

# Τριφασικά Συστήματα

Αντώνης Παπαβασιλείου, ΕΜΠ

Βασισμένο στο Βουρνά [1]

# Περιεχόμενα

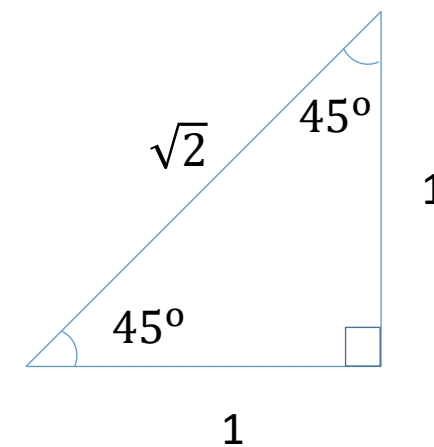
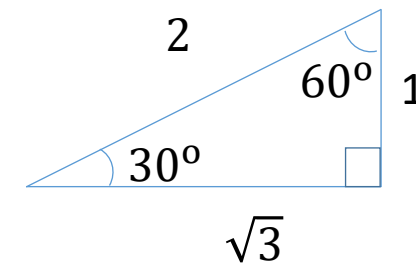
- Παραστατικοί μιγαδικοί αριθμοί
  - Ορισμοί
  - Παραδείγματα
  - Νόμοι Kirchhoff
- Σύνθετες αντιστάσεις παθητικών στοιχείων
  - Αυτεπαγωγή
  - Ωμική αντίσταση
  - Πυκνωτής
  - Σύνθετη (μιγαδική) αγωγιμότητα
- Ενεργός και άεργος ισχύς
  - Ορισμοί
  - Επαγωγική και χωρητική φόρτιση
  - Στιγμιαία ισχύς
  - Παράδειγμα
- Τριφασικά συστήματα: φασική και πολική τάση
- Τριφασική ισχύς
- Συνδεσμολογία αστέρα και τριγώνου
  - Πηγή συνδεδεμένη κατ'αστέρα
  - Πηγή συνδεδεμένη κατά τρίγωνο
  - Φορτίο συνδεδεμένο κατ'αστέρα και κατά τρίγωνο
  - Μετατροπή τριγώνου σε αστέρα
- Παραδείγματα
  - Ανάλυση ανά φάση
  - Διόρθωση συντελεστή ισχύος

# Μερικές χρήσιμες τριγωνομετρικές ταυτότητες

- $\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$
- $\cos a \cdot \cos b = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (\cos(a - b) + \cos(a + b))$
- $\cos a - \cos b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$

# Μερικές χρήσιμες τριγωνομετρικές τιμές

| Μοίρες | Rad              | cos                   | sin                  |
|--------|------------------|-----------------------|----------------------|
| 30     | $\frac{\pi}{6}$  | $\frac{\sqrt{3}}{2}$  | 0.5                  |
| 45     | $\frac{\pi}{4}$  | $\frac{\sqrt{2}}{2}$  | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| 60     | $\frac{\pi}{3}$  | 0.5                   | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| 90     | $\frac{\pi}{2}$  | 0                     | 1                    |
| 120    | $\frac{2\pi}{3}$ | -0.5                  | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| 150    | $\frac{5\pi}{6}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 0.5                  |
| 180    | $\pi$            | -1                    | 0                    |



# Παραστατικοί μιγαδικοί αριθμοί

Ορισμοί

Παραδείγματα

Νόμοι Kirchhoff

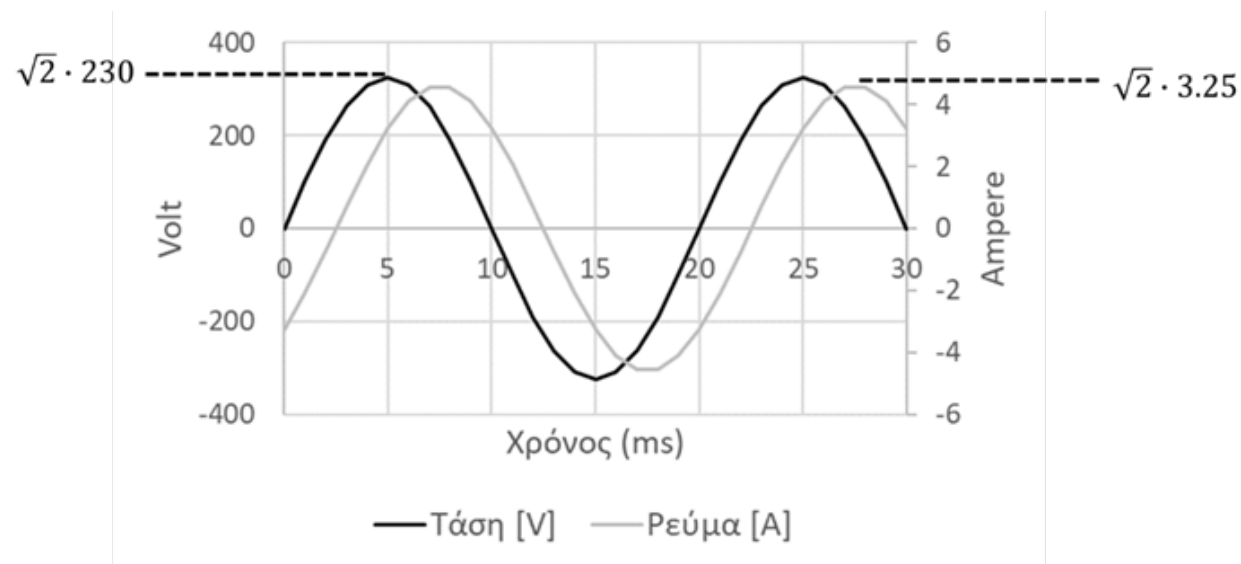
# Ορισμοί

- Έστω μία γενική ημιτονοειδής συνάρτηση  $f(t)$ , κατά κανόνα εκφράζει ρεύμα ή τάση:

$$f(t) = F_{max} \cos(\omega t + \phi) \quad (2.1)$$

- $F_{max}$ : μέγιστη τιμή
- $\omega$ : κυκλική συχνότητα
- $\phi$ : γωνία φάσης

# Παράδειγμα



- Συχνότητα 50 Hz (περίοδος 20 ms), άρα  $\omega = 2\pi f = 100\pi$
- Τάση:  $V(t) = 230V \sin(\omega t) = 230V \cos(\omega t + 90^\circ)$ , άρα  $V_{max} = 230$  V,  $\delta = 90^\circ$
- Ρεύμα:  $I(t) = 3.25A \sin(\omega t - 45^\circ) = 3.25A \cos(\omega t + 45^\circ)$ , άρα  $I_{max} = 3.25$  A,  $\delta = 45^\circ$

# Ταυτότητα του Euler

- Σε μόνιμη κατάσταση λειτουργίας, ένα κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος έχει σταθερή κυκλική συχνότητα  $\omega$
- Άρα το μόνο που χρειάζεται να γνωρίζουμε για να χαρακτηρίσουμε τη συνάρτηση  $f(t)$  είναι η μέγιστη τιμή και η γωνία φάσης
- Η πληροφορία αυτή εμπεριέχεται στη μιγαδική αναπαράσταση της συνάρτησης

- Ταυτότητα του Euler:

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \quad (2.2)$$

- Συνεπάγεται πως

$$f(t) = \text{Re}(F_{max} e^{j\phi} e^{j\omega t}) \quad (2.3)$$



# Ενεργός τιμή

- **Ενεργός ή ενδεικνύμενη τιμή (rms) της  $f$ :**

$$F = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt} = \frac{F_{max}}{\sqrt{2}} \quad (2.4)$$

- Απόδειξη: χρησιμοποιείτε την ταυτότητα  
 $\cos^2 u = 0.5(1 + \cos(2u))$
- Ένα μέτρο της «μέσης τιμής» της συνάρτησης: π.χ. η τιμή του συνεχούς ρεύματος που θα οδηγούσε σε ίσες απώλειες με τη συνάρτηση εναλλασόμενου ρεύματος περνώντας από μία αντίσταση

# Παραστατικός μιγαδικός αριθμός και καρτεσιανή μορφή

- Ο παραστατικός μιγαδικός αριθμός (φασιθέτης, phasor) της  $f(t)$  ορίζεται ως

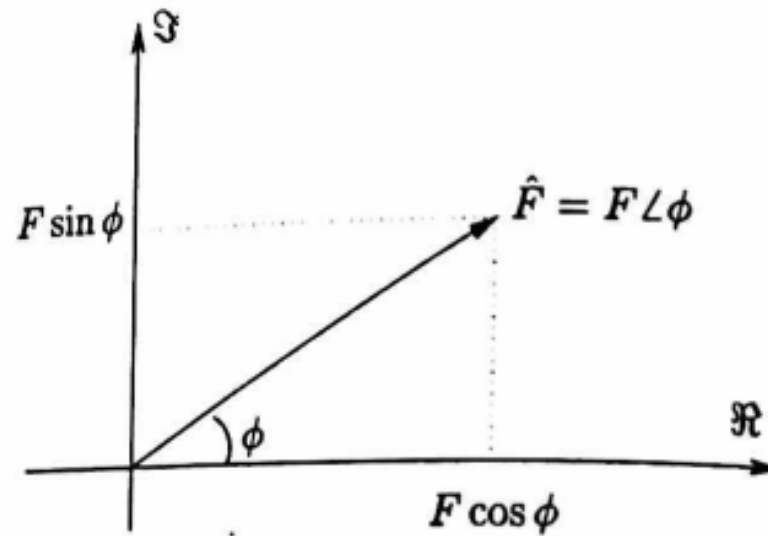
$$\hat{F} = F e^{j\phi} = F \angle \phi \quad (2.5)$$

