του Θεωρήματος Taylor στηρίζεται σε μια γενίκευση του Θεωρήματος Μέσης Τιμής το λεγόμενο *Γενικευμένο Θεώρημα Μέσης Τιμής*. Το θεώρημα αυτό το αναφέρουμε στη τελευταία παράγραφο του κεφαλαίου (Παράρτημα), όπου δίνουμε και την απόδειξη του Πορίσματος 1.6.

4. Αναπτύγματα Taylor

Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ απεριόριστα παραγωγίσιμη συνάρτηση, $x_0 \in I$ και έστω $T_n(x)$ το πολυώνυμο Taylor τάξης n της f με κέντρο το x_0. Αν $x \in I$ θα λέμε ότι το $f(x)$ είναι το ***όριο*** των $T_n(x)$ και θα γράφουμε

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x) \tag{1.15}$$

αν οι τιμές $T_0(x)$, $T_1(x)$, $T_2(x)$, $T_3(x)$, ..., που δίνουν τα πολυώνυμα Taylor στο x, πλησιάζουν, όσο μεγαλώνει το n, την τιμή $f(x)$.

Επειδή $T_n(x) = f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f''(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$, τον τύπο 1.15 τον γράφουμε συνήθως ως εξής

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \tag{1.16}$$

Η παράσταση

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

γράφεται και με την μορφή

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f''(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

και καλείται ***ανάπτυγμα (ή σειρά) Taylor*** της f με κέντρο το x_0.

Δεν ισχύει πάντα ο τύπος 1.15 (ή ισοδύναμα ο 1.16). Οι απεριόριστα παραγωγίσιμες συναρτήσεις για τις οποίες αποτελούν μια ειδική κλάση συναρτήσεων (καλούνται ***αναλυτικές*** συναρτήσεις) που θα μπορούσαμε να πούμε είναι σαν πολυώνυμα απείρου βαθμού. Όμως με χρήση του Θεωρήματος Taylor αποδεικνύεται ότι οι εκθετικές, οι τριγωνομετρικές και άλλες συναρτήσεις είναι όντως αναλυτικές συναρτήσεις.

Θεωρημα 1.7. *(α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι*

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \tag{1.17}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \tag{1.18}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \tag{1.19}$$

(β) Για κάθε $x \in (-1, 1)$, ισχύει ότι

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \tag{1.20}$$

(γ) Για κάθε $x \in (-1, 1]$ ισχύει ότι

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \tag{1.21}$$

Πχ. ο τύπος (1.17) για $x = 1$ δίνει ότι

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

που σημαίνει ότι $e = \lim_{n\to\infty} s_n$ όπου $s_0 = 1$, $s_1 = 1 + \frac{1}{1!}$, $s_2 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}$ και γενικά $s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$.

5. Ασκήσεις

Ασκηση 1.2. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση και $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$. Χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 1.6 δείξτε τα εξής*

(α) *Αν $f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \neq x_0$ δείξτε ότι η f λαμβάνει στο x_0 ελάχιστη τιμή.*

(β) *Αν $f''(x) \leq 0$ για κάθε $x \neq x_0$ δείξτε ότι η f λαμβάνει στο x_0 μέγιστη τιμή.*

Αποδειξη. Σταθεροποιούμε για τα επόμενα ένα $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq x_0$. Από το Πόρισμα 1.6, έχουμε ότι υπάρχει ξ στο ανοικτό διάστημα με άκρα τα x και x_0 τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} f(x) &= T_1(x) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2 \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2 \\ &= f(x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2 \end{aligned} \tag{1.22}$$

αφού έχουμε υποθέσει ότι $f'(x_0) = 0$.

(α) Έστω ότι η f'' παίρνει μη αρνητικές τιμές σε όλο το $\mathbb{R}$ εκτός του x_0. Τότε $f''(\xi) \geq 0$. Επιπλέον αφού $x \neq x_0$ $(x-x_0)^2 > 0$ και άρα

$$\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2 \geq 0$$

Από την (1.22), έπεται $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \neq x_0$. Άρα η f λαμβάνει ελάχιστη τιμή στο x_0.

(β) Αντίστοιχα, αν $f'' \leq 0$ τότε

$$\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2 \leq 0$$

και άρα από την (1.22), $f(x_1) \leq f(x_0)$ για κάθε $x_1 \neq x_0$, οπότε η f λαμβάνει μέγιστη τιμή στο x_0. □

Ασκηση 1.3. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2-φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Έστω $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ και έστω ότι $|f''(x)| \leq 2$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $|f(x) - x| \leq x^2$, για όλα τα $x \in \mathbb{R}$.*

Αποδειξη. Έστω $T_1(x)$ το πολυώνυμο Taylor της f τάξης $n=1$ με κέντρο το $x_0=0$. Τότε

$$T_1(x) = f(0) + f'(0)x = x$$

Από τον τύπο Taylor για $n=1$ έχουμε ότι για κάθε $x \neq x_0$ υπάρχει ξ μεταξύ των x και x_0 τέτοιο ώστε $f(x) - T_1(x) = \dfrac{f''(\xi)}{2!}x^2$ και άρα

$$|f(x) - x| = \left|\frac{f''(\xi)}{2!}x^2\right| = \frac{|f''(\xi)|}{2}x^2 \leq x^2$$

□

Ασκηση 1.4. *Έστω $n \geq 1$ και έστω*

$$T_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

το πολυώνυμο Taylor τάξης n της $f(x)=e^x$ με κέντρο το $x_0=0$ (δείτε Παράδειγμα 1.1 παραπάνω). Δείξτε ότι

$$T_n(x) \leq e^x < T_n(x) + \frac{e}{(n+1)!} \tag{1.23}$$

για κάθε $x \in [0,1]$.

Αποδειξη. Έστω $n \geq 1$ ακέραιος και $x \in [0,1]$. Αν $x=0$ έχουμε $T_n(0) = e^0 (= 1)$ και άρα η (1.23) ισχύει τετριμμένα. Υποθέτουμε για την συνέχεια ότι $x \in (0,1]$. Από το Θεώρημα Taylor υπάρχει $\xi \in (0,x)$ τέτοιο ώστε

$$e^x = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} = T_n(x) + \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1} \tag{1.24}$$

Επειδή η $f(x) = e^x > 0$ και $0 < x \leq 1$ έχουμε ότι $\dfrac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1} > 0$ και άρα από την (1.24) προκύπτει ότι

$$T_n(x) < e^x \tag{1.25}$$

Από την άλλη μεριά η $f(x)=e^x$ είναι γνησίως αύξουσα και επειδή $0 \leq x \leq 1$ έχουμε ότι

$$\frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1} < \frac{e}{(n+1)!}$$

και άρα από την (1.24) παίρνουμε ότι

$$e^x < T_n(x) + \frac{e}{(n+1)!}. \tag{1.26}$$

Από τις (1.25) και (1.26) προκύπτει τώρα άμεσα η (1.23). □

Παρατηρηση 1.1. Απο την ανισότητα (1.23) για $n=9$ και $x=1$ μπορούμε με πράξεις να συμπεράνουμε ότι

$$2,718281 < e < 2,718282 \tag{1.27}$$

6. Παράρτημα

Εδώ δίνουμε μια απόδειξη του Πορίσματος 1.6. Θα χρειασθούμε το εξής:

Θεωρημα 1.8. ***(Γενικευμένο Θεώρημα Μέσης Τιμής)*** *Έστω $F, G : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμες στο (a,b). Έστω επίσης ότι $G'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a,b)$. Τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε*

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} \tag{1.28}$$

Αποδειξη. Έστω $\lambda = \dfrac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}$ και $H(x) = F(x) - \lambda G(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Παρατηρούμε ότι η H είναι συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b). Άρα από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε $\dfrac{H(b)-H(a)}{b-a} = H'(\xi)$. Από τον ορισμό της συνάρτησης H εύκολα βλέπουμε ότι $H(b) - H(a) = 0$ και άρα

$$0 = H'(\xi) = F'(\xi) - \lambda G'(\xi) \Rightarrow \lambda = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$$

□

Παρατηρηση 1.2. Το Θεώρημα 1.8 δίνει το κλασικό Θεώρημα Μέσης Τιμής αν θέσουμε $G(x) = x$.

Αποδειξη του Πορισματος 1.6. Θα δείξουμε ότι για κάθε $x \in I$ με $x \neq x_0$ υπάρχει ξ στο ανοικτό διάστημα με άκρα τα x_0 και x τέτοιος ώστε

$$\frac{f(x) - T_1(x)}{(x-x_0)^2} = \frac{f''(\xi)}{2} \tag{1.29}$$

Για κάθε $x \in I$, θέτουμε $F(x) = f(x) - T_1(x)$ και $G(x) = (x-x_0)^2$.

Έχουμε $F(x_0) = f(x_0) - T_1(x_0) = 0$ και ομοίως $G(x_0) = 0$. Επίσης $G'(x) = 2(x-x_0) \neq 0$ για κάθε $x \neq x_0$ και $F'(x) = f'(x) - T_1'(x) = f'(x) - f'(x_0)$ (παρατηρείστε ότι $T_1'(x) = f'(x_0)$).

Σταθεροποιούμε τώρα ένα $x \neq x_0$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{f(x) - T_1(x)}{(x-x_0)^2} &= \frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} \\
&= \frac{F'(\xi')}{G'(\xi')} \quad \text{(Θεώρημα 1.8, για κάποιο } \xi' \text{ μεταξύ των } x \text{ και } x_0\text{)} \\
&= \frac{1}{2}\frac{f'(\xi') - f'(x_0)}{\xi' - x_0} \\
&= \frac{f''(\xi)}{2} \quad \text{(κλασικό Θεώρημα Μέσης Τιμής, για κάποιο } \xi \text{ μεταξύ των } \xi' \text{ και } x_0\text{).}
\end{aligned}$$

□

Κεφάλαιο 2

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τις συναρτήσεις *τόξο ημιτόνου, τόξο συνημιτόνου και τόξο εφαπτομένης*. Οι συναρτήσεις αυτές είναι οι αντίστροφες των αντίστοιχων τριγωνομετρικών. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι παράγωγοι των συναρτήσεων αυτών οι οποίες υπολογίζονται σύμφωνα με το παρακάτω θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1. ***(Θεώρημα Παραγώγου Αντίστροφης Συνάρτησης)*** *Έστω I διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f : I \to \mathbb{R}$ γνησίως μονότονη και συνεχής. Έστω $J = f[I] = \{f(x); x \in I\}$ το σύνολο τιμών της f και έστω $f^{-1} : J \to I$ η αντίστροφη συνάρτηση της f. Έστω $y_0 \in J$ και $x_0 \in I$ τέτοιο ώστε $y_0 = f(x_0)$ (ή ισοδύναμα $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0) \neq 0$ τότε η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο y_0 και ισχύει ότι $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.*

1. Ορισμοί και βασικές Ιδιότητες

1. Η συνάρτηση τόξο εφαπτομένης. Έστω

$$f(x) = \tan x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Η f είναι συνεχής, γνησίως αύξουσα και με σύνολο τιμών όλο το $\mathbb{R}$. Άρα ορίζεται η αντίστροφή της που την συμβολίζουμε με $\arctan x$, (διαβάζεται “τόξο εφαπτομένης x”). Συνεπώς, η συνάρτηση $\arctan x$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, σύνολο τιμών το $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα.

Η $\arctan x$ αντιστοιχεί σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ το μοναδικό τόξο $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ με εφαπτομένη x. Πχ. $\arctan 0 = 0$, $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$, $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.2. *Για κάθε $y \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι* $(\arctan y)' = \dfrac{1}{1+y^2}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $y_0 \in \mathbb{R}$ και $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ με $y_0 = f(x_0) = \tan x_0$. Επειδή

$$\begin{aligned} f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= 1 + \tan^2 x = 1 + f^2(x) \end{aligned}$$

έχουμε $f'(x_0) = 1 + y_0^2 \neq 0$. Άρα, από το Θεώρημα 2.1, για την παράγωγο της $f^{-1} = \arctan$ στο y_0 θα έχουμε

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{1+y_0^2}$$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $y_0 \in \mathbb{R}$ έπεται ότι $(\arctan y)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$. □

Παρατηρείστε ότι από την Πρόταση 2.2 έχουμε και την εξής συνέπεια στον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων.

Πορισμα 2.3.

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x + c \tag{2.1}$$

Άρα

$$\int_a^b \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x|_a^b = \arctan b - \arctan a. \tag{2.2}$$

Για παράδειγμα $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x|_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$.

2. Η συνάρτηση τόξο συνημιτόνου. Έστω

$$f(x) = \cos x,\ x \in [0, \pi]$$

Η f είναι συνεχής, γνησίως φθίνουσα και με σύνολο τιμών το $[-1, 1]$. Άρα ορίζεται η αντίστροφή της που την συμβολίζουμε με $\arccos x$, (διαβάζεται "τόξο συνημιτόνου x"). Η συνάρτηση $\arccos x$ έχει πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$, σύνολο τιμών το $[0, \pi]$, είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα.

