Άσκηση 6

Προσδιορισμός του συντελεστή αποκατάστασης και του χρόνου κρούσης δύο σφαιρών

6.1. Σκοπός

Σκοπός της άσκησης είναι η μελέτη της κρούσης δύο μεταλλικών σφαιρών, ο προσδιορισμός της κινητικής ενέργειας που χάνεται σε αυτήν, του συντελεστή αποκατάστασης του υλικού των σφαιρών, της χρονικής διάρκειας της κρούσης, καθώς και των δυνάμεων που αναπτύσσονται μεταξύ των δύο όμοιων σφαιρών.

6.2. Γενικά

Θα ορίσουμε την κρούση σαν μια εξ επαφής και χρονικά σύντομη (100-200 μs) αλληλεπίδραση δύο σωμάτων, κατά την οποία μεταβάλλονται οι ταχύτητες των σωμάτων. Αν στα συγκρουόμενα σώματα δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις, τότε η ενέργεια και ορμή του συστήματος διατηρούνται.

Η διαφορά των κινητικών ενεργειών των δύο σωμάτων πριν και μετά την κρούση καθορίζει το μέρος της κινητικής ενέργειας που χάνεται και μετατρέπεται σε θερμότητα. Η κρούση λέγεται **ελαστική** όταν η απώλεια της κινητικής ενέργειας είναι μηδέν και στις φυσικές διεργασίες πραγματοποιείται μόνο κατά προσέγγιση. Ο λόγος των σχετικών ταχυτήτων των δύο σωμάτων μετά και πριν την κρούση ονομάζεται **συντελεστής αποκατάστασης**, k:

$$k = \frac{u_2 - u_1}{\upsilon_1 - \upsilon_2} \tag{6.1}$$

όπου u και υ είναι οι ταχύτητες των σωμάτων μετά και πριν την κρούση, αντίστοιχα. Ο συντελεστής αποκατάστασης εξαρτάται από τα υλικά από τα οποία είναι κατασκευασμένα τα σώματα. Αν $k = 1$ η κρούση είναι ελαστική, ενώ αν $k = 0$ η κρούση είναι ανελαστική (πλαστική).

6.3. Μέθοδος

6.3.1. Μέτρηση του συντελεστή αποκατάστασης

Στο πείραμα, μια μεταλλική σφαίρα Β συγκρούεται με μια όμοια ακίνητη σφαίρα Α (Σχ. 6.1). Έστω ότι αγνοούνται οι απώλειες της κινητικής ενέργειας που οφείλονται στην επίδραση του αέρα και τις τριβές στο σύστημα ανάρτησης των δύο σφαιρών. Αν οι ταχύτητες των σφαιρών λίγο πριν την κρούση είναι $\upsilon_{\mathrm{A}} = 0$ και $\upsilon_{\mathrm{B}} = V_0$, τότε μετά την κρούση οι σφαίρες θα κινούνται προς τα αριστερά με ταχύτητες u_{A} και u_{B}, αντίστοιχα. Από τον νόμο διατήρησης της ορμής και την Εξ. (6.1) έχουμε:

$$u_{\mathrm{A}} + u_{\mathrm{B}} = V_0 \tag{6.2}$$

$$u_{\mathrm{A}} - u_{\mathrm{B}} = kV_0 \tag{6.3}$$

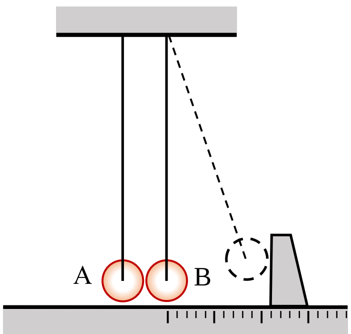
Λύνοντας τις Εξ. (6.2) και (6.3) ως προς u_{A} και u_{B} έχουμε:

$$u_A = \frac{V_0}{2}(1+k) \tag{6.4}$$

$$u_B = \frac{V_0}{2}(1-k) \tag{6.5}$$

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει ότι, στην περίπτωση ελαστικής κρούσης ($k = 1$), οι σφαίρες θα ανταλλάξουν τις ταχύτητές τους, δηλαδή η σφαίρα Β θα ακινητοποιηθεί. Σε περίπτωση μη ελαστικής κρούσης, η σφαίρα Β δεν σταματά τελείως.