- Η καρτεσιανή μορφή της  $f(t)$  ορίζεται ως

$$\hat{F} = F(\cos\phi + j\sin\phi) \quad (2.6)$$

- Παρατηρήστε ότι έχουμε «ξεφορτωθεί» την περιττή πληροφορία  $\omega$

# Διανυσματική παράσταση ημιτονοειδούς συνάρτησης



# Συμβολισμός μεγεθών εναλλασσόμενου ρεύματος

| Σύμβολο                     | Περιγραφή                                  |
|-----------------------------|--|
| $v, i, e, p$                | Στιγμιαία τιμή τάσης, ρεύματος, κτλ        |
| $V, I, E$                   | Ενεργός τιμή (rms)                         |
| $\hat{V}, \hat{I}, \hat{E}$ | Παραστατικοί μιγαδικοί αριθμοί             |
| $\mathbf{Z}, \mathbf{S}$    | Σύνθετη αντίσταση, μιγαδική ισχύς          |
| $Z, S$                      | Μέτρο σύνθετης αντίστασης, φαινόμενη ισχύς |

Στις σύνθετες αντιστάσεις και τη μιγαδική ισχύ θα αναφερθούμε αργότερα

# Παραδείγματα

Ορισμοί

**Παραδείγματα**

Νόμοι Kirchhoff

## Παράδειγμα 2.1.2(α)

- Γράψτε σε μιγαδική (διανυσματική) μορφή την εναλλασόμενη τάση:  
 $v(t) = 100V\cos(100\pi t - \pi/6)$
- Βάσει της (2.4) έχουμε για την ενεργό τιμή

$$V = \frac{100}{\sqrt{2}} V = 70.7V$$

- Άρα

$$\hat{V} = 70.7V \angle -30^\circ$$

## Παράδειγμα 2.1.2(β)

- Γράψτε σε ημιτονοειδή μορφή τη διανυσματική παράσταση  $\hat{I} = 100\text{A}\angle 20^\circ$
- Βάσει της (2.3):

$$i(t) = 100\sqrt{2}\text{A}\cos(\omega t + 20^\circ)$$

## Παράδειγμα 2.1.2(γ)

- Προσθέστε δύο ημιτονοειδείς συναρτήσεις ίδιας συχνότητας χρησιμοποιώντας τις διανυσματικές παραστάσεις

- Έστω οι ημιτονοειδείς συναρτήσεις

$$a(t) = \sqrt{2}A\cos(\omega t + \alpha), b(t) = \sqrt{2}B\cos(\omega t + \beta)$$

- Το άθροισμα είναι  $c(t) = a(t) + b(t)$

- Αντικαθιστώντας από την (2.3):

$$\begin{aligned} c(t) &= \operatorname{Re} \left( \sqrt{2}Ae^{j(\omega t + \alpha)} + \sqrt{2}Be^{j(\omega t + \beta)} \right) = \operatorname{Re} \left( \sqrt{2}e^{j\omega t} (Ae^{j\alpha} + Be^{j\beta}) \right) \\ &= \operatorname{Re} \left( \sqrt{2}e^{j\omega t} (\hat{A} + \hat{B}) \right) = \operatorname{Re} \left( \sqrt{2}e^{j\omega t} \hat{C} \right) \end{aligned}$$

όπου  $\hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$



# Η χρησιμότητα των παραστατικών αριθμών

- Μόλις αποδείξαμε ότι ο μιγαδικός αριθμός του αθροίσματος είναι ίσος με το άθροισμα των μιγαδικών αριθμών
- Αντίστοιχες ταυτότητες ισχύουν για άλλους κοινούς τελεστές
- Και επειδή στα κυκλώματα εναλλασόμενου ρεύματος όλα τα μεγέθη αντιστοιχούν σε ημιτονοειδή σήματα, η απλοποίηση των αριθμητικών υπολογισμών είναι σημαντική όταν χρησιμοποιούμε παραστατικούς αριθμούς

# Παραστατικοί μιγαδικοί αριθμοί

Ορισμοί

Παραδείγματα

**Νόμοι Kirchhoff**

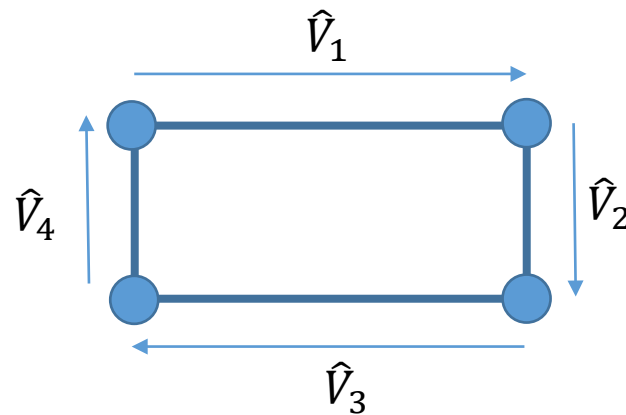
# Νόμοι Kirchhoff

- Δείξαμε στο παράδειγμα 2.1.2(γ) ότι τα αθροίσματα ημιτονοειδών συναρτήσεων είναι ισοδύναμα με τα αθροίσματα των φασιθετών τους
- Άρα, σε κυκλώματα με ημιτονοειδή σήματα ίσης συχνότητας, μπορούμε να εκφράσουμε τους νόμους τάσης και ρεύματος του Kirchhoff με φασιθέτες

# Νόμος τάσεων

**Νόμος τάσεων:** το άθροισμα πτώσεων τάσεων κατά μήκος κάθε βρόχου ενός κυκλώματος είναι μηδέν:

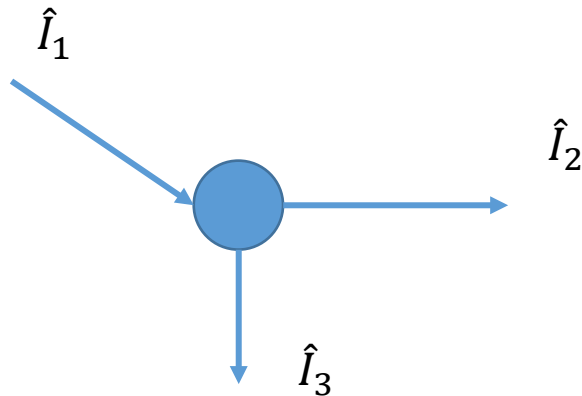
$$\sum_i \hat{V}_i = 0$$



# Νόμος ρευμάτων

**Νόμος ρευμάτων:** το άθροισμα των ρευμάτων σε κάθε κόμβο ενός κυκλώματος είναι μηδέν:

$$\sum_i \hat{I}_i = 0$$



# Σύνθετες αντιστάσεις παθητικών στοιχείων

Αυτεπαγωγή

Ωμική αντίσταση

Πυκνωτής

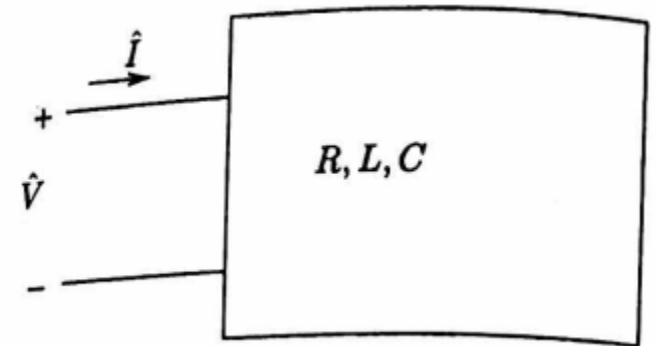
Σύνθετη (μιγαδική) αγωγιμότητα

# Σύνθετη αντίσταση

- Η **σύνθετη αντίσταση** ενός γραμμικού παθητικού δικτύου που αποτελείται από ωμικές αντιστάσεις, πηνία και πυκνωτές ορίζεται ως εξής:

$$\mathbf{Z} = \frac{\hat{V}}{\hat{I}} = R + jX \quad (2.9)$$

- $\hat{V}$ : μιγαδική τάση στα άκρα του στοιχείου
- $\hat{I}$ : ρεύμα που διαρρέει το στοιχείο
- $R$ : πραγματικό μέρος σύνθετης αντίστασης, *ωμική αντίσταση*
- $X$ : φανταστικό μέρος σύνθεσης αντίστασης, *επαγωγική αντίδραση*



# Νόμος του Ohm για αυτεπαγωγές

- Νόμος του Ohm για πηνίο με αυτεπαγωγή  $L$ :

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (2.10)$$

- Αν το ρεύμα είναι ημιτονοειδής συνάρτηση:

$$i(t) = \text{Re} \left( \sqrt{2} e^{j\omega t} \hat{I} \right) \quad (2.11)$$

- Αντικαθιστώντας τη (2.11) στη (2.10):

$$v = L \frac{d}{dt} \text{Re} \left( \sqrt{2} e^{j\omega t} \hat{I} \right) = \text{Re} \left( \sqrt{2} e^{j\omega t} j\omega L \hat{I} \right)$$

- Άρα εξ'ορισμού ενός φασιθέτη (το μπλε μέρος στην προηγούμενη εξίσωση)

$$\hat{V} = j\omega L \hat{I} \quad (2.12)$$



# Σύνθετη αντίσταση αυτεπαγωγής

- Από την (2.12), εξ'ορισμού της σύνθετης αντίστασης, έχουμε ότι η σύνθετη αντίσταση ενός πηνίου είναι:

$$\mathbf{Z}_L = j\omega L \quad (2.13)$$

- Άρα ένα ιδανικό πηνίο (αυτεπαγωγή) έχει
  - μηδενική  $\omega$ μική αντίσταση
  - επαγωγική αντίδραση ίση με  $\omega L$