Η συνάρτηση $\arccos x$ αντιστοιχεί σε κάθε $x \in [-1, 1]$ το μοναδικό $y \in [0, \pi]$ με $\cos y = x$. Πχ. $\arccos 0 = \pi/2$, $\arccos(-1) = \pi$, $\arccos 1 = 0$, $\arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

Προταση 2.4. *Για κάθε* $y \in (-1, 1)$ *ισχύει ότι* $(\arccos y)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

Αποδειξη. Έστω $y_0 \in (-1, 1)$ και $x_0 \in (0, \pi)$ με $y_0 = f(x_0) = \cos x_0$. Για κάθε $x \in (0, \pi)$ έχουμε $-1 < \sin x < 0$. Οπότε

$$f'(x) = (\cos x)' = \sin x = -\sqrt{1 - \mathit{cos}^2 x} \neq 0$$

και άρα από το Θεώρημα 2.1, για την $(f^{-1})'(y_0)$ παίρνουμε

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x_0}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y_0^2}}$$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $y_0 \in (-1, 1)$ έχουμε ότι $(\arccos y)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ για κάθε $y \in (-1, 1)$. □

Από την Πρόταση 2.4 έχουμε το παρακάτω πόρισμα.

Πορισμα 2.5.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\arccos x + c \tag{2.3}$$

και άρα για κάθε $-1 \le a < b \le 1$,

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos a - \arccos b \tag{2.4}$$

3. Η συνάρτηση τόξο ημιτόνου. Έστω

$$f(x) = \sin x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Η f είναι συνεχής, γνησίως αύξουσα και με σύνολο τιμών το $[-1,1]$. Άρα ορίζεται η αντίστροφή της που την συμβολίζουμε με $\arcsin x$, (διαβάζεται "τόξο ημιτόνου x"). Η συνάρτηση $\arcsin x$ έχει πεδίο ορισμού το $[-1,1]$, σύνολο τιμών το $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα.

Η συνάρτηση $\arcsin x$ αντιστοιχεί σε κάθε $x \in [-1,1]$ το μοναδικό τόξο $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ με $\sin y = x$. Πχ. $\arcsin 0 = 0$, $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$, $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Προταση 2.6. *Για κάθε* $y \in (-1,1)$ *ισχύει ότι* $(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

Αποδειξη. Έστω $y_0 \in (-1,1)$ και $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ με $f(x_0) = \sin x_0 = y_0$. Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε $0 < \cos x < 1$ και άρα

$$f'(x) = \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} \neq 0$$

Άρα από το Θεώρημα 2.1, παίρνουμε

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x_0}} = \frac{1}{\sqrt{1-y_0^2}}$$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $y_0 \in (-1,1)$ και η $f^{-1} = \arcsin$ έχουμε ότι $(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ για κάθε $y \in (-1,1)$. □

Από την Πρόταση 2.6 έχουμε το εξής πόρισμα.

Πορισμα 2.7.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c \tag{2.5}$$

Άρα για κάθε $-1 \le a < b \le 1$,

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x\big|_a^b = \arcsin b - \arcsin a \tag{2.6}$$

Τα Πορίσματα 2.7 και 2.5 φαίνεται να δίνουν διαφορετικό αποτέλεσμα για το ίδιο ολοκλήρωμα. Η εξήγηση είναι στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 2.8. *Για κάθε* $x \in [-1,1]$ *ισχύει ότι*

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x \tag{2.7}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την συνάρτηση $F(x) = \arccos x + \arcsin x,\ x \in [-1,1]$. Για κάθε $x \in (-1,1)$ έχουμε

$$F'(x) = (\arccos x + \arcsin x)' = (\arccos x)' + (\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

Από γνωστή συνέπεια του Θεωρήματος Μέσης Τιμής έπεται ότι η F είναι σταθερή. Επειδή

$$F(0) = \arccos 0 + \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$$

έπεται ότι $F(x) = \frac{\pi}{2}$ για κάθε $x \in [-1,1]$.

Άρα, $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$, για κάθε $x \in [-1,1]$. □

2. Ασκήσεις

Άσκηση 2.1. *Υπολογίστε τον αριθμό* $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$.

Λύση: Έστω $y = \arccos(3/5)$. Τότε $y \in [0,\pi]$ και $\cos y = 3/5$. Άρα $\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y} = 4/5$. Οπότε $\sin(\arccos(3/5)) = \sin y = 4/5$.

Άσκηση 2.2. *Ομοίως για τον* $\tan\left(\arcsin\frac{12}{13}\right)$.

Λύση: Έστω $y = \arcsin(12/13)$. Τότε $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ και $\sin y = 12/13$. Άρα $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = 5/13$. Οπότε

$$\tan\left(\arcsin\frac{12}{13}\right) = \tan y = \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{5}{13}$$

Άσκηση 2.3. *Δείξτε ότι αν* $x \neq 0$ *τότε*

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, \quad \text{αν } x > 0$$

και

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}, \quad \text{αν } x < 0$$

Λύση: Θα δείξουμε την περίπτωση όπου $x > 0$ (Η περίπτωση $x < 0$ αντιμετωπίζεται ανάλογα). Αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \arctan x + \arctan\frac{1}{x}, \quad x > 0$$

είναι σταθερή και ίση με $\pi/2$. Έχουμε

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

που σημαίνει ότι η $f(x), x > 0$ είναι σταθερή συνάρτηση. Επειδή

$$f(1) = \arctan 1 + \arctan 1 = 2\arctan 1 = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

έπεται ότι $f(x) = f(1) = \pi/2$ δηλαδή $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$.

Κεφάλαιο 3

ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Οι συναρτήσεις υπερβολικό συνημίτονο, υπερβολικό ημίτονο και υπερβολική εφαπτομένη

1.1. Η συνάρτηση υπερβολικό συνημίτονο. Η συνάρτηση

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{3.1}$$

καλείται *υπερβολικό συνημίτονο* και ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση $\cosh x$ είναι *άρτια* συνάρτηση δηλαδή

$$\cosh(-x) = \cosh x, \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{3.2}$$

αφού,

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh x$$

Επίσης,

$$\cosh x \geq 1, \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{3.3}$$

αφού αν θέσουμε $y = e^x$ τότε $y > 0$ και

$$\cosh x = \frac{y + \frac{1}{y}}{2} = \frac{y^2 + 1}{2y} \geq 1 \Leftrightarrow y^2 + 1 \geq 2y \Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (y-1)^2 \geq 0$$

Ακόμη, επειδή ο μέσος όρος δύο πραγματικών αριθμών είναι πάντα μεταξύ των αριθμών αυτών έχουμε ότι

$$e^{-x} < \cosh x < e^x, \ \forall x > 0 \tag{3.4}$$

και αντίστοιχα

$$e^x < \cosh x < e^{-x}, \ \forall x < 0 \tag{3.5}$$

Επίσης,

$$(\cosh x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{3.6}$$

Παρατηρούμε ότι $(\cosh x)' < 0$ για $x < 0$ και $(\cosh x)' > 0$ για $x > 0$. Άρα η $\cosh x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ με $\cosh(0) = 1$ να είναι η ελάχιστη τιμή της. Επιπλέον είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\lim_{x \to -\infty} \cosh x = \lim_{x \to +\infty} \cosh x = +\infty. \tag{3.7}$$

και άρα το σύνολο τιμών της $\cosh x$ (δηλαδή το σύνολο $\{\cosh x : x \in \mathbb{R}\}$) είναι το $[1, +\infty)$. Η καμπύλη που σχηματίζει η γραφική παράσταση της $\cosh x$ μοιάζει με παραβολή (δηλαδή σαν αυτήν της συνάρτησης x^2) και καλείται *αλυσσοειδής* γιατί είναι το σχήμα που παίρνει μια αλυσίδα όταν την κρεμάσουμε οριζόντια από τα δύο άκρα της.

1.2. Η συνάρτηση υπερβολικό ημίτονο. Η συνάρτηση

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{3.8}$$

καλείται *υπερβολικό ημίτονο* και ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση $\sinh x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι *περιττή* συνάρτηση δηλαδή

$$\sinh(-x) = -\sinh x \tag{3.9}$$

Έχουμε

$$(\sinh x)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x \tag{3.10}$$

και άρα η $\sinh x$ είναι γνησίως αύξουσα. Επειδή επιπλέον

$$\lim_{x\to-\infty} \sinh x = -\infty \text{ και } \lim_{x\to+\infty} \sinh x = +\infty \tag{3.11}$$

το σύνολο τιμών της είναι όλο το $\mathbb{R}$. Η γραφική της παράσταση μοιάζει με της συνάρτησης $f(x) = x^3$.

Παρατηρείστε ότι από την (3.6) έχουμε

$$(\cosh x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x \tag{3.12}$$

Επίσης είναι εύκολο να επαληθεύσουμε με πράξεις την εξής ταυτότητα

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,\ \forall x \in \mathbb{R} \tag{3.13}$$

Παρατηρηση 3.1. Η (3.13), δείχνει την σχέση των συναρτήσεων $\cosh x$ και $\sinh x$ με την ισοσκελή υπερβολή, δηλαδή την καμπύλη του επιπέδου που αποτελείται από όλα τα σημεία (x, y) που ικανοποιούν την σχέση $x^2 - y^2 = 1$. Πράγματι, αποδεικνύεται ότι ένα σημείο (x, y) του επιπέδου ανήκει στον δεξί κλάδο της ισοσκελούς υπερβολής αν και μόνο αν τα x, y γράφονται υπό την μορφή

$$\begin{cases} x = \cosh t \\ y = \sinh t \end{cases} \tag{3.14}$$

για κάποιο $t \in \mathbb{R}$. Αυτό το γεγονός έρχεται σε αναλογία με τα σημεία (x, y) του μοναδιαίου κύκλου του οποίου τα σημεία δίνονται από τις εξισώσεις

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \tag{3.15}$$

1.3. Η συνάρτηση υπερβολική εφαπτομένη. Η συνάρτηση

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},\ x \in \mathbb{R} \tag{3.16}$$

καλείται *υπερβολική εφαπτομένη*. Η $\tanh x$ είναι περιττή,

$$\tanh(-x) = -\tanh x,\ \forall x \in \mathbb{R} \tag{3.17}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι

$$(\tanh x)' = \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' = \frac{(\sinh x)' \cosh x - \sinh x (\cosh x)'}{\cosh^2 x}$$
$$= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} \tag{3.18}$$
$$= \frac{1}{\cosh^2 x} > 0$$

και άρα η $\tanh x$ είναι γνησίως αύξουσα. Επίσης,

$$\lim_{x \to +\infty} \tanh x = +1 \tag{3.19}$$

Πράγματι

$$\lim_{x \to +\infty} \tanh x = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1$$

Παρόμοια, έχουμε

$$\lim_{x \to -\infty} \tanh x = -1 \tag{3.20}$$

Με άλλα λόγια οι ευθείες $y = \pm 1$ αποτελούν οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης της $\tanh x$. Η γραφική παράσταση της $\tanh x$ μοιάζει με αυτήν της $\arctan x$.

2. Αντίστροφες Υπερβολικές Συναρτήσεις

Όπως είδαμε η συνάρτηση $\sinh x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μια γνησίως αύξουσα και άρα αντιστρέψιμη συνάρτηση. Η αντίστροφή της συμβολίζεται με $\sinh^{-1} x$.

Πρόταση 3.1. *(1) Η αντίστροφη της συνάρτησης* $\sinh x$ *δίνεται από τον τύπο*

$$\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right), \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{3.21}$$

(2) Η συνάρτηση $\sinh^{-1} x$, $x \in \mathbb{R}$ *είναι παραγωγίσιμη και ισχύει ότι*

$$\left(\sinh^{-1} x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \tag{3.22}$$

Συνεπώς,

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\, dx = \sinh^{-1} x + c = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) + c \tag{3.23}$$

Απόδειξη. (1) Έστω $x \in \mathbb{R}$ και έστω

$$y = \sinh^{-1} x \tag{3.24}$$

Άρα $x = \sinh y = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$. Θέτοντας $w = e^y$, έχουμε

$$x = \frac{w - \frac{1}{w}}{2} = \frac{w^2 - 1}{2w} \Leftrightarrow w^2 - 2xw - 1 = 0 \tag{3.25}$$

Η (3.25) έχει λύσεις

$$w_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

Επειδή $w = e^y > 0$ και $x - \sqrt{x^2+1} < 0$ παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} w = x + \sqrt{x^2+1} &\Leftrightarrow e^y = x + \sqrt{x^2+1} \\ &\Leftrightarrow y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \end{aligned}$$

(2) Από τον κανόνα παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης έχουμε

$$\begin{aligned} \left(\sinh^{-1} x\right)' &= \left(\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right)' \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)' \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot (x^2+1)'\right) \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x\right) \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}. \end{aligned}$$

□

Η συνάρτηση $\cosh x$, $x \in \mathbb{R}$ ως άρτια δεν είναι $1-1$ και άρα δεν αντιστρέφεται. Όμως αν περιοριστούμε στα $x \geq 0$ η $\cosh x$ είναι μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση από το $[0, +\infty)$ στο $[1, +\infty)$. Αν συμβολίσουμε με $\cosh^{-1} x$ την αντίστροφη της $\cosh x$ στο διάστημα $[0, +\infty)$ παίρνουμε την εξής πρόταση.

