Η ευθεία στο χώρο - Μέρος 2

Η απόσταση δύο παράλληλων ευθειών

Δίνονται οι παράλληλες ευθείες

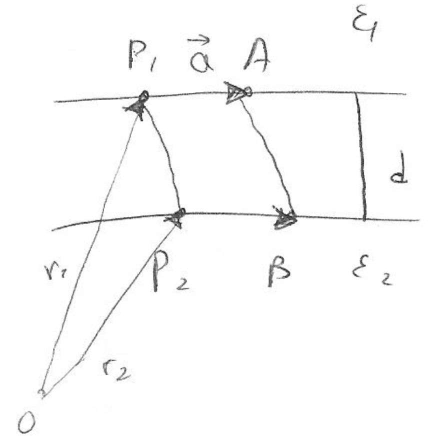
$$\varepsilon_1: \vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{a} \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$\varepsilon_2: \vec{r} = \vec{r}_2 + s\vec{a} \qquad s \in \mathbb{R}$$

Η απόστασή τους $d(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ δίνεται από τη σχέση

$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{\|(r_1 - r_2) \times a\|}{\|a\|}$$

Απόδειξη



Έστω Oxyz ορθοκανονικό σύστημα

και $\vec{OP_1} = \vec{r}_1$, $\vec{OP_2} = \vec{r}_2$

Παίρνουμε σημεία $A \in \varepsilon_1$ και $B \in \varepsilon_2$

τ.ω $\vec{P_1A} = \vec{P_2B} = \vec{a}$

Θεωρούμε το εμβαδόν $E = (P_1P_2BA)$ του παρ/μου P_1P_2BA

$$\left.\begin{aligned} E &= \|P_2P_1 \times a\| = \|(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{a}\| \\ \text{Είναι επίσης} \quad E &= \|\vec{a}\| \, d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \end{aligned}\right\}$$

$$\Longrightarrow d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{\|(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{a}\|}{\|\vec{a}\|}$$

Απόσταση σημείου από ευθεία του χώρου

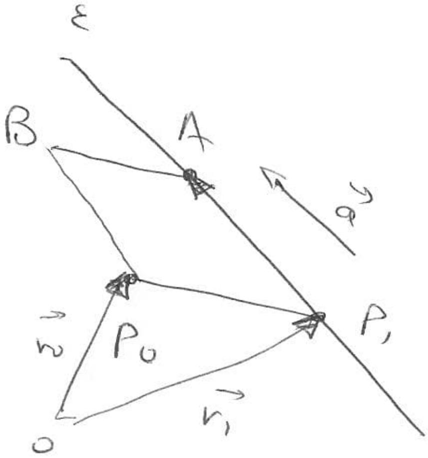
Δίνεται η $\varepsilon: \vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{a}$ $t \in \mathbb{R}$

και σημείο P_0 με $\overrightarrow{OP_0} = \vec{r}_0$

Η απόσταση $d = d(P_0, \varepsilon)$ του σημείου P_0 από την ευθεία ε δίνεται από:

$$d(P_0, \varepsilon) = \frac{\|(\vec{r}_0 - \vec{r}_1) \times \vec{a}\|}{\|\vec{a}\|}$$

Απόδειξη



Έστω P_1 σημείο της ευθείας ε με $\overrightarrow{OP_1} = \vec{r}_1$. Κατασκευάζουμε το παρ/μο P_0P_1AB που ορίζεται από τα διανύσματα $\vec{a} = \overrightarrow{P_1A}$ και $\overrightarrow{P_1P_0} = \vec{r}_0 - \vec{r}_1$. Τότε:

$$\left.\begin{aligned} E(P_0P_1AB) &= \|(\vec{r}_0 - \vec{r}_1) \times \vec{a}\| \\ \text{και} \quad E(P_0P_1AB) &= \|\vec{a}\|\, d(P_0, \varepsilon) \end{aligned}\right\}$$

$$\Longrightarrow d(P_0, \varepsilon) = \frac{\|(\vec{r}_0 - \vec{r}_1) \times \vec{a}\|}{\|\vec{a}\|}$$

Άσκηση

Στο $\mathbb{R}^3$ δίνονται το σημείο $A=(1,-4,5)$ και η ευθεία $\varepsilon: \frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-4}{3}$

Ζητείται η απόσταση d του A από την ε.