# Σύνθετες αντιστάσεις παθητικών στοιχείων

Αυτεπαγωγή

Ωμική αντίσταση

Πυκνωτής

Σύνθετη (μιγαδική) αγωγιμότητα

# Νόμος του Ohm για ωμικές αντιστάσεις

- Νόμος του Ohm για ωμική αντίσταση  $R$ :

$$v = Ri \quad (2.14)$$

- Αντικαθιστώντας το ρεύμα από την εξίσωση (2.11):

$$v = R \operatorname{Re} \left( \sqrt{2} e^{j\omega t} \hat{I} \right) = \operatorname{Re} \left( \sqrt{2} e^{j\omega t} R \hat{I} \right)$$

- Άρα εξ'ορισμού ενός φασιθέτη (το μπλε μέρος στην προηγούμενη εξίσωση)

$$\hat{V} = R \hat{I} \quad (2.15)$$

# Σύνθετη αντίσταση ωμικής αντίστασης

- Από την (2.15), εξ'ορισμού της σύνθετης αντίστασης, έχουμε ότι η σύνθετη αντίσταση μιας ωμικής αντίστασης είναι:

$$\mathbf{Z}_R = R \quad (2.16)$$

- Άρα ένα ιδανικό πηνίο (αυτεπαγωγή) έχει
  - *ωμική αντίσταση  $R$*
  - *επαγωγική αντίδραση ίση με μηδέν*

# Σύνθετες αντιστάσεις παθητικών στοιχείων

Αυτεπαγωγή

Ωμική αντίσταση

**Πυκνωτής**

Σύνθετη (μιγαδική) αγωγιμότητα

# Νόμος του Ohm για πυκνωτές

- Νόμος του Ohm για πυκνωτή  $C$ :

$$i = C \frac{dv}{dt} \quad (2.17)$$

- Αν η τάση είναι ημιτονοειδής συνάρτηση:

$$v(t) = \text{Re} \left( \sqrt{2} e^{j\omega t} \hat{V} \right) \quad (2.18)$$

- Παραγωγίζοντας τη (2.18) έχουμε:

$$i = C \frac{d}{dt} \text{Re} \left( \sqrt{2} e^{j\omega t} \hat{V} \right) = \text{Re} \left( \sqrt{2} e^{j\omega t} j\omega C \hat{V} \right)$$

- Άρα, εξ'ορισμού ενός φασιθέτη (το μπλε μέρος στην προηγούμενη εξίσωση):

$$\hat{I} = j\omega C \hat{V} \quad (2.19)$$

# Σύνθετη αντίσταση πυκνωτή

- Από την (2.19), εξ'ορισμού της σύνθετης αντίστασης, έχουμε ότι η σύνθετη αντίσταση ενός πυκνωτή είναι:

$$\mathbf{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C} \quad (2.20)$$

- Άρα ένας πυκνωτής έχει
  - μηδενική *ωμική αντίσταση*
  - αρνητική *επαγωγική αντίδραση* ίση με  $-\frac{1}{\omega C}$

# Σύνθετες αντιστάσεις παθητικών στοιχείων

Αυτεπαγωγή

Ωμική αντίσταση

Πυκνωτής

Σύνθετη (μικαδική) αγωγιμότητα



# Σύνθετη (μιγαδική) αγωγιμότητα

- Η σύνθετη (ή μιγαδική) αγωγιμότητα ενός δικτύου είναι το αντίστροφο της σύνθετης που ορίστηκε στη (2.9):

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{\hat{I}}{\hat{V}} = G + jB \quad (2.21)$$

- $G$ : πραγματικό μέρος (ωμική αγωγιμότητα)
- $B$ : φανταστικό μέρος (χωρητική αγωγιμότητα)

# Σύνθετη αγωγιμότητα

- Αντικαθιστώντας στην (2.21) από την (2.9):

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2} \quad (2.22)$$

- Άρα η ωμική αγωγιμότητα είναι:

$$G = \operatorname{Re}(\mathbf{Y}) = \frac{R}{R^2 + X^2} \quad (2.23)$$

- Και η χωρητική αγωγιμότητα είναι:

$$B = \operatorname{Im}(\mathbf{Y}) = -\frac{X}{R^2 + X^2} \quad (2.24)$$

- Από την (2.24), παρατηρούμε ότι μια αυτεπαγωγή έχει αρνητική χωρητική αγωγιμότητα ( $B < 0$ )

# Ενεργός και άεργος ισχύς

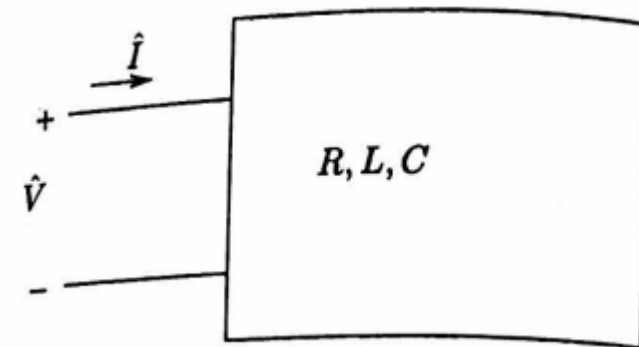
Ορισμοί

Επαγωγική και χωρητική φόρτιση

Στιγμιαία ισχύς

Παράδειγμα

# Μιγαδική ισχύς



- Έστω ένα γραμμικό παθητικό δίκτυο, δηλαδή ένα ηλεκτρικό φορτίο που αποτελείται από αντιστάσεις, πυκνωτές και πηνία
- Έστω ότι το φορτίο τροφοδοτείται από μια τάση  $\hat{V}$  και διαρρέεται από ρεύμα  $\hat{I}$
- Η **μιγαδική ισχύς** που απορροφάται από το δίκτυο ορίζεται ως:  
$$\mathbf{S} = P + jQ = \hat{V}\hat{I}^* \quad (2.25)$$

- Θα δούμε σε λίγο ότι αυτός ο μιγαδικός αριθμός αποσυνθέτει την ισχύ που απορροφάται από ένα κύκλωμα σε δύο μέρη:
  - Το πραγματικό μέρος αντιστοιχεί σε ένα ημιτονοειδές σήμα που δεν πέφτει ποτέ κάτω από το μηδέν και άρα αντιστοιχεί στη χρήσιμη ισχύ που απορροφάται από το κύκλωμα
  - Το φανταστικό μέρος αντιστοιχεί σε ένα ημιτονοειδές σήμα που έχει μέσο όρο μηδέν, και αντιστοιχεί σε «ημιτονοειδή θόρυβο» που πρέπει να μεταδωθεί στο κύκλωμα για να περάσει χρήσιμη ισχύς στο κύκλωμα

# Φαινόμενη ισχύς

- Έστω ότι το ρεύμα  $\hat{I}$  είναι διάνυσμα αναφοράς ( $\hat{I} = I \angle 0^\circ$ )
- Και έστω ότι η τάση  $\hat{V}$  έχει πολική μορφή  $\hat{V} = V \angle \theta$
- Άρα η (2.25) γίνεται:

$$\mathbf{S} = VI \angle \theta \quad (2.26)$$

- Η **φαινόμενη ισχύς**  $S$  ορίζεται ως το μέτρο της μιγαδικής ισχύος
  - Μετράται σε Volt-Ampere (VA)
  - Πολλαπλάσια: kVA ( $10^3$  VA), MVA ( $10^6$  VA)
- Από την (2.26) βλέπουμε ότι
  - η φαινόμενη ισχύς είναι το γινόμενο των μέτρων τάσης και ρεύματος
  - η φάση της μιγαδικής ισχύος είναι ίση με τη διαφορά φάσεων τάσης και ρεύματος

# Ενεργός και άεργος ισχύς

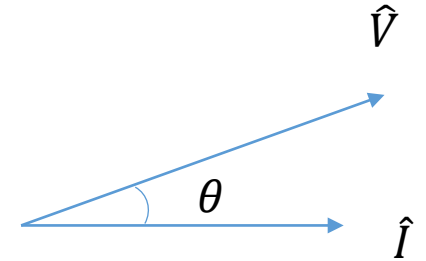
- Η **ενεργός ισχύς** ή **πραγματική ισχύς** ορίζεται ως το πραγματικό μέρος της μιγαδικής ισχύος
- Συγκρίνοντας την (2.25) με την (2.26), ισούται με
$$P = \operatorname{Re}(\mathbf{S}) = VI\cos\theta \quad (2.27)$$
- Μονάδα μέτρησης: Watt (W), με πολλαπλάσια το kilowatt (kW) και το Megawatt (MW)
- Η **άεργος ισχύς** ορίζεται ως το φανταστικό μέρος της μιγαδικής ισχύος
- Συγκρίνοντας την (2.25) με την (2.26), ισούται με
$$Q = \operatorname{Im}(\mathbf{S}) = VI\sin\theta \quad (2.28)$$
- Μονάδα μέτρησης: Volt-Ampere-reactive (Var), με πολλαπλάσια το kVar και το MVar

# Συντελεστής ισχύος

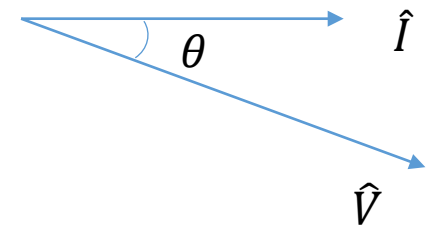
- Η **γωνία συντελεστή ισχύος** ορίζεται ως η φάση της μιγαδικής ισχύος, δηλαδή η γωνία  $\theta$  της εξίσωσης (2.26)
- Ο **συντελεστής ισχύος** ( $\Sigma I$ ) είναι το συνημίτονο της γωνίας  $\theta$ :

$$\Sigma I = \cos\theta \quad (2.29)$$

- Από το συνημίτονο δε φαίνεται αν η γωνία  $\theta$  είναι θετική ή αρνητική
- Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούμε την εξής ορολογία:
  - Επαγωγικός  $\Sigma I$ :  $\theta > 0$ , δηλαδή η τάση προηγείται του ρεύματος
  - Χωρητικός  $\Sigma I$ :  $\theta < 0$ , δηλαδή το ρεύμα προηγείται της τάσης