Πρόταση 3.2. *(1) Η αντίστροφη της συνάρτησης* $\cosh x$ *στο διάστημα* $[0, +\infty)$, *δίνεται από τον τύπο*

$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \quad \forall x \in [1, +\infty) \tag{3.26}$$

(2) Η συνάρτηση $\cosh^{-1} x$, $x \in [1, +\infty)$ *είναι παραγωγίσιμη και ισχύει ότι*

$$\left(\cosh^{-1} x\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \tag{3.27}$$

Συνεπώς,

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx = \cosh^{-1} x + c = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + c \tag{3.28}$$

Η απόδειξη της Πρότασης 3.2 είναοι ανάλογη με εκείνη της Πρότασης 3.1 και αφήνεται ως άσκηση.

Τέλος, όπως είδαμε η $\tanh x$ είναι μια γνησιως αύξουσα συνάρτηση από το $\mathbb{R}$ στο $(-1, 1)$. Η αντίστροφή της συμβολίζεται με $\tanh^{-1} x$ και είναι μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση από το $(-1, 1)$ στο $\mathbb{R}$.

Πρόταση 3.3. *(1) Η αντίστροφη της συνάρτησης* $\cosh x$ *στο διάστημα* $[0, +\infty)$, *δίνεται από τον τύπο*

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \ \forall x \in (-1, 1) \tag{3.29}$$

(2) Η συνάρτηση $\tanh^{-1} x$, $x \in (-1, 1)$ *είναι παραγωγίσιμη και ισχύει ότι*

$$\left(\tanh^{-1} x\right)' = \frac{1}{1-x^2} \tag{3.30}$$

Αποδειξη. (1) Έστω $x \in \mathbb{R}$. Τότε

$$\begin{aligned} y = \tanh^{-1} x \Leftrightarrow x = \tanh y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} \\ \Leftrightarrow e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \\ \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \left(\tanh^{-1} x\right)' &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)' \\ &== \frac{1}{2} \cdot \frac{1-x}{1+x} \cdot \left(\frac{1+x}{1-x}\right)' \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x^2} \end{aligned}$$

□

Κεφάλαιο 4

ΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Το ολοκλήρωμα μιας θετικής συνάρτησης $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ εκφράζει το εμβαδό κάτω από την γραφική της παράσταση μέχρι και τον άξονα των x, δηλαδή το εμβαδό του επίπεδου χωρίου

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \;\; 0 \leq y \leq f(x)\}$$

1. Βασικοί Ορισμοί

Έστω $[a,b]$ ένα κλειστό φραγμένο διάστημα του $\mathbb{R}$. Ένα πεπερασμένο υποσύνολο

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$$

του $[a,b]$ μικρότερο στοιχείο το a και μεγαλύτερο το b, θα καλείται ***διαμέριση*** του $[a,b]$. Αν $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ μια διαμέριση του $[a,b]$, τότε για κάθε $i = 1, \ldots, n$, με Δx_i συμβολίζουμε το μήκος του διαστήματος $[x_{i-1}, x_i]$, δηλαδή

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Η ***λεπτότητα*** της διαμέρισης $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ ορίζεται να είναι το μέγιστο από τα μήκη Δx_i και συμβολίζεται με $\lambda(P)$, δηλαδή,

$$\lambda(P) = \max\{\Delta x_i : i = 1, \ldots, n\}$$

Δεδομένης μιας διαμέρισης $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ του $[a,b]$, ένα υποσύνολο $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$ του $[a,b]$ τέτοιο ώστε

$$t_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

για κάθε $i = 1, \ldots, n$ θα καλείται ***επιλογή ενδιάμεσων σημείων ως προς την*** P.

Ορισμος 4.1. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ μια διαμέριση του $[a,b]$ και $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$ επιλογή ενδιάμεσων σημείων ως προς την P. Το άθροισμα*

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i = f(t_1)(x_1 - x_0) + f(t_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(t_n)(x_n - x_{n-1})$$

*καλείται **άθροισμα Riemann της** f **ως προς την διαμέριση** P **και την επιλογή** T και συμβολίζεται με $R(f,P,T)$.*

Ορισμος 4.2. *Μία συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ καλείται **ολοκληρώσιμη** αν υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός I με την εξής ιδιότητα : Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε*

$$|R(f,P,T) - I| < \epsilon$$

για κάθε διαμέριση P του $[a, b]$ και για κάθε επιλογή T ενδιάμεσων σημείων ως προς την P με $\lambda(P) < \epsilon$.

Ο αριθμός I με την παραπάνω ιδιότητα θα καλείται ***ολοκλήρωμα Riemann*** *ή απλά* ***ολοκλήρωμα*** *της f και συμβολίζεται με $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$.*

Ο παραπάνω ορισμός λέει ότι το ολοκλήρωμα της f είναι στην ουσία το όριο των αθροισμάτων Riemann καθώς η λεπτότητα των διαμερίσεων τείνει προς στο μηδέν. Συμβολικά γράφουμε

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\lambda(P)\to 0} R(f, P, T)$$

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα στην θεωρία ολοκλήρωσης είναι το εξής.

Θεωρημα 4.3. *Κάθε συνεχής συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη.*

Δεν είναι μόνο οι συνεχείς συναρτήσεις ολοκληρώσιμες. Πχ. αποδεικνύεται ότι κάθε μονότονη συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη ασχέτως αν είναι συνεχής ή όχι.

Επίσης, υπάρχουν συναρτήσεις που δεν είναι ολοκληρώσιμες. Για παράδειγμα η συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ αν } x \text{ ρητός} \\ 0 \text{ αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

αποδεικνύεται ότι δεν είναι ολοκληρώσιμη. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τα αθροίσματα Riemann δεν συγκλίνουν καθώς η λεπτότητα των διαμερίσεων τείνει στο μηδέν.

Αποδεικνύεται ότι το ολοκλήρωμα έχει τις επόμενες τρείς βασικές ιδιότητες.

Προταση 4.4. ***(Προσθετικότητα)*** *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και $c \in (a, b)$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στα $[a, c]$ και $[c.b]$ και ισχύει ότι*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

Προταση 4.5. ***(Μονοτονία)*** *Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Αν $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ τότε*

$$\int_a^b f\, dx \leq \int_a^b g\, dx$$

Προταση 4.6. ***(Γραμμικότητα)*** *Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε η συνάρτηση $\lambda f + \mu g$ είναι ολοκληρώσιμη και*

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)\, dx = \lambda \int_a^b f\, dx + \mu \int_a^b g\, dx$$

2. Αντιπαράγωγος και Ολοκλήρωμα

Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Μια συνάρτηση $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ θα καλείται *αντιπαράγωγος* (*ή αρχική συνάρτηση*) της f αν

(α) Η F είναι συνεχής στο $[a, b]$ και

(β) η F είναι παραγωγίσιμη στο (a, b) και $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$.

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής προκύπτει ότι αν μια συνάρτηση f έχει μια αντιπαράγωγο F τότε αυτή θα είναι στην ουσία μοναδική με την έννοια ότι όλες οι άλλες αντιπαράγωγοι της f θα είναι της μορφής $F + c$ όπου c σταθερά.[1]

Συνέπεια του Θεωρήματος Μέσης Τιμής και του ορισμού του ολοκληρώματος είναι και το εξής θεώρημα που συνδέει την Ολοκλήρωση με την Διαφόριση.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.7. ***(Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού)*** *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε η f έχει αντιπαράγωγο. Τότε $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, όπου F αντιπαράγωγος της f.*

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 4.1. Δεν έχουν όλες οι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις αντιπαράγωγο. Για παράδειγμα, αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{αν } x < 0 \\ 1 & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

είναι ολοκληρώσιμη αλλά δεν έχει αντιπαράγωγο.

Την διαφορά $F(b) - F(a)$ θα την συμβολίζουμε στην συνέχεια με $[F(x)]_a^b$. Επειδή, όπως είδαμε δύο αντιπαράγωγοι της f διαφέρουν κατά σταθερά, παρατηρείστε ότι η διαφορά $F(b) - F(a)$ είναι η ίδια όποια αντιπαράγωγο F της f και να επιλέξουμε. Το Θεώρημα 4.7 είναι χρήσιμο για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων. Μας λέει ότι για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$ μιας συνάρτησης f αρκεί να βρούμε μια αντιπαράγωγό της, δηλαδή μια συνάρτηση F με $F' = f$ και τότε το ολοκλήρωμα που θέλουμε να υπολογίσουμε είναι απλώς η διαφορά των τιμών της συνάρτησης F στα άκρα a και b του διαστήματος ολοκλήρωσης. Άρα το πρόβλημα του υπολογισμού ενός ολοκληρώματος είναι στην ουσία μια διαδικασία που είναι αντίστροφη σε αυτή της παραγώγου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.1. $\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$. Γενικότερα, για κάθε $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 x^k\,dx = \left[\frac{x^k}{k+1}\right]_0^1 = \frac{1}{k+1}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.2. $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1.$

---

[1] Πράγματι, έστω $F_1, F_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμες στο (a, b) τέτοιες ώστε $F_1'(x) = F_2'(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$. Ορίζουμε την συνάρτηση $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ με $G(x) = F_1(x) - F_2(x)$, για κάθε $x \in [a, b]$. Τότε η G είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) με $G'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = 0$ για κάθε $x \in (a, b)$. Άρα, από ΘΜΤ η G είναι σταθερή, δηλαδή υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ με $G(x) = c \Rightarrow F_1(x) - F_2(x) = c \Rightarrow F_1(x) = F_2(x) + c$.

Παραδειγμα 4.3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \; dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$

Ορισμος 4.8. *Το αόριστο ολοκλήρωμα (ή γενικό ολοκλήρωμα) μιας συνάρτησης $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ορίζεται να είναι το σύνολο όλων των αντιπαραγώγων της f. Το αόριστο ολοκλήρωμα της f θα συμβολίζεται με $\int f(x)\; dx$. Επειδή δύο αντιπαράγωγοι της f διαφέρουν κατά σταθερά, έχουμε ότι*

$$\int f(x) \; dx = \{F + c : c \in \mathbb{R}\}$$

όπου F είναι μια αντιπαράγωγος της f.

Στα επόμενα για απλότητα θα γράφουμε

$$\int f(x) \; dx = F(x) + c \quad \text{ή πιο απλά} \quad \int f(x) \; dx = F(x)$$

Άρα

$$\int f(x) \; dx = F(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

Πχ.

$$\int x^2 \; dx = \frac{x^3}{3}$$

$$\int \cos x \; dx = \sin x$$

$$\int \sin x \; dx = -\cos x$$

$$\int \frac{1}{x^2+1} \; dx = \arctan x$$

$$\int \frac{1}{x} \; dx = \ln|x| \; (\text{διότι } \ln|x|)' = \frac{1}{x} \text{ για κάθε } x \neq 0)$$

Στην περίπτωση όπου η f είναι συνεχής, έχουμε και το εξής θεώρημα.

Θεωρημα 4.9. ***(Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού για συνεχείς συναρτήσεις)*** *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Το΄τε η συνάρτηση $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ με $F(a) = 0$ και $F(x) = \int_a^x f(t) \; dt$ για κάθε $x \in (a, b]$ είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και ισχύει ότι $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$.*

3. Μεθοδοι Ολοκληρωσης

3.1. Ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Η πρώτη μέθοδος Ολοκλήρωσης είναι το ανάλογο του κανόνα παραγώγισης του γινομένου δύο συναρτήσεων: $(fg)' = f'g + fg'$ και καλείται *Ολοκλήρωση κατά παράγοντες*.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.10. *Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες με συνεχή παράγωγο. Τότε*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\ dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\ dx \tag{4.1}$$

ή με τον συμβολισμό του αορίστου ολοκληρώματος

$$\int f'(x)g(x)\ dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\ dx \tag{4.2}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επειδή $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ έχουμε ότι $f' \cdot g = (f \cdot g)' - f \cdot g'$. Άρα από την γραμμικότητα του ολοκληρώματος,

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(x)g(x)\ dx &= \int_a^b (f(x)g(x))'\ dx - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\ dx \\ &= [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\ dx.\end{aligned}$$

□

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.4.

$$\begin{aligned}\int_1^e \ln x\ dx = \int_1^e (x)' \ln x\ dx &= [x \ln x]_1^e - \int_1^e x(\ln x)'\ dx \\ &= [x \ln x]_1^e - \int_1^e x\frac{1}{x}\ dx \\ &= [x \ln x]_1^e - \int_1^e 1\ dx \\ &= [x \ln x]_1^e - [x]_1^e = [x \ln x - x]_1^e = [x(\ln x - 1)]_1^e\end{aligned}$$

3.2. Ολοκλήρωση με αντικατάσταση. Η δεύτερη μέθοδος ολοκλήρωσης είναι το αντίστοιχο του κανόνα παραγώγισης της σύνθεσης δύο συναρτήσεων (κανόνας αλυσίδας):

$$(F \circ \phi)'(t) = F'(\phi(t))\phi'(t)$$

και καλείται *ολοκλήρωση με αντικατάσταση* (ή *ολοκλήρωση με αλλαγή μεταβλητής*).