Μετρώντας τις ταχύτητες u_B και V_0, μπορούμε από την Εξ. (6.5) να υπολογίσουμε τον συντελεστή αποκατάστασης, k. Όμως, για σφαίρες που συγκρούονται με μικρές απώλειες ($k \approx 1$), η ταχύτητα u_B είναι πολύ μικρή και συνεπώς δύσκολα μετρήσιμη με ικανοποιητική ακρίβεια. Η κατάσταση βελτιώνεται αν οι σφαίρες αφεθούν να συγκρουστούν n φορές, σε μια πειραματική διάταξη όπως αυτή του Σχ. 6.1.



Σχήμα 6.1.

Πράγματι, μετά την πρώτη κρούση, οι ταχύτητες των σφαιρών είναι u_A και u_B [βλ. Εξ. (6.4) και (6.5)] και κατευθύνονται προς τα αριστερά. Μετά από μία ημιπερίοδο της ταλάντωσής τους οι σφαίρες θα βρεθούν στις θέσεις ισορροπίας τους σχεδόν ταυτόχρονα και θα συγκρουστούν ξανά. Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, οι δύο σφαίρες επιστρέφουν στη θέση ισορροπίας τους με ταχύτητες ίσου μέτρου με αυτές που είχαν μετά την πρώτη κρούση, δηλαδή συγκρούονται με ταχύτητες u_A και u_B. Μετά τη δεύτερη κρούση οι σφαίρες θα κινούνται προς τα δεξιά με ταχύτητες $u_A^{(2)}$ και $u_B^{(2)}$

Από τον νόμο διατήρησης της ορμής και την Εξ. (6.1) έχουμε:

$$u_B^{(2)} + u_A^{(2)} = u_A + u_B \tag{6.6}$$

$$u_B^{(2)} - u_A^{(2)} = k\,(u_A - u_B) \tag{6.7}$$

Από τις Εξ. (6.6), (6.7) και (6.4), (6.5) προκύπτει:

$$u_A^{(2)} = \frac{V_0}{2}\left(1-k^2\right) \tag{6.8}$$

$$u_B^{(2)} = \frac{V_0}{2}\left(1+k^2\right) \tag{6.9}$$

Από τις Εξ. (6.4) και (6.5), δηλαδή μετά την πρώτη κρούση, φαίνεται ότι η σφαίρα Α κινείται με μεγαλύτερη ταχύτητα, ενώ οι Εξ. (6.8) και (6.9) δείχνουν ότι μετά τη δεύτερη κρούση η κατάσταση αντιστρέφεται και τώρα η σφαίρα Β κινείται με μεγαλύτερη ταχύτητα. Μετά την τρίτη κρούση η κατάσταση θα αντιστραφεί ξανά, όπως φαίνεται στις ακόλουθες σχέσεις που προκύπτουν με την παραπάνω διαδικασία:

$$u_A^{(3)} = \frac{V_0}{2}\left(1+k^3\right) \tag{6.10}$$

$$u_B^{(3)} = \frac{V_0}{2}\left(1 - k^3\right) \tag{6.11}$$

Παρομοίως, μετά τη n-στη κρούση, θα έχουμε

$$u_A^{(n)} = \frac{V_0}{2}\left[1 + (-1)^{n+1} k^n\right] \tag{6.12}$$

$$u_B^{(n)} = \frac{V_0}{2}\left[1 + (-1)^{n} k^n\right] \tag{6.13}$$

Για παράδειγμα, αν $n = 20$, τότε αμέσως μετά την εικοστή κρούση οι ταχύτητες θα είναι:

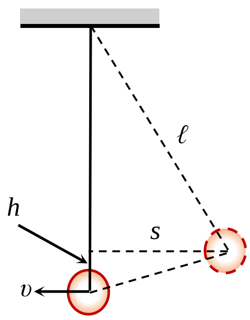
$$u_A^{(20)} = \frac{V_0}{2}\left(1 - k^{20}\right) \tag{6.14}$$

$$u_B^{(20)} = \frac{V_0}{2}\left(1 + k^{20}\right) \tag{6.15}$$

Μετρώντας την ταχύτητα $u_A^{(20)}$ και την αρχική ταχύτητα V_0 της σφαίρας Β, από την Εξ. (6.14) μπορούμε να βρούμε τον συντελεστή αποκατάστασης k:

$$k = \left(1 - \frac{2\,u_A^{(20)}}{V_0}\right)^{1/20} \tag{6.16}$$

6.3.2. Μέτρηση της ταχύτητας της σφαίρας



Σχήμα 6.2.

Στο Σχ. 6.2 φαίνονται η ανώτατη και η κατώτατη θέση της ίδιας σφαίρας όταν αυτή ταλαντώνεται σαν εκκρεμές. Η ταχύτητα της σφαίρας στη θέση ισορροπίας, δηλαδή λίγο πριν αυτή συγκρουστεί με την άλλη σφαίρα, βρίσκεται από τον νόμο διατήρησης της ενέργειας και είναι:

$$\upsilon = \sqrt{2gh} \tag{6.17}$$

όπου h είναι η διαφορά ύψους της αρχικής θέσης από τη θέση ισορροπίας.

Από τη γεωμετρία του Σχ. 6.2. έχουμε:

$$h = \ell - (\ell - h) = \ell - \sqrt{(\ell - h)^2} = \ell - \sqrt{\ell^2 - s^2} \tag{6.18}$$

όπου s είναι η μέγιστη μετατόπιση της σφαίρας από τη θέση ισορροπίας και ℓ είναι το ισοδύναμο μήκος του μαθηματικού εκκρεμούς (δεν ισούται με το φυσικό μήκος των νημάτων της διάταξης). Συνεπώς, η ταχύτητα υ είναι:

$$\upsilon = \sqrt{2g\left(\ell - \sqrt{\ell^2 - s^2}\right)} \tag{6.19}$$

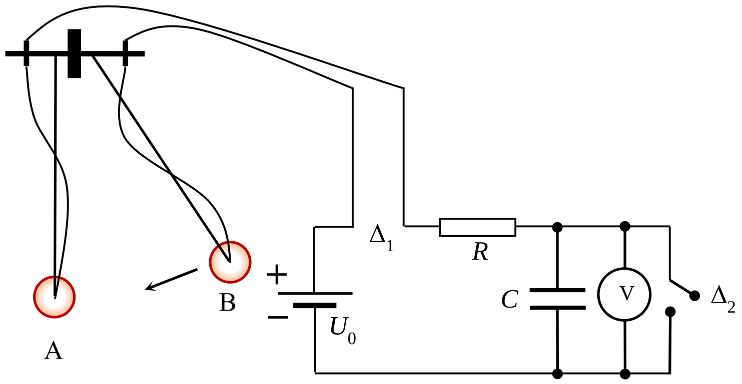
Επομένως, η ταχύτητα της σφαίρας μπορεί να υπολογιστεί από τη μέγιστη εκτροπή, s, ενώ το ισοδύναμο μήκος ℓ του μαθηματικού εκκρεμούς από τη γνωστή σχέση

$$T = 2\pi\sqrt{\ell/g} \tag{6.20}$$

όπου T είναι η περίοδος ταλαντώσεων της σφαίρας.

6.3.3. *Μέτρηση του χρόνου κρούσης δύο σφαιρών*

Για τη μέτρηση του χρόνου κρούσης δύο μεταλλικών σφαιρών χρησιμοποιείται το κύκλωμα που φαίνεται στο Σχ. 6.3.



Σχήμα 6.3.