Επαγωγικός  $\Sigma I$



Χωρητικός  $\Sigma I$

# Ενεργός και άεργος ισχύς

Ορισμοί

Επαγωγική και χωρητική φόρτιση

Στιγμιαία ισχύς

Παράδειγμα



# Φάση μιγαδικής ισχύος $S$ και σύνθετης αντίστασης $Z$

- Υπάρχει σύνδεση μεταξύ της μιγαδικής ισχύος και της σύνθετης αντίστασης ενός φορτίου
- Σύμφωνα με την (2.9), η μιγαδική αντίσταση είναι

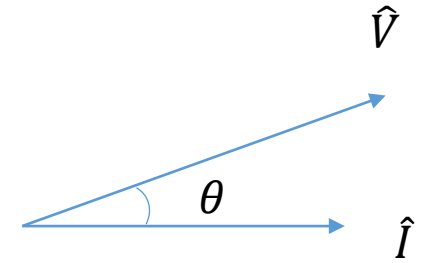
$$Z = \frac{\hat{V}}{\hat{I}} = \frac{V}{I} \angle \theta \quad (2.30)$$

- Άρα η γωνία του συντελεστή ισχύος είναι ίδια με τη φάση της σύνθετης αντίστασης του φορτίου

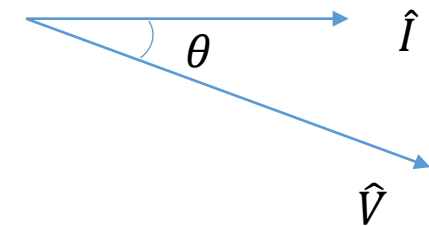
# Επαγωγική και χωρητική φόρτιση

- **Επαγωγική φόρτιση:** όταν το φορτίο είναι επαγωγικό, η τάση προηγείται του ρεύματος, δηλαδή η γωνία  $\theta$  είναι θετική και η άεργος ισχύς είναι θετική
  - Το επαγωγικό φορτίο απορροφά άεργο ισχύ
  - Το επαγωγικό φορτίο παράγει αρνητική άεργο ισχύ
- **Χωρητική φόρτιση:** όταν το φορτίο είναι χωρητικό, η τάση ακολουθεί το ρεύμα, δηλαδή η γωνία  $\theta$  είναι αρνητική και η άεργος ισχύς είναι αρνητική
  - Το χωρητικό φορτίο παράγει άεργο ισχύ
  - Το χωρητικό φορτίο απορροφά αρνητική άεργο ισχύ
- Ισχύς που καταναλώνει ένα φορτίο:

$$\mathbf{S} = \hat{V}\hat{I}^* = \hat{V}\left(\frac{\hat{V}}{\mathbf{Z}}\right)^* = \frac{V^2}{\mathbf{Z}^*} = V^2\mathbf{Y}^* \quad (2.31)$$



Επαγωγική φόρτιση



Χωρητική φόρτιση

# Ενεργός και άεργος ισχύς

Ορισμοί

Επαγωγική και χωρητική φόρτιση

**Στιγμιαία ισχύς**

Παράδειγμα

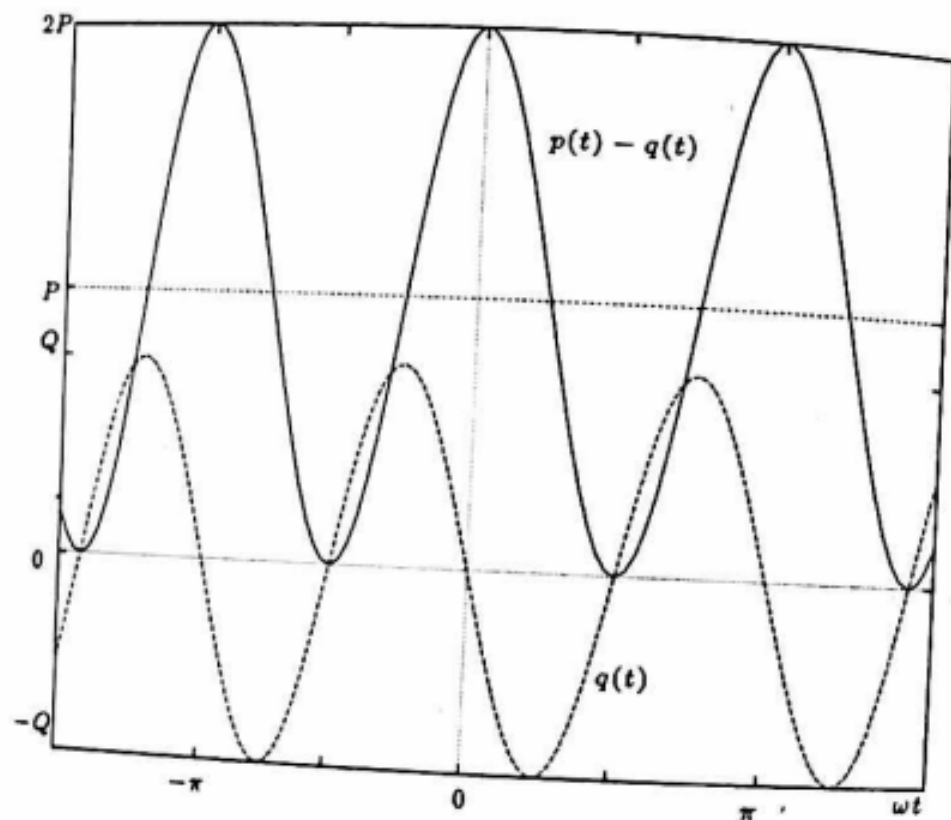
# Στιγμιαία ισχύς

- Θυμηθείτε όταν ορίσαμε τη φαινόμενη ισχύ ότι δώσαμε μια φυσική «εξήγηση» του ορισμού της. Ας δούμε με μαθηματική ακρίβεια τι εννοούσαμε.
- Η στιγμιαία ισχύς που απορροφά ένα μονοφασικό δίκτυο σε ημιτονοειδή μόνιμη κατάσταση είναι:

$$\begin{aligned} p(t) &= v(t) \cdot i(t) \\ &= 2VI \cos(\omega t) \cos(\omega t + \theta) = VI \cos\theta + VI \cos(2\omega t + \theta) \\ &= VI \cos\theta (1 + \cos(2\omega t)) - VI \sin\theta \sin(2\omega t) \\ &= P(1 + \cos(2\omega t)) - Q \sin(2\omega t) \quad (2.32) \end{aligned}$$

- Άρα η ισχύς που απορροφά το κύκλωμα είναι μια ημιτονοειδής συνάρτηση, και αποσυντίθεται σε δύο μέρη:
  - Η **μπλε συνιστώσα** είναι το μέρος που είναι χρήσιμο έργο, μιας και δεν πέφτει ποτέ κάτω από το μηδέν
  - Και η **πορτοκαλί συνιστώσα** είναι «ημιτονοειδής θόρυβος» με μέση τιμή μηδέν, ως παρενέργεια της μεταφοράς ενεργού ισχύος στο κύκλωμα

# Συνιστώσες στιγμιαίας ισχύος



Η **μπλε συνιστώσα**  $p(t) - q(t)$  είναι το μέρος που είναι χρήσιμο έργο, μιας και δεν πέφτει ποτέ κάτω από το μηδέν

Η **πορτοκαλί συνιστώσα**  $q(t)$  είναι «ημιτονοειδής θόρυβος» με μέση τιμή μηδέν, ως παρενέργεια της μεταφοράς ενεργού ισχύος στο κύκλωμα

# Ενεργός ισχύς

- Είδαμε προηγουμένως (εξισώσεις (2.25) και (2.26)) ότι η ενεργός ισχύς είναι εξ'ορισμού ίση με  $P = VI \cos\theta$
- Και από την (2.26) μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η ενεργός ισχύς είναι επίσης ίση με τη μέση τιμή της στιγμιαίας ισχύος:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \quad (2.33)$$

- Η μπλε συνιστώσα  $p(t) - q(t)$  της εξίσωσης (2.32)
  - είναι πάντα θετική
  - έχει μέση τιμή ίση με την ενεργό ισχύ  $P$
  - έχει πλάτος ταλάντωσης ίσο με την ενεργό ισχύ  $P$

# Στιγμιαία άεργος ισχύς

- Είδαμε προηγουμένως (εξισώσεις (2.25) και (2.26)) ότι η άεργος ισχύς είναι εξ'ορισμού ίση με  $Q = VI \sin\theta$
- Η **πορτοκαλί συνιστώσα  $q(t)$**  ονομάζεται **στιγμιαία άεργος ισχύς**
  - Έχει πλάτος ταλάντωσης ίσο με την άεργο ισχύ  $Q$
  - Προηγείται κατά  $90^\circ$  της πρώτης συνιστώσας

# Συμπέρασμα

- Σε ένα μονοφασικό κύκλωμα, η στιγμιαία ισχύς έχει μια παλλόμενη συνιστώσα με διπλάσια συχνότητα (ακόμη και όταν ο ΣΙ είναι μονάδα)
- Η στιγμιαία άεργος ισχύς είναι μια πρόσθετη ταλάντωση ισχύος στη διπλάσια συχνότητα προπορευόμενη κατά  $90^\circ$  από την προηγούμενη με πλάτος ανάλογο του ημιτόνου  $\theta$