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.11. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής και έστω $\phi : [c,d] \to [a,b]$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο. Τότε*

$$\int_c^d f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)\ dt = \int_{\phi(c)}^{\phi(d)} f(x)\ dx \tag{4.3}$$

ή σε μορφή αορίστου ολοκληρώματος

$$\int f(\phi(t))\phi'(t)\ dt \overset{x=\phi(t),\ dx=\phi'(t)dt}{=} \int f(x)\ dx \tag{4.4}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια αντιπαράγωγος της f (υπάρχει από το Θεώρημα 4.9). Τότε, από το Θεώρημα 4.7,

$$\int_{\phi(c)}^{\phi(d)} f(x)\ dx = F(\phi(d)) - F(\phi(c)) = F \circ \phi\ (d) - F \circ \phi\ (c) \tag{4.5}$$

Από την άλλη μεριά, από τον κανόνα παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_c^d f(\phi(t))\cdot\phi'(t)\ dt &= \int_c^d F'(\phi(t))\cdot\phi'(t)\ dt \\ &= \int_c^d (F\circ\phi)'(t)\ dx \\ &= F\circ\phi\ (d) - F\circ\phi\ (c)\end{aligned} \tag{4.6}$$

Από (4.5) και (4.6) έπεται το συμπέρασμα. □

Στην πράξη για να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 5.4, θέτουμε

$$\text{“}x=\phi(t)\text{” και “}dx=\phi'(t)\ dt\text{”}$$

Παραδειγμα 4.5.

$$\int_a^b f(t)f'(t)\ dt \overset{x=f(t),\ dx=f'(t)\ dt}{=} \int_{f(a)}^{f(b)} x\ dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \left[\frac{f^2(x)}{2}\right]_a^b$$

Πχ.

$$\begin{aligned}\int_c^d \cos t\sin t\ dt &= \int_c^d \sin t(\sin t)'\ dt \\ &\overset{x=\sin t,\ dx=\cos t\ dt}{=} \int_{\sin c}^{\sin d} x\ dx = \frac{\sin^2 d-\sin^2 c}{2}\end{aligned}$$

Παραδειγμα 4.6. Έστω $\phi:[c,d]\to(0,+\infty)$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο. Τότε

$$\int_c^d \frac{\phi'(t)}{\phi(t)}\ dt \overset{x=f(t),\ dx=f'(t)\ dt}{=} \int_{\phi(c)}^{\phi(d)} \frac{dx}{x}\ dx = [\ln x]_{\phi(c)}^{\phi(d)} = \ln\phi(d)-\ln\phi(c)$$

Πχ.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/3}\tan t\ dt &= \int_0^{\pi/3}\frac{\sin t}{\cos t}\ dt = -\int_0^{\pi/3}\frac{(\cos t)'}{\cos t}\ dt \\ &\overset{x=\cos t}{=} -\int_1^{1/2}\frac{dx}{x} = \int_{1/2}^1\frac{dx}{x} = [\ln x]_{1/2}^1 = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2\end{aligned}$$

Παραδειγμα 4.7.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \arctan t\ dt = \int_1^e (t)'\arctan t\ dt &= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 t(\arctan t)'\ dt \\ &= [t\arctan t]_0^1 - \int_0^1 t\cdot\frac{1}{t^2+1}\ dt \\ &\overset{(x=t^2+1,\ dx=2tdt)}{=} \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_1^2\frac{1}{x}\ dx \\ &= \frac{\pi}{4} - [\ln x]_1^2 \\ &= \frac{\pi}{4} - \ln 2\end{aligned}$$

Παραδειγμα 4.8. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα
$$\int \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+x)}\ dx$$
Θέτουμε $u=\sqrt{x}$. Τότε $x=u^2$ οπότε $dx=2udu$ και άρα
$$\begin{aligned}\int \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+x)}\ dx &= 2\int \frac{\arctan u}{u(1+u^2)} u\ du\\ &= 2\int \frac{\arctan u}{1+u^2}\ du\\ &= 2\int \arctan u (\arctan u)'\ du\\ &= \int \left(\arctan^2 u\right)'\ du\\ &= \arctan^2 u = \arctan^2 \left(\sqrt{x}\right)^2.\end{aligned}$$

Ο τύπος (4.3), χρησιμοποιείται και από δεξιά προς τα αριστερά ως εξής: Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε ένα ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\ dx$. Αν $\phi : [c,d] \to [a,b]$ παραγωγίσιμη με $\phi(c)=a$ και $\phi(d)=b$ τότε ο τύπος (4.3) γράφεται ισοδύναμα
$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_c^d f(\phi(t))\phi'(t)\ dt \tag{4.7}$$
Στην πράξη, θέτουμε
$$x=\phi(t) \text{ και } dx=\phi'(t)\ dt$$
και γράφουμε
$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_c^d f(\phi(t))\phi'(t)\ dt$$
Το δύσκολο εδώ είναι να βρούμε την κατάλληλη συνάρτηση $\phi : [c,d] \to [a,b]$.

Παραδειγμα 4.9. Δείξτε ότι

(1) $\displaystyle\int \cos^2 t\ dt = \frac{1}{2}(\cos t \cdot \sin t + t)$

(2) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\ dx = \frac{1}{2}\Big(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\Big)$.

Αποδειξη. (1) Έχουμε,
$$\begin{aligned}\int \cos^2 t\ dt = \int \cos t \cdot (\sin t)'\ dt &= \cos t\cdot \sin t - \int (\cos t)' \sin t\ dt\\ &= \cos t\cdot\sin t + \int \sin t \sin t\ dt\\ &= \cos t\cdot\sin t + \int \sin^2 t\ dt\\ &= \cos t\cdot\sin t + \int \left(1-\cos^2 t\right)\ dt\\ &= \cos t\cdot\sin t + \int\ dt - \int \cos^2 t\ dt\\ &= \cos t\cdot\sin t + t - \int \cos^2 t\ dt\end{aligned}$$

και άρα

$$\int \cos^2 t \; dt = \frac{1}{2}(\cos t \cdot \sin t + t) \tag{4.8}$$

(2) Θέτουμε $x = \sin t \Leftrightarrow t = \arcsin x$, $t \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Τότε

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2} \; dx &= \int \sqrt{1-\sin^2 t} \; (\sin t)' \; dt \\ &= \int \cos^2 t \; dt \\ &= \frac{1}{2}(\cos t \cdot \sin t + t) \\ &= \frac{1}{2}(\cos(\arcsin x) \cdot \sin(\arcsin x) + \arcsin x) \\ &= \frac{1}{2}(x \cos(\arcsin x) + \arcsin x) \\ &= \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x)\end{aligned}$$

διότι $\sin(\arcsin x) = x$ και $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2}$. □

Το επόμενο παράδειγμα είναι το αντίστοιχο του Παραδείγματος 4.9 για Υπερβολικές συναρτήσεις. Θυμίζουμε ότι το υπερβολικό συνημίτονο ορίζεται να είναι η συνάρτηση

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \tag{4.9}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Αντίστοιχα το υπερβολικό ημίτονο είναι η συνάρτηση

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \tag{4.10}$$

και ορίζεται για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Ισχύουν οι εξής σχέσεις

$$(\cosh t)^2 - (\sinh t)^2 = 1 \tag{4.11}$$

Η συνάρτηση $\cosh t$ είναι θετική και ειδικότερα, $\cosh t \geq 1$ για όλα τα $t \in \mathbb{R}$. Άρα από την (4.11) έχουμε

$$\cosh t = \sqrt{1 + \sinh^2 t} \tag{4.12}$$

για όλα τα $t \in \mathbb{R}$. Αντίστοιχα, η $\sinh t$, $t \in \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα και η γραφ. παράσταση μοιάζει με αυτή της x^3.

Παραδειγμα 4.10. Δείξτε ότι

(1) $\displaystyle\int \cosh^2 t \; dt = \frac{\cosh t \sinh t + t}{2}$.

(2)

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+x^2} \; dx &= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \sinh^{-1} x\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right).\end{aligned}$$

Απόδειξη. (1) Έχουμε

$$\begin{aligned}\int \cosh^2 t\ dt = \int \cosh t(\sinh t)'\ dt &= \cosh t \sinh t - \int (\cosh t)' \sinh t\ dt \\ &= \cosh t \sinh t - \int \sinh^2 t\ dt \\ &= \cosh t \sinh t - \int (\cosh^2 t - 1)\ dt \\ &= \cosh t \sinh t - \int \cosh^2 t\ dt + t\end{aligned}$$

και άρα

$$\int \cosh^2 t\ dt = \frac{1}{2}(\cosh t \sinh t + t)$$

(2) Θέτοντας $x = \sinh t \Leftrightarrow t = \sinh^{-1} x$ και άρα $dx = (\sinh t)' dt = \cosh t\ dt$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+x^2}\ dx = \int \sqrt{1+\sinh^2 t} \cosh t\ dt = \int \cosh^2 t\ dt & \\ &= \frac{1}{2}(\cosh t \cdot \sinh t + t) \\ &= \frac{1}{2}\left(\cosh\left(\sinh^{-1} x\right) \cdot \sinh\left(\sinh^{-1} x\right) + \sinh^{-1} x\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\cosh\left(\sinh^{-1} x\right) \cdot x + \sinh^{-1} x\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \sinh^{-1} x\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right)\end{aligned}$$

επειδή $\sinh(\sinh^{-1} x) = x$, $\cosh^2(\sinh^{-1} x) - \sinh^2(\sinh^{-1} x) = 1 \Rightarrow \cosh^2(\sinh^{-1} x) - x^2 = 1 \Rightarrow \cosh(\sinh^{-1} x) = \sqrt{1+x^2}$ και $\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$. □

4. Γεωμετρικές Εφαρμογές του ολοκληρώματος

4.1. Εμβαδά επίπεδων χωρίων. Όπως είδαμε ο ορισμός του ολοκληρώματος συνδέεται άμεσα με τον υπολογισμό του εμβαδού του υπογραφήματος μιας μη αρνητικής συνάρτησης. Πιο συγκεκριμμένα έχουμε το εξής.

Θεωρημα 4.12. *Έστω $f : [a,b] \to [0,+\infty]$ συνεχής και μη αρνητική συνάρτηση και E το εμβαδό του υπογραφήματος της f (δηλαδή του χωρίου που αποτελείται από όλα τα σημεία (x,y) του επιπέδου με $a \leq x \leq b$ και $0 \leq y \leq f(x)$). Τότε ισχύει ότι*

$$E = \int_a^b f(x)\ dx$$

Με την βοήθεια του παραπάνω θεωρήματος μπορούμε να υπολογίσουμε τα εμβαδά πολλών σχημάτων όπως ενός κύκλου ή μιας έλλειψης.

Παραδειγμα 4.11. Το εμβαδό E ενός κύκλου ακτίνας R δίνεται από τον τύπο $E = \pi R^2$.

Απόδειξη. Ο κύκλος του $\mathbb{R}^2$ με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα R αποτελείται από όλα τα σημεία (x, y) που ικανοποιούν την σχέση

$$x^2 + y^2 = R^2 \tag{4.13}$$

Θεωρώντας το άνω ημικύκλιο, δηλαδή τα σημεία (x, y) με $y > 0$ και λύνοντας την (4.13) ως προς y βλέπουμε ότι αυτό είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad -R \leq x \leq R$$

Παρατηρούμε ότι το εμβαδό του κύκλου με κέντρο το $(0, 0)$ και ακτίνα R είναι το διπλάσιο του εμβαδού του ημικυκλίου, το οποίο με την σειρά του είναι το εμβαδό του υπογραφήματος της συνάρτησης f. Συνεπώς, από το Θεώρημα 4.12, έχουμε

$$E = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} = 2R\int_{-R}^{R} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}\, dx \tag{4.14}$$

και κάνωντας την αντικατάσταση $y = x/R$ $dy = dx/R$ παίρνουμε

$$E = 2R^2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - y^2}\, dy \tag{4.15}$$

Από το Παράδειγμα 4.9 έχουμε $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - y^2}\, dy = \pi/2$ και άρα

$$E = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} = 2R^2\frac{\pi}{2} = \pi R^2$$

□

Εντελώς ανάλογα υπολογίζεται και το εμβαδό μιας έλλειψης.

Παράδειγμα 4.12. Το εμβαδό E της έλλειψης $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ δίνεται από τον τύπο $E = \pi ab$.

Απόδειξη. Λύνοντας την εξίσωση $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ως προς y, έχουμε ότι συνάρτηση

$$f(x) = y = \sqrt{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \ x \in [-a, a]$$

έχει γραφική παράσταση το άνω τμήμα της έλλειψης $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Επομένως το εμβαδό της έλλειψης είναι

$$E = 2\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\frac{b}{a}\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = 2ba\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - y^2}\, dy = \pi ab$$

όπου θέσαμε $y = x/a$ και $dy = dx/a$ και χρησιμοποιήσαμε ότι $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - y^2}\, dy = \pi/2$ (Παράδειγμα 4.9). □

4.2. Μήκος επίπεδης καμπύλης. Με τον όρο *(επίπεδη) καμπύλη* θα εννοούμε ένα υποσύνολο του C του $\mathbb{R}^2$ για το οποίο υπάρχουν δύο συνεχείς συναρτήσεις

$$x(t), y(t) : I \to \mathbb{R}$$

όπου I ένα διάστημα του $\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = x(t) \quad \text{και } y = y(t),\ t \in [a, b]\}$$

Το ζεύγος $(x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ αποτελεί όπως λέμε *μια παραμετρική αναπαράσταση* της καμπύλης (δεν είναι μοναδική). Αν οι συναρτήσεις $x(t), y(t)$ είναι επιπλέον και παραγωγίσιμες ως προς t με συνεχείς παραγώγους τότε η καμπύλη θα καλείται *συνεχώς διαφορίσιμη*.