Λύση

Για την ε: $\parallel \vec{a}=(2,1,3)$

και $P_0(1,-3,4)$

$$\vec{r}_A-\vec{r}_0=(0,-1,1) \quad \text{και}$$

$$(\vec{r}_A-\vec{r}_0)\times\vec{a}=\begin{vmatrix} i & j & \vec{k} \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=-4\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}=(-4,2,2)$$

Άρα $\|(\vec{r}_A-\vec{r}_0)\times\vec{a}\|=\sqrt{(-4)^2+2^2+2^2}=\sqrt{24}$

$$\|\vec{a}\|=\sqrt{2^2+1^2+3^2}=\sqrt{14}$$

$$d(A,\varepsilon)=\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{2^3 3}\cdot\sqrt{2\cdot 7}}{2\cdot 7}=\frac{2\sqrt{21}}{7}$$

Άσκηση

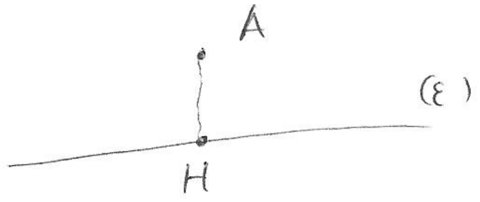
Δίνεται η ευθεία

$$\varepsilon: \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$$

και ένα σημείο $A(2,5,6)$ $(\notin \varepsilon)$

i) Ζητείται η προβολή του A στην (ε)

Λύση



Έστω $H(x_0, y_0, z_0)$ το ζητούμενο σημείο

του $AH \perp (\varepsilon)$

$$H \in (\varepsilon) \Leftrightarrow \frac{x_0-1}{1} = \frac{y_0-2}{2} = \frac{z_0-3}{3} \quad \text{I}$$

$$AH \perp (\varepsilon) \Leftrightarrow \langle AH, \vec{a} \rangle = 0 \Leftrightarrow$$

$$\langle (x_0-2, y_0-5, z_0-6), (1,2,3) \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x_0 + 2y_0 + 3z_0 = 2 + 10 + 18 = 30 \quad \text{II}$$

Αρα I, II (Σ) $\Rightarrow$ $\begin{cases} x_0 = 1 + t \\ y_0 = 2 + 2t \\ z_0 = 3 + 3t \\ \text{και} \\ x_0 + 2y_0 + 3z_0 = 30 \end{cases}$ και

$$\Rightarrow t + 4t + 9t + 14 = 30 \Rightarrow 14t = 16 \Rightarrow t = \frac{8}{7}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = 15/7 \\ y_0 = 30/7 \\ z_0 = 45/7. \end{cases}$$

$\rightarrow$

Άρα η προβολή του A στην (ε) είναι

$H\left(\frac{15}{7}, \frac{30}{7}, \frac{45}{7}\right)$

ii) Να βρεθεί A' συμμετρικό του A ως προς ε.

Λύση

Το H είναι το μέσον του AA' άρα

αν $A'(x', y', z')$ το συμμετρικό τότε

$$H\left(\frac{x'+x_A}{2}, \frac{y'+y_A}{2}, \frac{z'+z_A}{2}\right)$$

με $\frac{x'+x_A}{2} = x_0 \Rightarrow x' = \frac{30}{7} - 2 = \frac{16}{7}$

$\frac{y'+y_A}{2} = y_0 \Rightarrow y' = \frac{60}{7} - 5 = \frac{25}{7}$

$\frac{z'+z_A}{2} = z_0 \Rightarrow z' = \frac{90}{7} - 6 = \frac{48}{7}$

Άσκηση

Δίνονται οι ευθείες

$$\varepsilon_1 : \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{3-z}{4}$$

$$\varepsilon_2 : \frac{1-x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{-z+2}{8} \qquad \alpha\beta \neq 0.$$

Να βρεθεί η αναγκαία και ικανή συνθήκη μεταξύ των παραμέτρων α, β έτσι ώστε οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ να είναι ασύμβατες.

Λύση

Για την ε_1: $\parallel \vec{u} = (3, 2, -4)$ και διέρχεται από $A(2, 1, 3)$

$\varepsilon_2 \parallel \vec{v} = (-\alpha, \beta, -8)$ και " " $B(1, 0, 2)$

Για να είναι ασύμβατες πρέπει:

$$[\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{u}, \vec{v}] \neq 0 \qquad \vec{r}_1 = \vec{OA}, \quad \vec{r}_2 = \vec{OB}$$

$$\Rightarrow \langle (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{u}, \vec{v} \rangle \neq 0$$

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = (1, 1, 1)$$

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-6, 7, -1)$$

Άρα $\langle (-6, 7, -1), (-\alpha, \beta, -8) \rangle \neq 0$

$$\Rightarrow 6\alpha + 7\beta + 8 \neq 0 \Rightarrow 6\alpha + 7\beta \neq -8$$

και $\alpha\beta \neq 0$