# Ενεργός και άεργος ισχύς

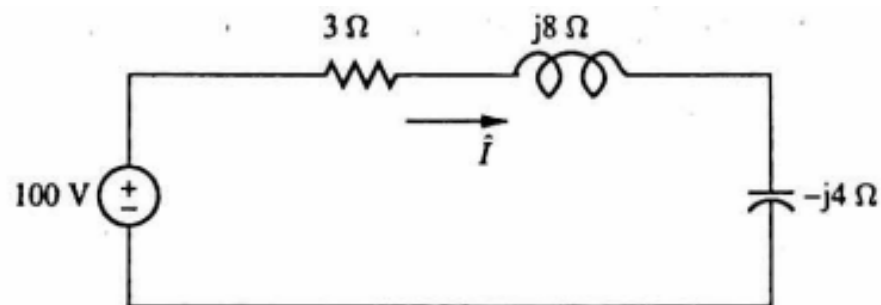
Ορισμοί

Επαγωγική και χωρητική φόρτιση

Στιγμιαία ισχύς

**Παράδειγμα**

## Παράδειγμα 2.3.4



Να υπολογιστεί η καταναλισκόμενη ισχύς συνολικά, και σε κάθε στοιχείο του κυκλώματος

# Συνολική κατανάλωση ισχύος

- Η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος είναι:

$$\mathbf{Z} = 3 + j8 - j4 = 3 + j4 = 5\Omega \angle 53.1^\circ \text{ (επαγωγικό φορτίο)}$$

- Το ρεύμα δίνεται από τη σχέση:

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}}{\mathbf{Z}} = \frac{100\text{V} \angle 0^\circ}{5\Omega \angle 53.1^\circ} = 20\text{A} \angle -53.1^\circ$$

- Η μιγαδική ισχύς  $\mathbf{S}$  που απορροφάται είναι:

$$\mathbf{S} = \hat{V} \hat{I}^* = (100\text{V} \angle 0^\circ)(20\text{A} \angle 53.1^\circ) = 1200\text{W} + j1600\text{Var}$$

# Επιμέρους κατανάλωση ισχύος

- Η μιγαδική ισχύς που καταναλώνει η αντίσταση  $R$  είναι:

$$\mathbf{S}_R = \hat{V}_R \hat{I}^* = R \hat{I} \hat{I}^* = R I^2 = 1200\text{W} + j0$$

- Η μιγαδική ισχύς που καταναλώνει το πηνίο είναι:

$$\mathbf{S}_L = \hat{V}_L \hat{I}^* = jX_L \hat{I} \hat{I}^* = jX_L I^2 = j3200 \text{ Var}$$

- Η μιγαδική ισχύς που καταναλώνει ο πυκνωτής είναι:

$$\mathbf{S}_C = \hat{V}_C \hat{I}^* = jX_C \hat{I} \hat{I}^* = jX_C I^2 = -j1600 \text{ Var}$$

# Τριφασικά συστήματα: φασική και πολική τάση

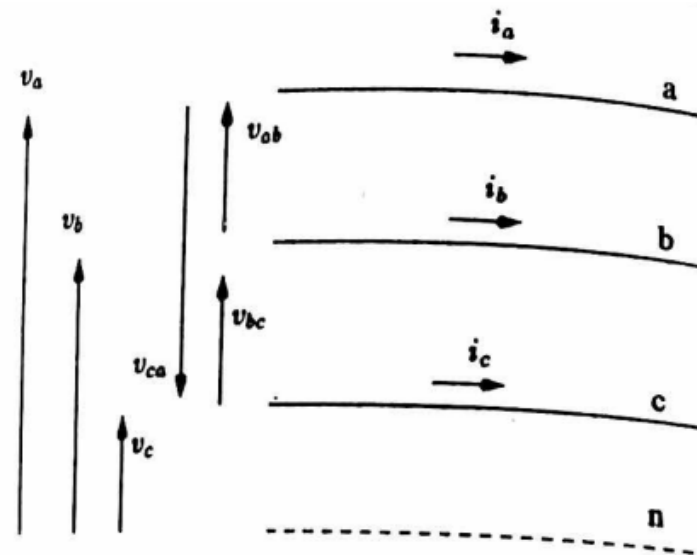
# Τριφασικά συστήματα

- Τα δίκτυα εναλλασόμενου ρεύματος υψηλής ισχύος είναι τριφασικά συστήματα: 3 αγωγοί και ένας ουδέτερος (και μάλιστα ο ουδέτερος δεν είναι καν απαραίτητος σε συμμετρικές συνθήκες λειτουργίας)
- Πώς / γιατί επικράτησε αυτό; Γιατί τρεις φάσεις (και όχι 1, 2, 4, ή κάτι άλλο); Θα μάθουμε την απάντηση μέχρι το τέλος του κεφαλαίου.

# Συμμετρικά τριφασικά συστήματα

- Στα **συμμετρικά τριφασικά συστήματα** οι τάσεις και τα ρεύματα έχουν ίσα μέτρα, και οι γωνίες διαφέρουν κατά  $120^\circ$ :

$$\begin{aligned}v_a &= \sqrt{2}V\cos(\omega t) & i_a &= \sqrt{2}I\cos(\omega t - \theta) \\v_b &= \sqrt{2}V\cos(\omega t - 2\pi/3) & i_b &= \sqrt{2}I\cos(\omega t - 2\pi/3 - \theta) \\v_c &= \sqrt{2}V\cos(\omega t + 2\pi/3) & i_c &= \sqrt{2}I\cos(\omega t + 2\pi/3 - \theta)\end{aligned}\quad (2.34)$$



- Διακεκομμένη γραμμή: ουδέτερος κόμβος (σημείο αναφοράς για τα δυναμικά  $v_a, v_b, v_c$ , οπότε ας το θέσουμε χωρίς απώλεια γενικότητας ίσο με μηδέν)

# Φασικές και πολικές τάσεις

- Οι τάσεις  $v_a, v_b, v_c$  εκφράζουν διαφορές δυναμικού από τον ουδέτερο κόμβο και ονομάζονται **φασικές τάσεις**
- Οι τάσεις  $v_{ab}, v_{bc}, v_{ca}$  μεταξύ των φάσεων ονομάζονται **πολικές τάσεις**



# Φασιθέτες φασικών και πολικών τάσεων

- Έστω ότι οι φασικές τάσεις γράφονται σε μιγαδική μορφή ως:

$$\begin{aligned}\hat{V}_a &= V\angle 0^\circ \\ \hat{V}_b &= V\angle -120^\circ \\ \hat{V}_c &= V\angle 120^\circ\end{aligned}\quad (2.35)$$

- Άρα οι πολικές τάσεις μπορούν να εκφραστούν ως:

$$\begin{aligned}\hat{V}_{ab} &= \hat{V}_a - \hat{V}_b = V - \left(-\frac{1}{2} - \frac{j\sqrt{3}}{2}\right)V = \sqrt{3}V \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}V\angle 30^\circ \\ \hat{V}_{bc} &= \hat{V}_b - \hat{V}_c = \left(-\frac{1}{2} - \frac{j\sqrt{3}}{2}\right)V - \left(-\frac{1}{2} + \frac{j\sqrt{3}}{2}\right)V = \sqrt{3}V\angle -90^\circ \\ \hat{V}_{ca} &= \hat{V}_c - \hat{V}_a = \left(-\frac{1}{2} + \frac{j\sqrt{3}}{2}\right)V - V = \sqrt{3}V \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}V\angle 150^\circ\end{aligned}$$

# Στιγμιαίες τιμές των πολικών τάσεων

- Πόσο είναι οι στιγμιαίες τιμές των πολικών τάσεων; Ας χρησιμοποιήσουμε τις τριγωνομετρικές μας ταυτότητες:

$$\cos A - \cos B = 2 \sin \frac{A + B}{2} \sin \frac{A - B}{2} \quad (2.36)$$

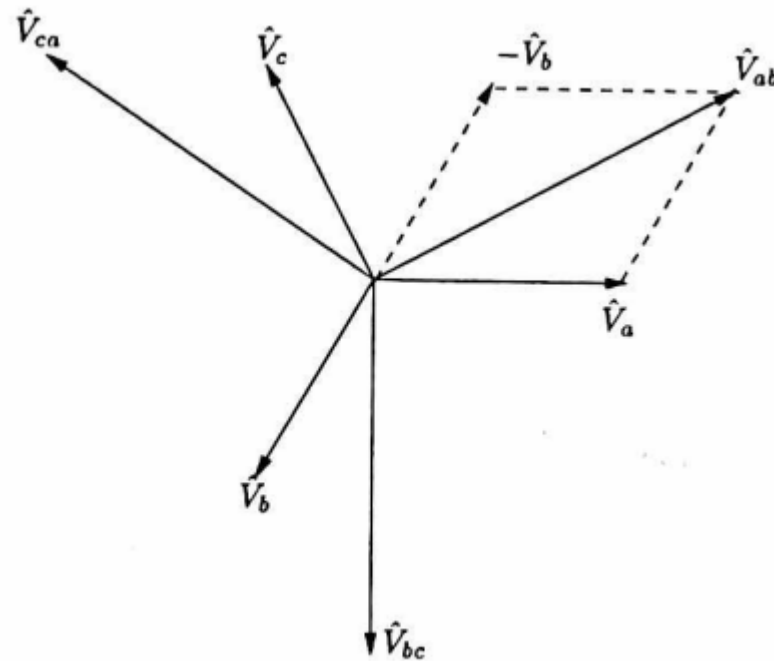
- Από τις (2.34) συμπεραίνουμε πως:

$$\begin{aligned} v_{ab} &= \sqrt{6}V \cos(\omega t + \pi/6) \\ v_{bc} &= \sqrt{6}V \cos(\omega t - \pi/2) \\ v_{ca} &= \sqrt{6}V \cos(\omega t + 5\pi/6) \end{aligned} \quad (2.37)$$