Αν $I = [a, b]$ τότε τα *άκρα* της καμπύλης ορίζονται να είναι τα σημεία $A = (x(a), y(a))$ και $B = (x(b), y(b))$. Αν τα άκρα ταυτίζονται η καμπύλη καλείται *κλειστή*. Αν για κάθε σημείο (x, y) της καμπύλης εκτός ίσως των άκρων υπάρχει μοναδικό $t \in (a, b)$ με $x = x(t)$ και $y = y(t)$ τότε η καμπύλη καλείται *απλή*.

Το *μήκος* της C ορίζεται μέσω των τεθλασμένων γραμμών με κορυφές σημεία της καμπύλης. Αποδεικνύεται ότι αν μια καμπύλη C έχει μια παραμετρική αναπαράσταση $(x(t), y(t))$ $t \in [a, b]$ είναι απλή και συνεχώς διαφορίσιμη τότε το μήκος $L(C)$ της καμπύλης δίνεται από τον τύπο

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt \tag{4.16}$$

Ειδικότερα, αν η C είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο τότε

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx \tag{4.17}$$

(στην περίπτωση αυτή μια παραμετρική αναπαράσταση της C δίνεται απ·ο τους τύπους $x(t) = t$ και $y(t) = f(t)$ για κάθε $t \in [a, b]$).

Παραδειγμα 4.13. Το μήκος (περιφέρεια) L ενός κύκλου ακτίνας $R > 0$ δίνεται από τον τύπο $L = 2\pi R$.

Αποδειξη. Πράγματι, οι συναρτήσεις

$$x(t) = R\cos t, \quad y(t) = R\sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

αποτελούν παραμετρικές εξισώσεις ενός κύκλου ακτίνας $R > 0$ και κέντρου $(0, 0)$. Άρα, από τον τύπο (4.16), έχουμε

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t}\, dt = R^2 \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt = R^2 \int_0^{2\pi} dt = 2\pi R.$$

□

Παραδειγμα 4.14. Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$. Βρείτε το μήκος της καμπύλης της γραφικής παράστασης της f.

Αποδειξη. Έχουμε

$$L=\int_0^1 \sqrt{1+(f'(x))^2}\ dx=\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\ dx=\frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{1+y^2}\ dy$$

όπου θέσαμε $y=2x$ και $dy=2dx$. Από το Παράδειγμα 4.10 έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^2 \sqrt{1+y^2}\ dx &= \frac{1}{2}\left[\left(y\sqrt{1+y^2}+\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)\right)\right]_0^2\\ &=\frac{1}{2}\left(2\sqrt{5}+\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right)\\ &=\sqrt{5}+\ln\sqrt{2+\sqrt{5}}\end{aligned}$$

□

Παραδειγμα 4.15. Υπολογίστε το μήκος της καμπύλης με παραμετρική αναπαράσταση

$$x(t)=\cos^3 t,\ y(t)=\sin^3 t,\ t\in[0,\pi/2]$$

Αποδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned}L&=\int_0^{\pi/2}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt\\ &=\int_0^{\pi/2}\sqrt{(3\ \cos^2 t\,(-\sin t))^2\ +\ (3\ \sin^2 t\ \cos t)^2}\ dt\\ &=\int_0^{\pi/2}\sqrt{9\ \cos^4 t\ \sin^2 t\ +\ 9\ \sin^4 t\ \cos^2 t}\ dt\\ &=\int_0^{\pi/2}\sqrt{9\ \cos^2 t\ \sin^2 t\,(\cos^2 t+\sin^2 t)}\ dt\\ &=\int_0^{\pi/2} 3\,|\cos t\cdot\sin t|\ dt=3\int_0^{\pi/2}\cos t\cdot\sin t\ dt\end{aligned}$$

(αφού $\sin t, \cos t\geq 0$ όταν $0\leq t\leq \pi/2$). Επειδή

$$\int_0^{\pi/2}\cos t{\cdot}\sin t\ dt=\int_0^{\pi/2}(\sin t)'{\cdot}\sin t\ dt=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(\sin^2 t)'\ dt=\frac{1}{2}\left(\sin^2(\pi/2)-\sin^2(0)\right)=1/2$$

παίρνουμε τελικά $L=3/2$. □

Παραδειγμα 4.16. Να βρεθεί το μήκος της καμπύλης με εξίσωση $y=\ln(1-x^2)$, $x\in[0,1/2]$.

Αποδειξη. Έχουμε $f(x)=\ln(1-x^2)$ και άρα

$$f'(x)=\frac{1}{1-x^2}(1-x^2)'=\frac{-2x}{1-x^2}$$

για κάθε $x \in [0, 1/2]$. Συνεπώς

$$
\begin{aligned}
L = \int_0^{1/2} \sqrt{1 + \frac{4x^2}{(1-x^2)^2}}\ dx &= \int_0^{1/2} \sqrt{\frac{(1+x^2)^2}{(1-x^2)^2}}\ dx \\
&= \int_0^{1/2} \frac{1+x^2}{1-x^2}\ dx \\
&= \int_0^{1/2} \frac{2-(1-x^2)}{1-x^2}\ dx \\
&= \int_0^{1/2} \left(\frac{2}{1-x^2} - 1 \right)\ dx \\
&= \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - 1 \right)\ dx \\
&= [-\ln(1-x) + \ln(1+x) - x]_0^{1/2} \\
&= \left[\ln \frac{1+x}{1-x} - x \right]_0^{1/2} = \ln 3 - \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

□

5. Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

Με τον όρο *ρητή συνάρτηση* εννοούμε μια συνάρτηση της μορφής $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ όπου $P(x), Q(x)$ πολυώνυμα με πραγματικο'υς συντελεστές. Αν ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x)$ που βρίσκεται στον αριθμητή είναι γνήσια μεγαλύτερος από τον βαθμό του πολυωνύμου $Q(x)$ που είναι στον παρονομαστή τότε από την ταυτότητα της διαίρεσης των πολυωνύμων υπάρχουν δύο μοναδικά πολυώνυμα $\Pi(x)$ (*το πηλίκο*) και $R(x)$ (*το υπόλοιπο*) με τον βαθμό του $R(x)$ να είναι γνήσια μικρότερος του βαθμού του $Q(x)$ τέτοια ώστε $P(x) = \Pi(x) \cdot Q(x) + R(x)$ και άρα

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \Pi(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Οπότε,

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\ dx = \int \Pi(x)\ dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\ dx \tag{4.18}$$

Επειδή το ολοκλήρωμα ενός πολυωνύμου υπολογίζεται εύκολα,

$$
\begin{aligned}
\int (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0)\ dx &= a_n \int x^n\ dx + \cdots + a_1 \int x\ dx + a_0 \int dx \\
&= \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \cdots + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x
\end{aligned}
$$

από την σχέση (4.18) βλέπουμε ότι η ολοκλήρωση μιας ρητής συνάρτησης ανάγεται στην ολοκλήρωση μιας ρητής συνάρτησης όπου ο βαθμός του αριθμητή είναι *γνήσια μικρότερος* του βαθμού του παρονομαστή. Τέτοιες ρητές συναρτήσεις τις καλούμε *γνήσιες*.

Για να ολοκληρώσουμε μια γνήσια ρητή συνάρτηση χρησιμοποιούμε μια μέθοδο που καλείται *διάσπαση σε απλά κλάσματα*. Το πρώτο βήμα αυτής της μεθόδου είναι η παραγοντοποίηση του παρονομαστή.

Αποδεικνύεται ότι ένα πολυώνυμο $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ με πραγματικούς συντελεστές και συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου $a_{n+1}=1$ παραγοντοποιείται με μοναδικό τρόπο σε ένα γινόμενο πρωτοβαθμίων όρων της μορφής $x-\rho$, όπου $\rho\in\mathbb{R}$ και σε ένα γινόμενο δευτεροβαθμίων όρων (τριωνύμων) της μορφής x^2+bx+c, τα οποία δεν έχουν πραγματικές ρίζες, με άλλα λόγια η διακρίνουσά τους είναι αρνητική. Πιο συγκεκριμένα έχουμε το εξής.

Θεωρημα 4.13. *Κάθε πολυώνυμο $Q(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ με πραγματικούς συντελεστές και συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου $a_{n+1}=1$ γράφεται στην μορφή*

$$Q(x)=Q_1(x)\cdot Q_2(x)$$

όπου

$$Q_1(x)=\prod_{i=1}^{m}(x-\rho_i)^{n_i} \text{ και } Q_2(x)=\prod_{j=1}^{\ell}(x^2+b_jx+c_j)^{k_j} \tag{4.19}$$

όπου $n_i,k_j\in\mathbb{N}$, $\rho_i,b_j,c_j\in\mathbb{R}$ και $\Delta_j=b_j^2-4c_j<0$.

Την μορφή $Q(x)=Q_1(x)\cdot Q_2(x)$ με $Q_1(x),Q_2(x)$ όπως στην (4.19) θα την καλούμε *ανάλυση του $Q(x)$*. Αντιστοιχεί κατά κάποιο τρόπο στην γνωστή ανάλυση των ακεραίων σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Όπως οι πρώτοι αριθμοί δεν γράφονται ως γινόμενο μικρότερων αριθμών, τα πρωτοβάθμια πολυώνυμα καθώς και τα δευτεροβάθμια με αρνητική διακρίνουσα είναι τα μοναδικά πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές που δεν μπορούν να αναλυθούν σε γινόμενο άλλων απλούστερης μορφής.

Η διάσπαση τώρα μιας ρητής συνάρτησης σε απλά κλάσματα περιγράφεται στο επόμενο θεώρημα.

Θεωρημα 4.14. *Έστω $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ μία γνήσια ρητή συνάρτηση.*

(1) *Αν $Q(x)=(x-\rho)^n\cdot G(x)$, όπου $\rho\in\mathbb{R}$ και το $x-\rho$ δεν διαιρεί το $G(x)$ (ισοδύναμα $G(\rho)\neq 0$) τότε υπάρχουν μοναδικοί $A_1,\ldots,A_n\in\mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε*

$$\frac{P(x)}{(x-\rho)^n\cdot G(x)}=\frac{A_1}{x-\rho}+\cdots+\frac{A_n}{(x-\rho)^n}+\frac{R(x)}{G(x)} \tag{4.20}$$

όπου ο βαθμός του $R(x)$ είναι γνήσια μικρότερος του βαθμού του $G(x)$.

(2) *Αν $Q(x)=(x^2+bx+c)^k\cdot G(x)$ με $\Delta=b^2-4c<0$ και το x^2+bx+c δεν διαιρεί το $G(x)$, τότε υπάρχουν μοναδικοί $B_1,C_1,\ldots,B_k,C_k\in\mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε*

$$\frac{P(x)}{(x^2+bx+c)^k\cdot G(x)}=\frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c}+\cdots+\frac{B_kx+C_k}{(x^2+bx+c)^k}+\frac{R(x)}{G(x)} \tag{4.21}$$

όπου ο βαθμός του $R(x)$ είναι γνήσια μικρότερος του βαθμού του $G(x)$.

Παραδειγμα 4.17. Να αναλυθεί η συνάρτηση $\dfrac{10x}{(x+1)(x^2+9)}$ σε απλά κλάσματα.

Αποδειξη. Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.14 έχουμε

$$\frac{10x}{(x+1)(x^2+9)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+9} \tag{4.22}$$

όπου $A, B, C \in \mathbb{R}$.

Για να βρούμε τις σταθερές A, B, C εργαζόμαστε ως εξής: Κάνοντας ομώνυμα τα κλάσματα και εκτελώντας τις πράξεις στο δεξί μέλος της (4.22) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\frac{10x}{(x+1)(x^2+9)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+9} \\ &= \frac{A(x^2+9)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+9)} \\ &= \frac{(A+B)x^2+(B+C)x+9A+C}{(x+1)(x^2+9)}\end{aligned}$$

και άρα

$$(A+B)x^2+(B+C)x+9A+C = 10x$$

Συνεπώς έχουμε το σύστημα

$$A+B=0, B+C=10, 9A+C=0$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι

$$A=-1, B=1, C=9$$

Άρα

$$\frac{10x}{(x+1)(x^2+9)} = -\frac{1}{x+1} + \frac{x+9}{x^2+9}$$

□

Από το Θεώρημα 4.14 έχουμε ότι η ολοκλήρωση των γνήσια ρητών συναρτήσεων ανάγεται στην ολοκλήρωση κλασμάτων της μορφής

$$\frac{1}{(x-\rho)^n} \quad \text{και} \quad \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^k} \text{ με } b^2-4c<0$$

Ολοκληρώματα της μορφής $\displaystyle\int \frac{1}{(x-\rho)^n}\, dx$ είναι εύκολο να υπολογισθούν. Πράγματι, κάνοντας την αντικατάσταση $t = x-\rho$ έχουμε την εξής πρόταση.