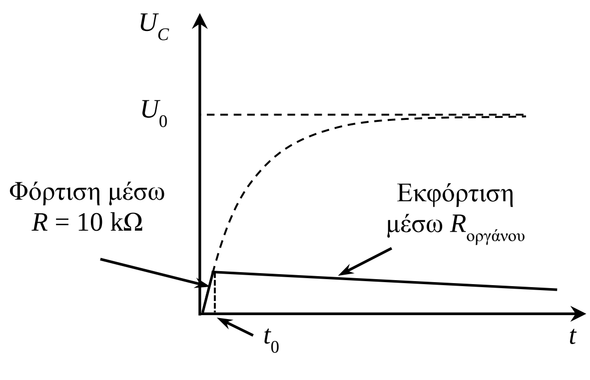
Η πηγή τάσης U_0 φορτίζει έναν πυκνωτή χωρητικότητας C μέσω μιας αντίστασης R (10 kΩ) και του διακόπτη Δ_1, ο οποίος είναι κλειστός μόνο όταν οι σφαίρες είναι σε επαφή. Παράλληλα με τον πυκνωτή είναι συνδεδεμένο ένα ψηφιακό βολτόμετρο που έχει πολύ μεγάλη αντίσταση εισόδου (> 10^9 Ω). Τον διακόπτη Δ_2 τον κλείνουμε μόνο όταν θέλουμε να εκφορτίσουμε τον πυκνωτή, διασφαλίζοντας έτσι μηδενικές αρχικές συνθήκες.

Έστω ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ κλείνει ο διακόπτης Δ_1. Τότε η τάση στον πυκνωτή θα αρχίσει να αυξάνει εκθετικά σύμφωνα με τον νόμο:

$$U_c = U_0\left(1 - \mathrm{e}^{-t/RC}\right) \tag{6.21}$$

Αν η φόρτιση του πυκνωτή διακοπεί τη χρονική στιγμή t_0 (βλ. Σχ. 6.4) και ο λόγος t_0/RC είναι μικρός, για παράδειγμα 10^{-2}, τότε η εκθετική συνάρτηση μπορεί να αντικατασταθεί με τους δύο πρώτους όρους της σειράς Taylor:

$$\mathrm{e}^{-\frac{t_0}{RC}} = 1 - \frac{t_0}{RC} + \frac{1}{2!}\left(\frac{t_0}{RC}\right)^2 - \dots \tag{6.22}$$



Σχήμα 6.4.

Ο τρίτος όρος της σειράς Taylor είναι μικρότερος από 10^{-4}, επομένως μπορεί να αγνοηθεί. Έτσι, η Εξ. (6.21) απλοποιείται και παίρνει τη μορφή

$$U_c = U_0 \, \frac{t_0}{RC} \tag{6.23}$$

όπου U_c είναι η τάση στον πυκνωτή τη χρονική στιγμή t_0.

Από την Εξ. (6.23) προκύπτει ότι στο αρχικό στάδιο της φόρτισης η τάση στον πυκνωτή αυξάνει γραμμικά, ενώ ο χρόνος κρούσης των δύο μεταλλικών σφαιρών είναι

$$t_0 = \frac{U_c}{U_0} \, RC \tag{6.24}$$

Τη χρονική στιγμή t_0 που ο διακόπτης Δ_1 ανοίγει, η τάση στον πυκνωτή παύει να μεταβάλλεται και η ένδειξη του βολτόμετρου «παγώνει» στην τιμή U_c, που δίνεται από την Εξ. (6.23). Η περαιτέρω χρονική εξέλιξη της τάσης U_c εξαρτάται από τη σταθερά χρόνου εκφόρτισης του πυκνωτή. Η σταθερά αυτή στη διάταξη της άσκησης είναι αρκετά μεγάλη (άνω των 100 s) ώστε η ανάγνωση της U_c να γίνεται άνετα και με μικρό σφάλμα.