- Το οποίο το γνωρίζαμε ήδη από την προηγούμενη διαφάνεια

# Φασιθέτες φυσικών και πολικών τάσεων

Το αποτέλεσμα των εξισώσεων (2.37) επαληθεύεται και «με το μάτι»



# Ένα προς ένα αντιστοιχία φασικών και πολικών τάσεων

- Οι εξισώσεις της διαφάνειας 57 μας δίνουν τις πολικές τάσεις όταν γνωρίζουμε τις φασικές
- Αλλά μπορούμε να πάμε και «πίσω»: αν γνωρίζουμε τις πολικές τάσεις, αυτές μας δίνουν τις φασικές:

$$\hat{V}_{ab} - \hat{V}_{ca} = \hat{V}_a - \hat{V}_b - (\hat{V}_c - \hat{V}_a) = 3\hat{V}_a \quad (2.38)$$

- Πώς προέκυψε η τελευταία ισότητα της (2.38); Λόγω της συμμετρίας του τριφασικού συστήματος:

$$\hat{V}_a + \hat{V}_b + \hat{V}_c = 0 \quad (2.39)$$

- Οπότε φτάνουμε στις εξής σχέσεις:

$$\begin{aligned}\hat{V}_a &= (\hat{V}_{ab} - \hat{V}_{ca})/3 \\ \hat{V}_b &= (\hat{V}_{bc} - \hat{V}_{ab})/3 \\ \hat{V}_c &= (\hat{V}_{ca} - \hat{V}_{bc})/3\end{aligned} \quad (2.40)$$

# Μία φάση για να τις ενώσει όλες



- Αφού δουλεύουμε με συμμετρικό τριφασικό σύστημα, όλες οι τάσεις είναι γνωστές αν ξέρουμε τη μία
- Άρα δε χρειάζεται να υπολογίζουμε και τις τρεις φάσεις ξεχωριστά
- Το μόνο που χρειάζεται να συγκρατήσουμε είναι ότι η φασική τάση συνδέεται με την πολική τάση με την ακόλουθη σχέση:

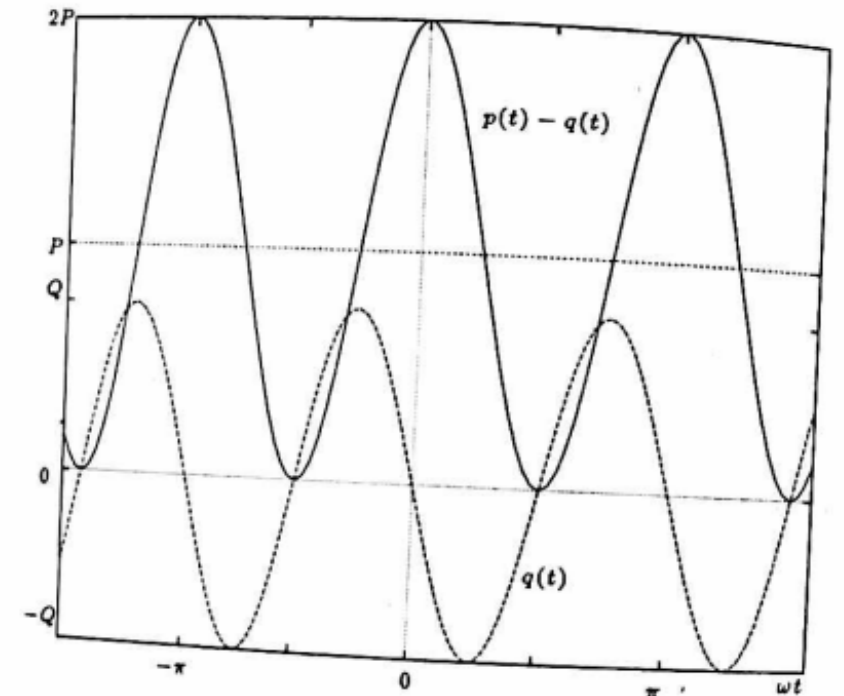
$$\hat{V}_{\pi} = \sqrt{3}\hat{V}_{\varphi} \angle + 30^{\circ} \quad (2.41)$$

- Εκτός αν αναφέρεται ρητά κάτι διαφορετικό, η τάση που δίνεται σε εφαρμογές είναι η πολική τάση

# Τριφασική ισχύς

# Υπενθύμιση: αποσύνθεση της στιγμιαίας ισχύος

- Έχουμε δείξει ότι η ισχύς που ρέει σε μια μονοφασική γραμμή εναλλασόμενου ρεύματος αποτελείται από δύο παλλόμενες συνιστώσες:
  - Η **μπλε συνιστώσα**  $p(t) - q(t)$  έχει μέση τιμή ίση με την πραγματική (ενεργό) ισχύ  $P$  και ίσο πλάτος ταλάντωσης
  - Η **πορτοκαλί συνιστώσα**  $q(t)$  έχει μέση τιμή μηδέν και πλάτος ταλάντωσης ίσο με την άεργο ισχύ  $Q$



# Συνολική ισχύς σε τρεις φάσεις

- Στο τριφασικό σύστημα, η εικόνα για κάθε φάση είναι ίδια όπως στην προηγούμενη διαφάνεια, αλλά μετατοπισμένη κατά  $240^\circ$

- Έχουμε στη διαφάνεια 44 ότι

$$p_a(t) = VI \cos\theta + VI \cos(2\omega t + \theta)$$

- Αν θεωρήσουμε τρεις συμμετρικές φάσεις έχουμε συνεπώς:

$$\begin{aligned} p(t) &= p_a(t) + p_b(t) + p_c(t) = \\ &= VI \cos\theta + VI \cos(2\omega t + \theta) + \\ &VI \cos\theta + VI \cos(2\omega t - 4\pi/3 + \theta) + \\ &VI \cos\theta + VI \cos(2\omega t + 4\pi/3 + \theta) \\ &= 3VI \cos\theta \end{aligned}$$



# Συνολική ισχύς σε τρεις φάσεις

- Άρα η συνολικά μεταφερόμενη στιγμιαία ισχύς σε ένα τριφασικό σύστημα είναι:

$$P = 3V_{\varphi}I_L \cos \theta = \sqrt{3}V_{\pi}I_L \cos \theta \quad (2.42)$$

- Όπου
  - $V_{\varphi} = V$ : ενεργός τιμή των φασικών τάσεων
  - $V_{\pi} = \sqrt{3}V$ : ενεργός τιμή των πολικών τάσεων
  - $I_L$ : ενεργός τιμή ρεύματος σε κάθε φάση της γραμμής

# Γιατί λοιπόν τρεις φάσεις;

- Ένα τριφασικό (και γενικά πολυφασικό) σύστημα μπορεί να μεταφέρει σταθερή στιγμιαία ισχύ, σημαντικό πλεονέκτημα σε σχέση με μονοφασικό σύστημα
- Το πλεονέκτημα αυτό αξιοποιείται κατεξοχήν στις τριφασικές μηχανές εναλλασόμενου ρεύματος
- Αν και η συνολική ισχύς είναι σταθερή, συνεχίζουμε να έχουμε παλλόμενη ισχύ σε κάθε φάση, δηλαδή **άεργο ισχύ**
  - Η παρουσία άεργου ισχύος σε κάθε φάση προκαλεί αύξηση της ενεργού τιμής του ρεύματος που απαιτείται για τη μεταφορά της ίδιας ποσότητας ενεργού ισχύος (βλέπε όρο  $\cos \theta$  στην εξίσωση (2.42))

# Τριφασική άεργος και τριφασική μιγαδική ισχύς

- Η **τριφασική άεργος ισχύς**  $Q$  ορίζεται ως το άθροισμα του εύρους ταλάντωσης της στιγμιαίας αέργου ισχύος των τριών φάσεων (κατ'αναλογία προς τη μία φάση):

$$Q = 3V_{\varphi} I_L \sin \theta = \sqrt{3}V_{\pi} I_L \sin \theta \quad (2.43)$$

- Αφού μετράμε εύρος ταλάντωσης (δηλαδή μια μη αρνητική ποσότητα), η υπόθεση εδώ είναι ότι το  $\theta$  είναι η θετική διαφορά φάσεως μεταξύ τάσης και ρεύματος
- Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2.42) και (2.43), η τριφασική μιγαδική ισχύς ορίζεται ως

$$\mathbf{S} = P + jQ = 3\hat{V}_{\varphi} \hat{I}_L^* \quad (2.44)$$

- **Προσοχή:** το  $\theta$  είναι η διαφορά μεταξύ φασικής (όχι πολικής) τάσης και ρεύματος