Προταση 4.15. *Για κάθε $\rho \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$ έχουμε*

$$\int \frac{1}{(x-\rho)^n}\, dx = \begin{cases} \ln|x-\rho|, & \text{αν } n=1 \\ -\dfrac{1}{n-1}\cdot\dfrac{1}{(x-\rho)^{n-1}}, & \text{αν } n\geq 2\end{cases}$$

Ολοκληρώματα της μορφής $\displaystyle\int \frac{Bx+c}{(x^2+bx+c)^k}\, dx$ με κατάλληλη αντικατάσταση $x=\phi(t)$ μετατρέπονται εύκολα (Παραδείγματα 4.18 και 4.19 παρακάτω) σε ένα γραμμικό συνδυασμό ολοκληρωμάτων της μορφής

$$\int \frac{t}{(t^2+1)^k}\, dt \text{ και } \int \frac{1}{(t^2+1)^k}\, dt$$

Για τα ολοκληρώματα της πρώτης μορφής έχουμε την εξής πρόταση.

Πρόταση 4.16. *Ισχύει ότι*

$$\int \frac{t}{(t^2+1)^k}\ dt = \begin{cases} \ln\sqrt{t^2+1} \ \text{αν } k=1 \\ -\dfrac{1}{2(k-1)}\cdot\dfrac{1}{(t^2+1)^{k-1}} \ \text{αν } k\geq 2 \end{cases} \tag{4.23}$$

Απόδειξη. Θέτουμε $u = t^2+1$, $du = 2tdt$. Αν $k=1$ τότε $\displaystyle\int \frac{t}{(t^2+1)}\ dt = \frac{1}{2}\int\frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln u = \ln\sqrt{t^2+1}$. Αν $k\geq 2$, $\displaystyle\int\frac{t}{(t^2+1)^k}\ dt = \frac{1}{2}\int\frac{du}{u^k} = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{-k+1}}{-k+1} = -\frac{1}{2(k-1)}\cdot\frac{1}{u^{k-1}} = -\frac{1}{2(k-1)}\cdot\frac{1}{(t^2+1)^{k-1}}$. □

Τα ολοκληρώματα της δεύτερης μορφής υπολογίζονται αναδρομικά.

Πρόταση 4.17. *(α)* $\displaystyle\int\frac{1}{t^2+1}\ dt = \arctan t.$

(β) Αν θέσουμε $I_k = \dfrac{1}{(t^2+1)^k}\ dt$ *τότε*

$$I_{k+1} = \left(1-\frac{1}{2k}\right)I_k + \frac{1}{2k}\cdot\frac{t}{(t^2+1)^k}.$$

Απόδειξη. (α) Άμεσο, αφού $(\arctan t)' = \dfrac{1}{t^2+1}$.

(β) Παρατηρούμε ότι

$$\left(\frac{1}{(t^2+1)^k}\right)' = -\frac{k(t^2+1)^{k-1}2t}{(t^2+1)^{2k}} = -2k\cdot\frac{t}{(t^2+1)^{k+1}} \tag{4.24}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
\int\frac{1}{(t^2+1)^{k+1}}\ dt &= \frac{t^2+1-t^2}{(t^2+1)^{k+1}} \\
&= \int\frac{t^2+1}{(t^2+1)^{k+1}}\ dt - \int\frac{t^2}{(t^2+1)^{k+1}}\ dt \\
&= \int\frac{1}{(t^2+1)^k}\ dt - \int\frac{t^2}{(t^2+1)^{k+1}}\ dt \\
&= I_k - \int t\cdot\frac{t}{(t^2+1)^{k+1}}\ dt \\
&\overset{(4.24)}{=} I_k + \frac{1}{2k}\int t\cdot\left(\frac{1}{(t^2+1)^k}\right)'\ dt \\
&= I_k + \frac{1}{2k}\left(t\cdot\frac{1}{(t^2+1)^k} - \int(t)'\cdot\frac{1}{(t^2+1)^k}\ dt\right) \\
&= I_k + \frac{1}{2k}\left(\frac{t}{(t^2+1)^k} - I_k\right) \\
&= \left(1-\frac{1}{2k}\right)I_k + \frac{1}{2k}\cdot\frac{t}{(t^2+1)^k}.
\end{aligned}$$

□

Παραδειγμα 4.18. Να βρεθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{10x}{(x+1)(x^2+9)}\ dx$.
Από το Παράδειγμα 4.17 έχουμε

$$\frac{10x}{(x+1)(x^2+9)} = -\frac{1}{x+1} + \frac{x+9}{x^2+9}$$

Άρα

$$\int \frac{10x}{(x+1)(x^2+9)}\ dx = -\int \frac{1}{x+1}\ dx + \int \frac{x+9}{x^2+9}\ dx \tag{4.25}$$

Έχουμε

$$\int \frac{1}{x+1}\ dx = \ln|x+1|.$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα έχουμε

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+9}{x^2+9}\ dx &= \frac{1}{9}\int \frac{x+9}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}\ dx \\
&\overset{t=x/3, dx=3dt}{=} \frac{1}{9}\int \frac{3t+9}{t^2+1}\ 3\ dt \\
&= \int \frac{t+3}{t^2+1}\ dt \\
&= \int \frac{t}{t^2+1}\ dt + \int \frac{3}{t^2+1}\ dt \\
&\overset{u=t^2+1, du=2t\ dt}{=} \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} + 3\int \frac{1}{t^2+1}\ dt \\
&= \frac{1}{2}\ln|u| + 3\arctan t = \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + 3\arctan t \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{9}+1\right) + 3\arctan\left(\frac{x}{3}\right) = \ln\sqrt{\frac{x^2}{9}+1} + 3\arctan\left(\frac{x}{3}\right).
\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned}
\frac{10x}{(x+1)(x^2+9)} &= -\ln|x+1| + \ln\sqrt{\frac{x^2}{9}+1} + 3\arctan\left(\frac{x}{3}\right) \\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{\frac{x^2}{9}+1}}{|x+1|}\right) + 3\arctan\left(\frac{x}{3}\right)
\end{aligned}$$

Παραδειγμα 4.19. Βρείτε το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{x^2+2x+5}\ dx$.

Έχουμε

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2+2x+5}\ dx &= \int \frac{1}{x^2+2x+1-1+5} \\
&= \int \frac{1}{(x+1)^2+4} \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\ dx \\
&\overset{t=\frac{x+1}{2},\ dt=dx/2}{=} \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\ dt = \frac{1}{2}\arctan t \\
&= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Παραδειγμα 4.20. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+x}\ dx$.

Έχουμε

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^3+x}\ dx &= \int \frac{1}{x(x^2+1)}\ dx \\
&= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)\ dx \\
&= \int \frac{1}{x}\ dx - \int \frac{x}{x^2+1}\ dx \\
&= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)
\end{aligned}$$

Παραδειγμα 4.21. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{x}{x^2+4x+5}\ dx$$

Έχουμε

$$\int \frac{x}{x^2+4x+5}\ dx = \int \frac{x}{x^2+4x+4+1}\ dx = \int \frac{x}{(x+2)^2+1}\ dx.$$

Θέτουμε $y = x+2$ και άρα $x = y-2$ και $dx = dy$. Οπότε

$$\int \frac{x}{x^2+4x+5}\ dx = \int \frac{y-2}{y^2+1}\ dy = \int \frac{y}{y^2+1}\ dy - 2\int \frac{1}{y^2+1}\ dy$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα θέτουμε $z = y^2+1$ και άρα $dz = 2ydy \Rightarrow ydy = dz/2$. Συνεπώς,

$$\int \frac{y}{y^2+1}\ dy = \frac{1}{2}\int \frac{1}{z}\ dz = \frac{1}{2}\ln z = \frac{1}{2}\ln(y^2{+}1) = \frac{1}{2}\left(\ln(x+2)^2+1\right) = \ln\sqrt{(x+2)^2+1}.$$

Για το δεύτερο έχουμε

$$\int \frac{1}{y^2+1}\ dy = \arctan y = \arctan(x+2).$$

Τελικά,

$$\int \frac{x}{x^2+4x+5}\ dx = \ln\sqrt{(x+2)^2+1} - 2\arctan(x+2).$$

Παράδειγμα 4.22. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}\, dx$.

Κάνουμε την αντικατάσταση $t = e^x$ και άρα $dt = e^x dx = t dx$, οπότε

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}\, dx = \int \frac{t+1}{t^2+1}\cdot\frac{1}{t}\, dt = \int \frac{t+1}{t(t^2+1)}\, dt &= \int \frac{t}{t(t^2+1)}\, dt + \int \frac{1}{t(t^2+1)}\, dt \\ &= \int \frac{1}{t^2+1}\, dt + \int \frac{1}{t(t^2+1)}\, dt \\ &= \arctan t + \int \frac{1}{t(t^2+1)}\, dt.\end{aligned}$$

Με απλά κλάσματα βλέπουμε ότι

$$\int \frac{1}{t(t^2+1)}\, dt = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1}\right) dt = \int \frac{1}{t}\, dt - \int \frac{t}{t^2+1}\, dt = \ln t - \frac{1}{2}\ln(t^2+1).$$

Από τα παραπάνω και αφού $e^x = t$, παίρνουμε

$$\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}\, dx = \arctan(e^x) + x - \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1).$$

Παράδειγμα 4.23. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos x+\sin x}\, dx$.

Θέτουμε

$$x = 2\arctan t \Leftrightarrow t = \tan\frac{x}{2}$$

και άρα

$$dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt$$

Από γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες έχουμε

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \text{και} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

Με τις παραπάνω αντικαταστάσεις το ολοκλήρωμα γράφεται

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos x+\sin x}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\, dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\, dt = \ln 2.$$

Κεφάλαιο 5

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ-ΤΟΠΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ

1. Βασικές έννοιες στον χώρο $\mathbb{R}^n$

Ο *διανυσματικός χώρος* $\mathbb{R}^n$ είναι το σύνολο όλων των *σημείων (ή διανυσμάτων)* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, (όπου $x_i \in \mathbb{R}$ για κάθε $1 \leq i \leq n$), εφοδιασμένο με τις πράξεις της *πρόσθεσης*:

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

για κάθε $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ και του *βαθμωτού πολλαπλασιασμού*:

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και κάθε $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Τα διανύσματα $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $\mathbf{e}_n = (0, \ldots, 0, 1)$ αποτελούν την λεγόμενη *συνήθη βάση* του $\mathbb{R}^n$. Παρατηρείστε ότι αν $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ είναι ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$ τότε

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i.$$

Ορισμος 5.1. *Για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ορίζουμε την **νόρμα)** του $\mathbf{x}$ να είναι η ποσότητα*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Επίσης είναι εύκολο να διαπιστώσουμε τις παρακάτω ιδιότητες της νόρμας:

1. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ και $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$.
2. $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|$.
3. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

Ορισμος 5.2. *Για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, η ποσότητα*

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$$

*καλείται **απόσταση** των $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$.*

Από τις ιδιότητες της νόρμας προκύπτει ότι

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}, \quad \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|$$

και

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}-\mathbf{z}\| + \|\mathbf{z}-\mathbf{y}\|$$

για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$.

Ορισμος 5.3. *Έστω* $\mathbf{x}_0 = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *και* $\delta > 0$. *Το σύνολο*

$$B_\delta(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| < \delta\}$$

καλείται ***ανοικτή μπάλα του*** $\mathbb{R}^n$ ***κέντρου*** x_0 ***και ακτίνας*** δ.

Με άλλα λόγια το $B_r(\mathbf{x}_0)$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ που απέχουν απο το $\mathbf{x}_0$ απόσταση *γνήσια μικρότερη* του δ. Οι ανοικτές μπάλες $B_\delta(\mathbf{x}_0)$ καλούνται και *(βασικές ανοικτές) περιοχές* του $\mathbf{x}_0$.

2. Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Οι συναρτήσεις αυτές ταξινομούνται ως εξής:

(I) ***Πραγματικές*** (ή ***βαθμωτές.***) Είναι οι συναρτήσεις της μορφής $f : X \to \mathbb{R}$ όπου $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Μερικά παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων είναι τα ακόλουθα:

1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = x^2 + y^2$.

2) $f : D \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ όπου $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$ είναι ο κλειστός μοναδιαίος δίσκος του $\mathbb{R}^2$.

3) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

4) $f : B \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$, όπου $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ είναι η κλειστή μοναδιαία μπάλα του $\mathbb{R}^3$.

Στην Φυσική συναρτήσεις της μορφής $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ χρησιμοποιούνται για να αντιστοιχίσουν βαθμωτά φυσικά μεγέθη (όπως πχ. η θερμοκρασία, η ατμοσφαιρική πίεση) στα σημεία του χώρου.

(II) ***Διανυσματικές Συναρτήσεις μιας μεταβλητής.*** Είναι συναρτήσεις της μορφής $f : X \to \mathbb{R}^m$ όπου $X \subseteq \mathbb{R}$ και $m \geq 2$. Συνήθως το σύνολο X είναι ένα διάστημα του $\mathbb{R}$. Μερικά παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων είναι τα ακόλουθα:

1) $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ με τύπο $f(t) = (\cos t, \sin t)$.

2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με τύπο $f(t) = (t, t^2)$.

3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με τύπο $f(t) = (\cos t, \sin t, t)$.

4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ με τύπο $f(t) = \big(t, t^2, \ldots, t^m\big)$.

Οι συναρτήσεις $f : X \to \mathbb{R}^m$ με $X \subseteq \mathbb{R}$ γράφονται πάντα στην μορφή

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_m(t)), \quad t \in X \subseteq \mathbb{R}$$

όπου $f_1(t), \ldots, f_m(t)$ είναι πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής από το X στο $\mathbb{R}$.