6.3.4 Ποσοστό μεταβολής κινητικής ενέργειας και δύναμη κατά την κρούση των σφαιρών

Η ολική κινητική ενέργεια των δύο σφαιρών πριν από την πρώτη κρούση είναι ίση με $(1/2)\,mV_0^2$, ενώ αμέσως μετά την πρώτη κρούση ισούται με $(1/2)\,mu_{\mathrm{A}}^2 + (1/2)\,mu_{\mathrm{B}}^2$. Έτσι, η μεταβολή της κινητικής ενέργειας είναι $\Delta E_k = (1/2)\,mV_0^2 - (1/2)\,mu_{\mathrm{A}}^2 - (1/2)\,mu_{\mathrm{B}}^2$.

Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας που χάνεται κατά την πρώτη κρούση θα είναι

$$\frac{\Delta E_k}{\frac{1}{2}mV_0^2} \times 100\% \tag{6.25}$$

Επίσης, επειδή η σφαίρα Α είναι ακίνητη πριν την κρούση και μετά έχει ορμή ίση με mu_{A}, η μεταβολή της ορμής της κατά τον χρόνο κρούσης θα είναι $\Delta p = mu_{\mathrm{A}}$, οπότε, με τη βοήθεια της Εξ. (6.4), έχουμε

$$\Delta p = m \, \frac{V_0}{2}(1 + k) \tag{6.26}$$

Προσδιορίζοντας πειραματικά τον χρόνο κρούσης $\Delta t = t_0$, μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέση δύναμη που προκαλεί τη μεταβολή της ορμής της σφαίρας από τη σχέση

$$\overline{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t} \tag{6.27}$$

6.4. Πειραματική διάταξη

Η πειραματική διάταξη αποτελείται από δύο επιχρυσωμένες μεταλλικές σφαίρες Α και Β (βλ. Σχ. 6.1 και 6.3), οι οποίες είναι αναρτημένες με τέσσερα νήματα η καθεμία για την αποφυγή της περιστροφής τους γύρω από τον κατακόρυφο άξονα και για να διατηρείται σταθερό το επίπεδο ταλάντωσης.

Η μετατόπιση των σφαιρών από τη θέση ισορροπίας μπορεί να μετρηθεί με τη βοήθεια ενός χάρακα, ο οποίος βρίσκεται κάτω από τις σφαίρες.

Την ίδια αποστολή έχει και ένας μετακινούμενος κατακόρυφος «βραχίονας», που βοηθά την ανάγνωση της μετατόπισης της σφαίρας Β όταν αυτή αφήνεται να συγκρουστεί με τη σφαίρα Α.

Στα πειράματα, η σφαίρα Α είναι ακίνητη, ενώ η σφαίρα Β εκτρέπεται από τη θέση ισορροπίας και στη συνέχεια αφήνεται να συγκρουστεί με τη σφαίρα Α.

Οι σφαίρες Α και Β, όπως και οι δύο λεπτοί αγωγοί που είναι ηλεκτρικά συνδεδεμένοι με τις σφαίρες (Σχ. 6.3), σχηματίζουν ένα είδος ηλεκτρικού διακόπτη, ο οποίος κλείνει όταν οι σφαίρες έρχονται σε επαφή.

Επειδή οι σφαίρες είναι όμοιες, στη θέση ισορροπίας, όταν οι σφαίρες μόλις εφάπτονται, η απόσταση των κέντρων τους είναι ίση με δύο ακτίνες. Επιπλέον, οι δύο σφαίρες κρέμονται από νήματα που έχουν ίδιο μήκος.

Βιβλιογραφία

ΕΜΠ, Τομέας Φυσικής, ΣΕΜΦΕ, *Εργαστηριακές Ασκήσεις Φυσικής*, Τόμος Ι (Αθήνα, ^{2}2010), σ. 101-110.

6.5. Εκτέλεση

6.5.1. Μέτρηση του συντελεστή αποκατάστασης

1. Απομακρύνετε τη σφαίρα Β και προκαλέστε ταλαντώσεις *μικρού* πλάτους στη σφαίρα Α. Μετρήστε τον χρόνο 20 πλήρων ταλαντώσεων και βρείτε την περίοδο T αυτών των ταλαντώσεων.