# Συνδεσμολογία αστέρα και τριγώνου

Πηγή συνδεδεμένη κατ'αστέρα

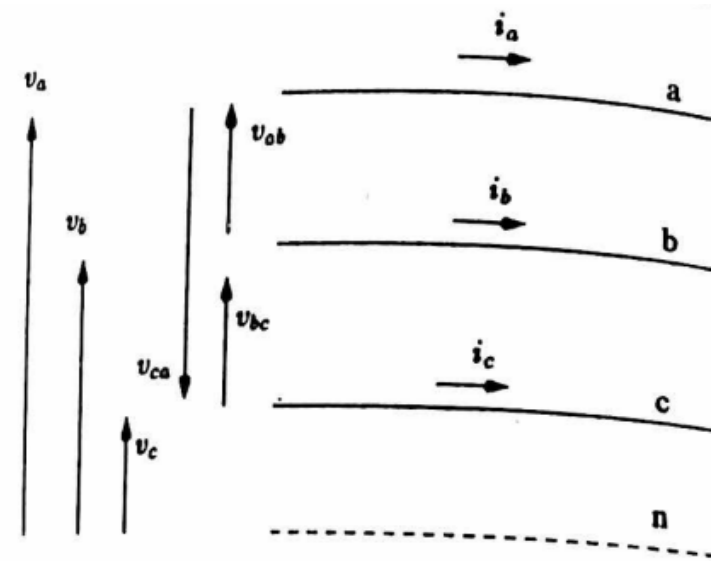
Πηγή συνδεδεμένη κατά τρίγωνο

Φορτίο συνδεδεμένο κατ'αστέρα και κατά τρίγωνο

Μετατροπή τριγώνου σε αστέρα

# Τριφασικές συνδεσμολογίες

- Έστω ότι στο κύκλωμα του σχήματος συνδέουμε μια τριφασική γεννήτρια με ένα τριφασικό φορτίο
- Υποθέτουμε ότι η γεννήτρια αναπαρίσταται ως πηγή τάσης (προς το παρόν χωρίς εσωτερική σύνθετη αντίσταση)
- Το φορτίο αποτελείται από τρεις σύνθετες αντιστάσεις
- Υπάρχουν δύο τρόποι που μπορεί να συνδεθεί τόσο η πηγή, όσο και το φορτίο:
  - Κατ'αστέρα
  - Κατά τρίγωνο



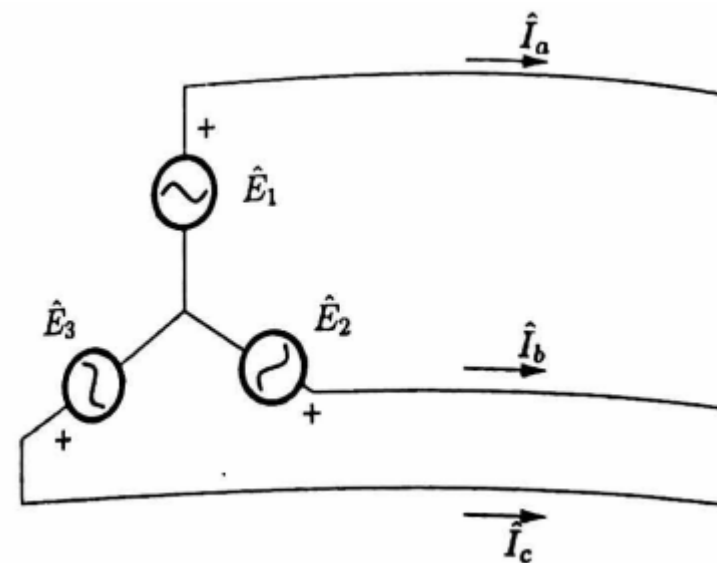
# Πηγή συνδεδεμένη κατ'αστέρα

- Έστω η σύνδεση του σχήματος
- Οι τάσεις  $\hat{E}_1, \hat{E}_2, \hat{E}_3$  (ηλεκτρεγερτική δύναμη, ΗΕΔ) ονομάζονται **φάσεις** της πηγής και συμβολίζονται με τους παραστατικούς μιγαδικούς αριθμούς:

$$\begin{aligned}\hat{E}_1 &= E \angle 0^\circ \\ \hat{E}_2 &= E \angle -120^\circ \\ \hat{E}_3 &= E \angle 120^\circ\end{aligned}\quad (2.46)$$

- Τα ρεύματα που διαρρέουν τις φάσεις της πηγής είναι ίσα με τα ρεύματα που ρέουν στη γραμμή:

$$\begin{aligned}\hat{I}_1 &= \hat{I}_a \\ \hat{I}_2 &= \hat{I}_b \\ \hat{I}_3 &= \hat{I}_c\end{aligned}\quad (2.47)$$



# Ρεύματα συνδεσμολογίας αστέρα

- Οι εξισώσεις (2.47) μπορούν να συμβολιστούν ως:

$$\hat{I}_Y = \hat{I}_L \quad (2.48)$$

- Όπου:

- $\hat{I}_Y$ : ρεύμα μιας φάσης της πηγής συνδεδεμένης κατ'αστέρα
- $\hat{I}_L$ : ρεύμα της φάσης της γραμμής

- Μπορεί (αλλά όχι υποχρεωτικά) να γειώνεται ο ουδέτερος κόμβος

- Η συνδεσμολογία αυτή (γειωμένος αστέρας) είναι διαδεδομένη σε σύγχρονες γεννήτριες

# Τάσεις συνδεσμολογίας αστέρα

- Πολικές τάσεις της γραμμής:

$$\begin{aligned}\hat{V}_{ab} &= \sqrt{3}E\angle 30^\circ \\ \hat{V}_{bc} &= \sqrt{3}E\angle -90^\circ \\ \hat{V}_{ca} &= \sqrt{3}E\angle 150^\circ\end{aligned}\tag{2.49}$$

- Αν συμβολίσουμε με  $V_\pi$  την ενεργό τιμή της πολικής τάσης και με  $E_Y$  την ενεργό τιμή της ΗΕΔ μιας φάσης, βλέπουμε από τη (2.49) ότι:

$$V_\pi = \sqrt{3}E_Y \tag{2.50}$$



# Ισχύς συνδεσμολογίας αστέρα

- Σύμφωνα με την (2.44), η ισχύς που παράγει η πηγή είναι:

$$\mathbf{S} = 3\hat{V}_\varphi \hat{I}_L^* = 3\hat{E}_Y \hat{I}_Y^* \quad (2.51)$$

- Συνδυάζοντας τις (2.48) και (2.50), και εφόσον  $\hat{V}_\varphi = \hat{E}_Y$ , η φαινόμενη ισχύς που παράγει η πηγή γράφεται συναρτήσει των στοιχείων της γραμμής:

$$S = 3V_\varphi I_L = \sqrt{3}V_\pi I_L$$

# Συνδεσμολογία αστέρα και τριγώνου

Πηγή συνδεδεμένη κατ'αστέρα

**Πηγή συνδεδεμένη κατά τρίγωνο**

Φορτίο συνδεδεμένο κατ'αστέρα και κατά τρίγωνο

Μετατροπή τριγώνου σε αστέρα

# Τάσεις συνδεσμολογίας τριγώνου

- Στη συνδεσμολογία τριγώνου, η πολική τάση της γραμμής είναι ίση με την ΗΕΔ κάθε φάσης της πηγής. Άρα για τις ενεργές τιμές ισχύει πως:

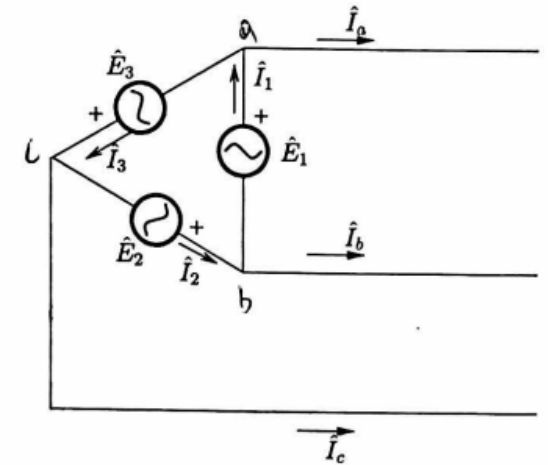
$$V_{\pi} = E_{\Delta} \quad (2.53)$$

- Η φασική τάση στη γραμμή είναι:

$$\hat{V}_a = \frac{1}{3}(\hat{E}_1 - \hat{E}_3) = \frac{E_{\Delta}}{3} \left( 1 - \left( -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = \frac{E_{\Delta}}{\sqrt{3}} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2} \right) = \frac{E_{\Delta}}{\sqrt{3}} \angle -30^{\circ}$$

- Η πρώτη ισότητα ισχύει λόγω της (2.40), η οποία λέει ότι  $\hat{V}_a = (\hat{V}_{ab} - \hat{V}_{ca})/3$
- Η δεύτερη ισότητα ισχύει λόγω της (2.35), η οποία λέει ότι  $\hat{V}_a = V \angle 0^{\circ}$  και  $\hat{V}_c = V \angle +120^{\circ}$
- Συμπέρασμα: αν μια τριφασική πηγή με ΗΕΔ  $E_{\Delta}$  ανά φάση συνδεθεί κατά τρίγωνο, το rms της φασικής τάσης της γραμμής είναι  $E_{\Delta}/\sqrt{3}$ :

$$V_{\phi} = \frac{E_{\Delta}}{\sqrt{3}} \quad (2.54)$$



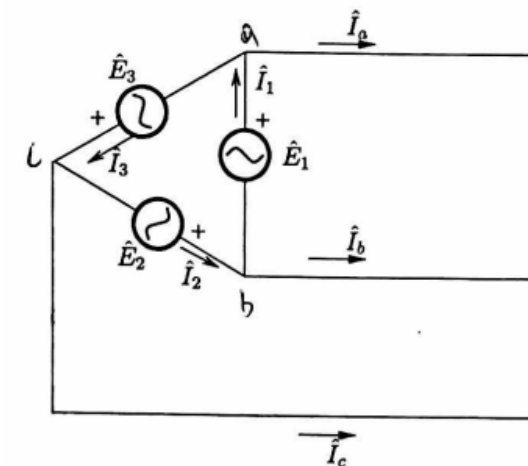
# Ρεύματα συνδεσμολογίας τριγώνου

- Όταν μια πηγή συνδέεται κατά τρίγωνο, το ρεύμα κάθε φάσης της πηγής δεν είναι πλέον ίσο με το ρεύμα της γραμμής. Απεναντίας:

$$\begin{aligned}\hat{I}_a &= \hat{I}_1 - \hat{I}_3 \\ \hat{I}_b &= \hat{I}_2 - \hat{I}_1 \\ \hat{I}_c &= \hat{I}_3 - \hat{I}_2\end{aligned}\quad (2.55)$$