Αν $X = I$ είναι ένα διάστημα του $\mathbb{R}$ τότε οι συναρτήσεις $f : I \to \mathbb{R}^m$ μετασχηματίζουν το διάστημα I του $\mathbb{R}$ σε μια *m-διάστατη καμπύλη*. Πχ. η $f(t) = (\cos t, sint)$, μετασχηματίζει το διάστημα $[0, 2\pi]$ στον μοναδιαίο κύκλο, η $f(t) = (t, t^2)$ μετασχηματίζει την ευθεία στην παραβολή $y = x^2$. Θεωρώντας τη μεταβλητή t σαν χρόνο συναρτήσεις της μορφής $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$ χρησιμοποιούνται στην Φυσική για να απεικονίζουν την θέση ενός κινητού στον χώρο την χρονική στιγμή t.

(III) ***Διανυσματικές Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.*** Είναι συναρτήσεις της μορφής $f : X \to \mathbb{R}^m$ όπου $X \subseteq \mathbb{R}^n$ και $n, m \geq 2$ (αν $n = m$ οι συναρτήσεις αυτές καλούνται και *διανυσματικά πεδία*).

Παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων είναι τα ακόλουθα:

1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με τύπο

$$f(x, y, z) = \left(-\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, -\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, -\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right)$$

2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με τύπο $f(x, y) = \left(-\dfrac{y}{x^2 + y^2}, \dfrac{x}{x^2 + y^2} \right)$.

3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με τύπο $f(x, y) = (-y, x)$.

Τα διανυσματικά πεδία χρησιμοποιούνται στην Φυσική για να περιγράψουν ένα πεδίο βαρύτητας, ή ένα πεδίο ταχύτητας ρευστού.

Αν $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ τότε το *γράφημα* της f ορίζεται να είναι το σύνολο

$$Gr(f) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : \ \mathbf{x} \in X \text{ και } \mathbf{y} = f(\mathbf{x})\} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}. \tag{5.1}$$

Ειδικότερα αν $m = 1$ δηλαδή η f είναι βαθμωτή, γράφοντας το $\mathbf{x}$ ως $(x_1, \ldots, x_n)$ και θέτοντας $x_{n+1} = y$ το γράφημα παίρνει και την μορφή:

$$Gr(f) = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \ (x_1, \ldots, x_n) \in X \text{ και } x_{n+1} = f(x_1, \ldots, x_n)\} \tag{5.2}$$

οπότε αν επιπλέον $X = \mathbb{R}^n$,

$$Gr(f) = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = f(x_1, \ldots, x_n)\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \tag{5.3}$$

Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x, y) = x^2 + y^2$ έχει γράφημα το σύνολο $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$ που αποτελεί μια διδιάστατη επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ (είναι το λεγόμενο *παραβολοειδές* που προκύπτει από την περιστροφή της $y = x^2$ γύρω απο τον άξονα των x). Γενικά το γράφημα μιας βαθμωτής συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ αποτελεί μια "n-διάστατη επιφάνεια" του $\mathbb{R}^{n+1}$.

3. Μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών

Ορισμος 5.4. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$.*

(1) Ένα σημείο $\mathbf{x}_0 \in A$ θα καλείται ***εσωτερικό*** *σημείο του A αν το A περιέχει μια ανοικτή μπάλα με κέντρο το $\mathbf{x}_0$, δηλαδή υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B_\delta(\mathbf{x}_0) \subseteq A$.*

(2) Το A θα καλείται ***ανοικτό*** *αν κάθε σημείο του είναι εσωτερικό του σημείο.*

Ορισμος 5.5. *(**Μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης**) Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $(x_0, y_0) \in A$.*

Το όριο

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

*αν υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός καλείται **μερική παράγωγος ως προς** x της συνάρτησης f στο σημείο (x_0, y_0) και συμβολίζεται με*

$$f_x(x_0, y_0) \quad \text{ή} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Ομοίως το όριο

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

*αν υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός καλείται **μερική παράγωγος ως προς** y της συνάρτησης f στο σημείο (x_0, y_0) και συμβολίζεται με*

$$f_y(x_0, y_0) \quad \text{ή} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

*Οι $f_x(x_0, y_0)$ και $f_y(x_0, y_0)$ καλούνται **μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης** της f στο σημείο (x_0, y_0).*

Ορισμος 5.6. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό. Αν η f έχει μερικές παραγώγους πρώτης τάξης σε κάθε σημείο $(x_0, y_0) \in A$ τότε θα καλείται **μερικώς παραγωγίσιμη**.*

Παραδειγμα 5.1. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = x^3 + y^3 + x^2 y + xy^2$. Για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy + y^2$ και $f_y(x, y) = 3y^2 + x^2 + 2xy$.

Παραδειγμα 5.2. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = |x| + |y|$. Τότε οι $f_x(0, 0)$ και $f_y(0, 0)$ δεν υπάρχουν. Πράγματι,

$$f_x(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

που ως γνωστόν δεν υπάρχει (αφού τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά). Ομοίως

$$f_y(0, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \to 0} \frac{|y|}{y}$$

που πάλι δεν υπάρχει.

(β) Έχουμε

$$f_x(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{|x|^2}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

και

$$f_y(0, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \to 0} \frac{\sqrt{|y|^2}}{y} = \lim_{x \to 0} \frac{|y|}{y}$$

Όπως και στο (α) και τα δύο αυτά όρια δεν υπάρχουν.

4. Τοπικά ακρότατα και σαγματικά σημεία πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών

Ορισμος 5.7. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ και $(x_0, y_0) \in X$.*

*(1) Λέμε ότι η f έχει στο (x_0, y_0) **τοπικό μέγιστο** αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε*

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \tag{5.4}$$

για όλα τα $(x, y) \in B_\delta(x_0, y_0) \cap X$.

*(2) Λέμε ότι η f έχει στο (x_0, y_0) **τοπικό ελάχιστο** αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε*

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \tag{5.5}$$

για όλα τα $(x, y) \in B_\delta(x_0, y_0) \cap X$.

*(3) Λέμε ότι η f έχει στο το x_0 **τοπικό ακρότατο** αν η f έχει στο x_0 είναι τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο.*

Ορισμος 5.8. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και f μερικώς παραγωγίσιμη. Ένα σημείο $(x_0, y_0) \in A$ λέμε ότι είναι **κρίσιμο** σημείο για την συνάρτηση f αν*

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0.$$

Θεωρημα 5.9. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ όπου $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, μερικώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Τότε κάθε σημείο στο οποίο η f έχει τοπικό ακρότατο είναι και κρίσιμο σημείο της f.*

Γενικά δεν είναι όλα τα κρίσιμα σημεία τοπικά ακρότατα. Παρατηρείστε ότι σε ένα σημείο $(x_0, y_0) \in X$ η συνάρτηση f δεν έχει τοπικό ακρότατο αν και μόνο αν για κάθε $\delta > 0$ υπάρχουν σημεία $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in B_\delta(x_0, y_0) \cap X$ τέτοια ώστε

$$f(x_1, y_1) < f(x_0, y_0) < f(x_2, y_2)$$

Ειδική κατηγορία σημείων που δεν είναι σημεία τοπικών ακροτάτων είναι τα λεγόμενα *σαγματικά* σημεία. [1]

Ορισμος 5.10. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^2$. Ένα σημείο $(x_0, y_0) \in X$ στο οποίο η f δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο λέμε ότι είναι **σαγματικό** σημείο για την f αν από το (x_0, y_0) διέρχονται δύο ευθείες του $\mathbb{R}^2$ όπου στην μια από αυτές το (x_0, y_0) αποτελεί σημείο τοπικού ελαχίστου ενώ στην άλλη σημείο τοπικού μεγίστου.*

Παρατηρηση 5.1. Αποδεικνύεται ότι στην περίπτωση που η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης κάθε σαγματικό σημείο είναι κρίσιμο σημείο της f. Στην περίπτωση αυτή το γράφημα της f γύρω απο ένα σαγματικό σημείο μοιάζει πολύ με την επιφάνεια μιας σέλας (σάγμα) αλόγου εξ ου και το όνομα.

Παραδειγμα 5.3. Έστω η συνάρτηση $f(x, y) = x^2 - y^2$. (α) Δείξτε ότι το $(0, 0)$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f. (β) Δείξτε ότι το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο της f. (γ) Συμπεράνετε ότι η f δεν έχει τοπικά ακρότατα.

[1] Ο Ορισμός 5.10 δεν είναι ο πλέον γενικός για τα σαγματικά σημεία αλλά εξυπηρετεί τους σκοπούς αυτού του κεφαλαίου.

Αποδειξη. (α) Έχουμε $f_x(x,y) = 2x$ και $f_y(x,y) = 2y$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ και άρα η f είναι μερικώς παραγωγίσιμη. Από το Θεώρημα 5.9 έχουμε ότι τα τοπικά ακρότατα της f αν υπάρχουν θα είναι κρίσιμα σημεία δηλαδή θα είναι λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι το $(0,0)$ είναι η μοναδική λύση.

(β) Παρατηρούμε ότι

(1) $f(0,0) = 0$,

(2) για κάθε σημείο $(x,y) \neq (0,0)$ της ευθείας $y = 0$ έχουμε $f(x,0) = f(x,0) = x^2 > 0$ και

(3) για κάθε σημείο $(x,y) \neq (0,0)$ της ευθείας $x = 0$ έχουμε $f(0,y) = -y^2 < 0$.

Άρα το $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο.

(γ) Από το (α) η f είναι μερικώς παραγωγίσιμη και άρα από το Θεώρημα 5.9 όλα τα τοπικά ακρότατά της είναι κρίσιμα σημεία της. Όμως είδαμε ότι η f έχει μοναδικό κρίσιμο σημείο, το $(0,0)$, που είναι σαγματικό σημείο και άρα δεν υπάρχουν σημεία στα οποία η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο. □

Παραδειγμα 5.4. Έστω η συνάρτηση $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x-y)^4$. (α) Δείξτε το $(0,0)$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f. (β) Δείξτε ότι το $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο της f. (γ) Συμπεράνετε ότι η f δεν έχει τοπικά ακρότατα.

Αποδειξη. (α) Έχουμε $f_x(x,y) = 4x^3 - 4(x-y)^3$ και $f_y(x,y) = 4y^3 + 4(x-y)^3$. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία δηλαδή τις λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 4x^3 - 4(x-y)^3 = 0 \\ f_y(x,y) = 4y^3 + 4(x-y)^3 = 0 \end{cases}$$

Με πρόσθεση των εξισώσεων, παίρνουμε ότι $x^3 + y^3 = 0$ ή ισοδύναμα

$$y = -x \tag{5.6}$$

Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση έχουμε

$$4x^3 - 4(x-y)^3 = 4x^3 - 4(2x)^3 = 4x^3 - 32x^3 = -28x^3 = 0$$

και άρα $x = 0$. Οπότε απο την (5.6) παίρνουμε ότι το μοναδικό κρίσιμο σημείο είναι το $(0,0)$.

(β) Παρατηρούμε ότι

(1) $f(0,0) = 0$,

(2) για κάθε σημείο της ευθείας $y = x$ διάφορο του $(0,0)$, είναι $f(x,y) = f(x,x) = 2x^4 > 0$ και

(3) για κάθε σημείο της ευθείας $y = -x$ διάφορο του $(0,0)$, είναι $f(x,y) = f(x,-x) = 2x^4 - 16x^4 < 0$.

Άρα το $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο.

(γ) Από το (α) η f είναι μερικώς παραγωγίσιμη και άρα από το Θεώρημα 5.9 όλα τα τοπικά ακρότατά θα είναι κρίσιμα σημεία της. Όμως είδαμε ότι η f έχει μοναδικό κρίσιμο σημείο, το $(0,0)$, που είναι σαγματικό σημείο. Άρα δεν υπάρχουν σημεία στα οποία η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο. □

Παραδειγμα 5.5. Έστω η συνάρτηση $f(x,y)=x^2+y^3$. (α) Δείξτε ότι το $(0,0)$ είναι κρίσιμο σημείο για την f. (β) Δείξτε ότι η f δεν έχει τοπικό ακρότατο στο $(0,0)$. Ειδικότερα, δείξτε ότι στον y-άξονα το $(0,0)$ δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου για την f. (γ) Δείξτε ότι σε κάθε ευθεία διάφορη του y-άξονα που διέρχεται από το $(0,0)$, το $(0,0)$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου για την f. (Άρα το $(0,0)$ δεν μπορεί να χαρακτηρισθεί ως σαγματικό σημείο της f σύμφωνα με τον Ορισμό 5.10).