2. Μετατοπίστε τη σφαίρα Β σε κάποια συγκεκριμένη απόσταση s_{B} (περίπου 10 cm) και αφήστε την να συγκρουστεί με την ακίνητη σφαίρα Α.

Μετά την εικοστή κρούση συγκρατήστε τη σφαίρα Β μακριά από την Α για να σταματήσουν οι συγκρούσεις. Η σφαίρα Α θα ταλαντώνεται. Μετρήστε το πλάτος s_{A} αυτών των ταλαντώσεων.

3. Επαναλάβετε το βήμα 2 άλλες δύο φορές.

6.5.2. Μέτρηση του χρόνου κρούσης των σφαιρών

1. Συναρμολογήστε το κύκλωμα που φαίνεται στο Σχ. 6.3.

2. Μετατοπίστε τη σφαίρα Β σε αποστάσεις s_{B} από 2 έως 20 cm (6-8 μετρήσεις λαμβάνοντας υπόψη την ακρίβεια του χάρακα).

3. Λίγο πριν ελευθερώσετε τη σφαίρα Β, μηδενίστε την ένδειξη του ψηφιακού βολτομέτρου, εκφορτίζοντας τον πυκνωτή C με τη βοήθεια του διακόπτη Δ_2.

4. Ελευθερώστε τη σφαίρα Β και μετά την κρούση συγκρατήστε τη σφαίρα Α για να μην συγκρουστούν ξανά οι σφαίρες. Σημειώστε την τιμή της τάσης στον πυκνωτή.

5. Επαναλάβετε το βήμα 4 τρεις φορές για κάθε s_{B}.

6. Με τη βοήθεια του ψηφιακού πολυμέτρου, μετρήστε τις τιμές U_0 και R του κυκλώματος που φαίνεται στο Σχ. 6.3.

Η τιμή της χωρητικότητας C του πυκνωτή αναγράφεται πάνω στην κάθε συσκευή.

6.6. Επεξεργασία των μετρήσεων

6.6.1. Μέτρηση του συντελεστή αποκατάστασης

1. Από την Εξ. (6.20) και από την περίοδο ταλαντώσεων της σφαίρας Α υπολογίστε το ισοδύναμο μήκος ℓ του απλού (μαθηματικού) εκκρεμούς.

2. Από την Εξ. (6.19) βρείτε τις ταχύτητες V_0 της σφαίρας Β και $u_{\mathrm{A}}^{(20)}$ της σφαίρας Α.

3. Από την Εξ. (6.16) υπολογίστε τον συντελεστή αποκατάστασης, k.

4. Υπολογίστε το ποσοστό της κινητικής ενέργειας που χάνεται σε μία κρούση συναρτήσει του k. Για την τιμή του k που βρήκατε, υπολογίστε το ποσοστό αυτό.

6.6.2. Μέτρηση του χρόνου κρούσης των σφαιρών

1. Υπολογίστε τις ταχύτητες της σφαίρας Β (V_0) την ώρα της κρούσης για τα αντίστοιχα s_{B}.

2. Από την Εξ. (6.24) υπολογίστε τον χρόνο κρούσης t_0 των σφαιρών για κάθε s_{B}.

3. Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση του t_0 συναρτήσει της ταχύτητας V_0, η σχετική θεωρητική ανάλυση της οποίας προβλέπει μια σχέση της μορφής $t_0 = C\,(V_0)^{-1/5}$, όπου C μια σταθερά.

4. Από τις Εξ. (6.26) και (6.27) βρείτε τη μέση δύναμη που προκαλεί τη μεταβολή της ορμής της σφαίρας σε χρόνο $\Delta t = t_0$ για τα διάφορα s_{B} που μετρήσατε. Η μάζα της κάθε σφαίρας θεωρείται γνωστή και είναι 0,268 kg.

5. Συμπληρώστε τον παρακάτω Πίνακα:

s_{B} (cm)	U_c (mV)	$\overline{U_c}$ (mV)	V_0 (m/s)	t_0 (μs)	$\overline{F}$ (N)