Αποδειξη. (α) Έχουμε $f_x(x,y)=2x$ και $f_y(x,y)=3y^2$. Συνεπώς $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ και άρα το $(0,0)$ είναι κρίσιμο σημείο. (β) Είναι $f(0,0)=0$ και στον y-άξονα $f(0,y)=y^3$. Άρα $f(0,y)<f(0,0)<f(0,y')$ για κα΄θε $y<0<y'$ και άρα η f δεν παρουσιάζει στο $(0,0)$ τοπικό ακρότατο. (γ) Όλες οι ευθείες που διέρχονται από το $(0,0)$ εκτός του y-άξονα είναι της μορφής $y=\lambda x$ για κάποιο $\lambda\in\mathbb{R}$. Η f σε αυτές παίρνει την μορφή $f(x,\lambda x)=x^2+(\lambda x)^3=x^2(1+\lambda^3 x)>0$ όταν το x είναι αρκετά κοντά στο 0. Άρα το $(0,0)$ είναι σημείο στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο σε κάθε ευθεία που διέρχεται από αυτό διάφορη του y-άξονα. □

5. Το Κριτηριο Δευτερης Παραγωγου συναρτησης δυο μεταβλητών

Ορισμος 5.11. ***(Μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης)*** *Έστω $f:A\to\mathbb{R}$, $A\subseteq\mathbb{R}^2$ ανοικτό, τέτοια ώστε οι $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ υπάρχουν σε κάθε $(x,y)\in A$. Έστω $(x_0,y_0)\in A$. Τα όρια*

$$f_{xx}(x_0,y_0)=(f_x)_x(x_0,y_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f_x(x,y_0)-f_x(x_0,y_0)}{x-x_0},$$

$$f_{xy}(x_0,y_0)=(f_x)_y(x_0,y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{f_x(x_0,y)-f_x(x_0,y_0)}{y-y_0}$$

$$f_{yx}(x_0,y_0)=(f_y)_x(x_0,y_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f_y(x,y_0)-f_y(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

$$f_{yy}(x_0,y_0)=(f_y)_y(x_0,y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{f_y(x_0,y)-f_y(x_0,y_0)}{y-y_0},$$

αν υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί καλούνται ***μερικές παράγωγοι της*** *f* ***στο*** *(x_0,y_0)* ***δεύτερης τάξης****. Ειδικότερα οι $f_{xy}(x_0,y_0)$ και $f_{yx}(x_0,y_0)$ καλούνται* ***μεικτές*** *μερικές παράγωγοι της f στο σημείο (x_0,y_0) δεύτερης τάξης.*

Επίσης χρησιμοποιούνται και οι συμβολισμοί

$$f_{xx}(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\quad f_{xy}(x_0,y_0)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)$$

$$f_{yx}(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\quad f_{yy}(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)$$

Παραδειγμα 5.6. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y) = x^3 + y^3 + x^2y + xy^2$. Για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, έχουμε $f_x(x,y) = 3x^2 + 2xy + y^2$, $f_y(x,y) = 3y^2 + x^2 + 2xy$ και

$$f_{xx}(x,y)(= (f_x)_x(x,y)) = 6x + 2y, \quad f_{xy}(x,y)(= (f_x)_y(x,y)) = 2x + 2y,$$
$$f_{yx}(x,y)(= (f_y)_x(x,y)) = 2x + 2y \quad f_{yy}(x,y)(= (f_y)_y(x,y)) = 6y + 2x.$$

Στο παραπάνω παράδειγμα οι μεικτές μερικές παράγωγοι f_{xy} και f_{yx} είναι ίσες. Αυτό δεν είναι τυχαίο διότι για την συνάρτηση του παραπάνω παραδείγματος ισχύουν οι υποθέσεις του ακόλουθου θεωρήματος.

Θεωρημα 5.12. *(Schwarz) Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, τέτοια ώστε οι μερικές παράγωγοι της f εως και δεύτερης τάξης υπάρχουν σε κάθε σημείο του A και είναι συνεχείς συναρτήσεις. Τότε οι μεικτές παράγωγοι f_{xy} και f_{yx} της f είναι ίσες.*

Ορισμος 5.13. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό. Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ καλείται* ***κλάσης*** *$C^2(A)$ αν οι μερικές παράγωγοι της f εως και δεύτερης τάξης υπάρχουν σε κάθε σημείο του A και είναι συνεχείς συναρτήσεις.*

Ορισμος 5.14. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $f : A \to \mathbb{R}$ και $(x_0, y_0) \in A$. Υποθέτουμε ότι οι μερικές παράγωγοι της f έως και δεύτερης τάξης υπάρχουν στο (x_0, y_0). Ο* ***Εσσιανός πίνακας της f στο*** *(x_0, y_0) είναι ο πίνακας*

$$H_f(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

Παρατηρηση 5.2. Παρατηρείστε ότι αν η f είναι κλάσης $C^2(A)$ τότε από το Θεώρημα 5.12 $f_{xy} = f_{yx}$ και άρα σε κάθε $(x_0, y_0) \in A$ ο Εσσιανός της πίνακας είναι συμμετρικός.

Στα επόμενα θα λέμε ότι μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι κλάσης C^2 αν οι συναρτήσεις των μερικών παραγώγων της έως και δεύτερης τάξης ορίζονται και είναι συνεχείς συναρτήσεις. Θυμίζουμε ότι αν η f είναι κλάσης C^2, τότε $f_{xy} = f_{yx}$ και άρα ο πίνακας $f''(x_0, y_0)$ θα είναι συμμετρικός.

Θεωρημα 5.15. ***(Κριτήριο δεύτερης παραγώγου για συναρτήσεις δύο μεταβλητών)*** *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, και $f : A \to \mathbb{R}$ κλάσης $C^2(A)$. Έστω $(x_0, y_0) \in A$ κρίσιμο σημείο της f, δηλαδή $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$. Έστω*

$$H_f(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{bmatrix}$$

ο Εσσιανός πίνακας της f στο (x_0, y_0) και

$$\Delta(x_0,y_0) = \det f''(x_0,y_0) = f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0) - (f_{xy}(x_0,y_0))^2 \tag{5.8}$$

η ορίζουσά του.

(1) *Αν $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ και $\Delta(x_0, y_0) > 0$ τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο (x_0, y_0).*
(2) *Αν $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ και $\Delta(x_0, y_0) > 0$ τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο (x_0, y_0).*
(3) *Αν $\Delta(x_0, y_0) < 0$ τότε το (x_0, y_0) είναι σαγματικό σημείο της f.*

Παρατηρησεις 5.1. (α) Αν $\Delta(x_0, y_0) = 0$ τότε το παραπάνω κριτήριο δεν μπορεί να αποφανθεί αν το (x_0, y_0) είναι τοπικό ακρότατο ή όχι. Στις περιπτώσεις αυτές πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της συνάρτησης που μελετούμε για να εξάγουμε πληροφορία για το εν λόγω σημείο.

(β) Επίσης υπάρχουν κάποιες λίγες περιπτώσεις (ειδικά αν η συνάρτηση που μελετούμε έχει πολύ απλό τύπο) όπου το κριτήριο δεν χρειάζεται να εφαρμοστεί. Πχ. μπορούμε να δούμε εύκολα ότι το $(0, 0)$ είναι το μοναδικό τοπικό ακρότατο που έχει η $f(x, y) = x^2 + y^2$. Πράγματι, για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x^2 + y^2 \geq 0 = f(0, 0)$ και άρα η f έχει στο $(0, 0)$ ολικό ελάχιστο. Αν τώρα υπήρχε και άλλο τοπικό ακρότατο τότε θα έπρεπε αυτό να ήταν κρίσιμο σημείο ισοδύναμα θα ήταν λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2x = 0 \\ f_y(x, y) &= 2y = 0 \end{aligned}$$

Επειδή το παραπάνω σύστημα έχει μοναδική λύση την $(0, 0)$, η f δεν έχει άλλο τοπικό ακρότατο εκτός του $(0, 0)$.

Παραδειγμα 5.7. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$ ως προς τα τοπικά ακρότατα.

Λύση: Έχουμε

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 3x^2 + 3y \\ f_y(x, y) &= 3y^2 + 3x \\ f_{xx}(x, y) &= 6x \\ f_{yy}(x, y) &= 6y \\ f_{xy}(x, y) &= f_{yx}(x, y) = 3 \end{aligned}$$

και άρα $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Υπολογίζουμε τώρα τα κρίσιμα σημεία δηλαδή τις λύσεις του συστήματος

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 3x^2 + 3y = 0 \\ f_y(x, y) &= 3y^2 + 3x = 0 \end{aligned}$$

Η πρώτη εξίσωση γράφεται $y = -x^2$ και άρα αντικαθιστώντας στην δεύτερη παίρνουμε

$$x^4 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -1$$

Άρα έχουμε δύο κρίσιμα σημεία, τα $(0, 0)$ και $(-1, -1)$.

Για κάθε (x, y) είναι

$$\Delta(x, y) = f_{xx}(x, y) f_{yy}(x, y) - \left(f_{xy}(x, y)\right)^2 = 36xy - 9$$

Έχουμε $\Delta(0, 0) = -9 < 0$ και άρα το $(0, 0)$ είναι σαγματικό. Επίσης $\Delta(-1, -1) = 36 - 9 > 0$ και $f_{xx}(-1, -1) = -6 < 0$. Άρα το $(-1, -1)$ είναι τοπικό μέγιστο.

Παραδειγμα 5.8. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Λύση: Είναι

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 3x^2+3y^2-6x \\ f_y(x,y) &= 6xy-6y \\ f_{xx}(x,y) &= 6x-6 \\ f_{yy}(x,y) &= 6x-6 \\ f_{xy}(x,y) &= f_{yx}(x,y) = 6y \end{aligned}$$

και άρα $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Υπολογίζουμε τώρα τα κρίσιμα σημεία δηλαδή τις λύσεις του συστήματος

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 3x^2+3y^2-6x = 0 \\ f_y(x,y) &= 6xy-6y = 0 \end{aligned}$$

Η δεύτερη εξίσωση γράφεται $6y(x-1)=0$ και άρα

$$y = 0 \text{ ή } x = 1 \tag{5.9}$$

Για $y=0$ από την πρώτη εξίσωση έχουμε $3x^2-6x=0 \Leftrightarrow 3x(x-2)=0$ και άρα $x=0$ ή $x=2$. Συνεπώς τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα σημεία

$$(0,0) \quad \text{καί} \quad (2,0).$$

Ομοίως για $x=1$ η πρώτη εξίσωση δίνει $3+3y^2-6=0 \Leftrightarrow y^2-1=0$ και άρα $y=1$ ή $y=-1$. Οπότε έχουμε και τα σημεία

$$(1,1) \quad \text{και} \quad (1,-1).$$

Συνολικά έχουμε τέσσερα πιθανά τοπικά ακρότατα: $(0,0)$, $(2,0)$, $(1,1)$ και $(1,-1)$. Τώρα για κάθε (x,y) είναι

$$\Delta(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - (f_{xy}(x,y))^2 = (6x-6)\cdot(6x-6) - 36y^2$$

Έχουμε

(1) $\Delta(0,0)=36>0$, $f_{xx}(0,0)=-6<0$ και άρα στο $(0,0)$ η f έχει τοπικό μέγιστο.

(2) $\Delta(2,0)=36>0$, $f_{xx}(2,0)=6>0$ και άρα στο $(0,2)$ η f έχει τοπικό ελάχιστο.

(3) $\Delta(1,1)=-36<0$ και άρα το $(1,1)$ είναι σαγματικό.

(4) $\Delta(1,-1)=-36<0$ και άρα το $(1,-1)$ είναι σαγματικό.

Παραδειγμα 5.9. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x,y)=x^4+y^4-2(x-y)^2$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Λύση: Η $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 4x^3 - 4(x-y) = 4x^3 - 4x + 4y \\ f_y(x,y) &= 4y^3 + 4(x-y) = 4y^3 + 4x - 4y \\ f_{xx}(x,y) &= 12x^2 - 4 \\ f_{yy}(x,y) &= 12y^2 - 4 \\ f_{xy}(x,y) &= f_{yx}(x,y) = 4 \end{aligned}$$

όλες συνεχείς. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 4x^3 - 4(x-y) = 0 \\ f_y(x,y) &= 4y^3 + 4(x-y) = 0 \end{aligned}$$

με πρόσθεση κατά μέλη δίνει ότι $x^3 = -y^3$ ισοδύναμα

$$y = -x$$

Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση βρίσκουμε ότι $4x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow x(x^2-2) = 0$ και άρα

$$x = 0 \text{ ή } x = \sqrt{2} \text{ ή } x = -\sqrt{2}$$

Συνεπώς τα πιθανά τοπικά ακρότατα είναι τα σημεία

$$(0,0), \quad (\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \quad \text{και} \quad (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

Έχουμε

$$\Delta(x,y) = f_{xx}(x,y) f_{yy}(x,y) - \left(f_{xy}(x,y)\right)^2 = (12x^2-4)\cdot(12y^2-4) - 16$$

(1) $\Delta(0,0) = 0$ και άρα δεν μπορούμε να αποφανθούμε από το Κριτήριο Δεύτερης Παραγώγου για το αν το $(0,0)$ είναι ή όχι τοπικό ακρότατο. Παρατηρούμε ότι

(α) $f(0,0) = 0$,

(β) για κάθε σημείο $(x,y) \neq (0,0)$ της ευθείας $y = 0$ με $x \in (-1,1)$ είναι $f(x,0) = x^4 - 2x^2 < 0$ και

(γ) για κάθε σημείο $(x,y) \neq (0,0)$ της ευθείας $y = x$ είναι $f(x,y) = f(x,x) = 2x^4 > 0$.

Άρα το $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο.

(2) Όπως εύκολα βλέπουμε

$$\Delta(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \Delta(\sqrt{2}, \sqrt{2}) > 0$$

και $f_{xx}(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = f_{xx}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) > 0$ οπότε στα σημεία $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ και $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ η f έχει τοπικό ελάχιστο.