- Συμβολίζοντας με  $\varphi$  τη διαφορά φάσης του φασικού ρεύματος της πηγής ως προς την τάση της πηγής, έχουμε:

$$\begin{aligned}\hat{I}_1 &= I \angle \varphi \\ \hat{I}_2 &= I \angle \varphi - 120^\circ \\ \hat{I}_3 &= I \angle \varphi + 120^\circ\end{aligned}\quad (2.56)$$



# Ρεύματα συνδεσμολογίας τριγώνου

- Αντικαθιστώντας την (2.56) στη (2.55), έχουμε:

$$\hat{I}_a = \hat{I}_1 \left( 1 - \left( -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = \sqrt{3}\hat{I}_1 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2} \right) = \sqrt{3}\hat{I}_1 \angle -30^\circ$$

- Συμπέρασμα: όταν η πηγή συνδέεται κατά τρίγωνο, το ρεύμα σε κάθε φάση της γραμμής είναι  $\sqrt{3}$  φορές μεγαλύτερο από το ρεύμα που διαρρέει τις φάσεις της πηγής. Συγκεκριμένα, για το ρεύμα γραμμής  $\hat{I}_L$  ισχύει:

$$I_L = \sqrt{3}I_\Delta \quad (2.57)$$

# Ισχύς συνδεσμολογίας τριγώνου

- Η μιγαδική ισχύς που παράγει η πηγή είναι  $\mathbf{S} = 3\hat{E}_1\hat{I}_1^*$
- Από την προηγούμενη ανάλυσή μας γνωρίζουμε ότι

- $\hat{V}_a = \frac{\hat{E}_1}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ$  και

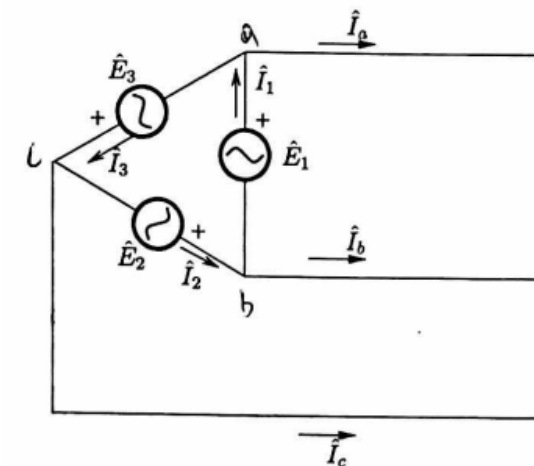
- $\hat{I}_a = \sqrt{3}\hat{I}_1 \angle -30^\circ$

- Άρα έχουμε:

$$\mathbf{S} = 3\hat{E}_1\hat{I}_1^* = 3\hat{V}_a\hat{I}_a^* \quad (2.58)$$

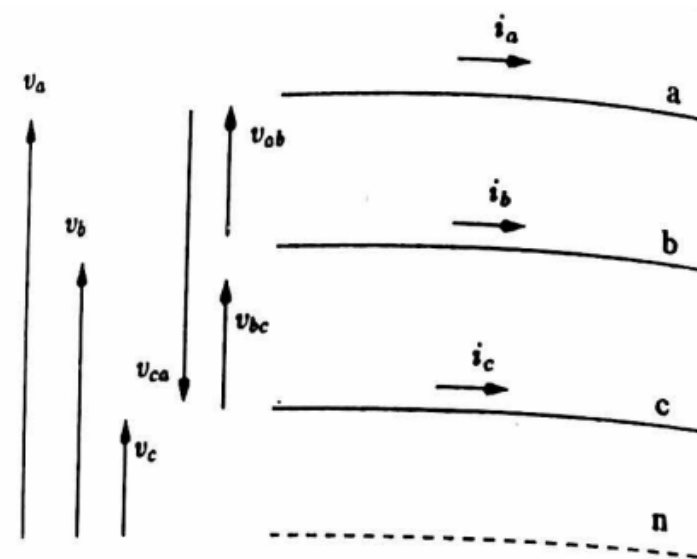
- Άρα η φαινόμενη ισχύς μπορεί να εκφραστεί ως

$$S = 3E_\Delta I_\Delta = \sqrt{3}V_\pi I_L \quad (2.59)$$



# Ισχύς τριφασικής πηγής

- Έστω τώρα ότι γνωρίζουμε ότι υπάρχει μια πηγή στα αριστερά του κυκλώματος του σχήματος
- Αλλά δε γνωρίζουμε αν είναι με συνδεσμολογία αστέρα ή τριγώνου
- Και το μόνο που μπορούμε να κάνουμε είναι να μετρήσουμε τις τάσεις και τα ρεύματα
- Αν θέλουμε να γνωρίζουμε πόση φαινόμενη ισχύ παράγεται από τη γεννήτρια, είναι ανάγκη να γνωρίζουμε αν η πηγή είναι συνδεδεμένη κατ'αστέρα ή κατά τρίγωνο;
- Απάντηση: Όχι
  - Από τα δεξιά μέλη των (2.52) και (2.59), βλέπουμε ότι η τριφασική ισχύς μπορεί να προσδιορίζεται από την πολική τάση και το ρεύμα της γραμμής (και είναι ίση με  $\sqrt{3}V_{\pi}I_L$ , ανεξαρτήτως συνδεσμολογίας)



# Συνδεσμολογία αστέρα και τριγώνου

Πηγή συνδεδεμένη κατ'αστέρα

Πηγή συνδεδεμένη κατά τρίγωνο

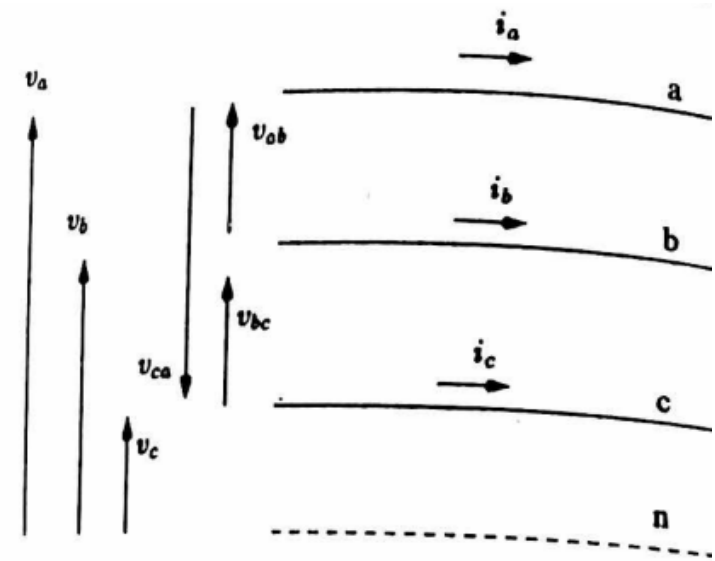
**Φορτίο συνδεδεμένο κατ'αστέρα και κατά τρίγωνο**

Μετατροπή τριγώνου σε αστέρα



# Συνδεσμολογία φορτίου

- Έστω τώρα ότι στο δεξί μέρος του κυκλώματος έχουμε ένα ηλεκτρικό φορτίο που αποτελείται από τρεις σύνθετες αντιστάσεις  $Z$ , ίσες μεταξύ τους
- Όπως και στην περίπτωση της πηγής, οι αντιστάσεις μπορούν να συνδεθούν σχηματίζοντας είτε αστέρα είτε τρίγωνο



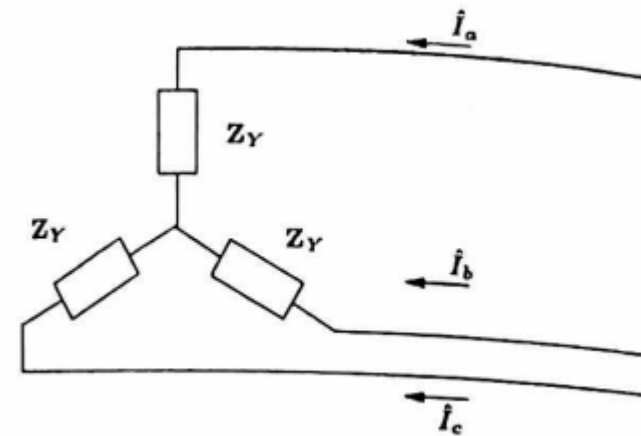
# Συνδεσμολογία φορτίου κατ'αστέρα: ρεύμα

- Στη συνδεσμολογία αστέρα, το ρεύμα σε κάθε αντίσταση είναι ίσο με το ρεύμα της γραμμής
- Η τάση στα άκρα κάθε αντίστασης είναι ίση με τη φασική τάση
- Βάσει του ορισμού της σύνθετης αντίστασης:

$$\hat{I}_a = \frac{\hat{V}_a}{Z_Y} \quad (2.61)$$

- Το οποίο λόγω συμμετρίας είναι αρκετό για να περιγράψουμε πλήρως τις τρεις φάσεις. Συμβολίζοντας με  $I_L$  την ενεργό τιμή του ρεύματος γραμμής και με  $V_\varphi$  την ενεργό τιμή της φασικής τάσης, έχουμε:

$$I_L = \frac{V_\varphi}{Z_Y} \quad (2.60)$$



# Συνδεσμολογία φορτίου κατ'αστέρα: ισχύς

- Η μιγαδική ισχύς που καταναλώνει ένα συμμετρικό τριφασικό φορτίο συνδεδεμένο κατ'αστέρα υπολογίζεται συναρτήσει της σύνθετης αντίστασης, όπως στην (2.31):

$$\mathbf{S} = 3\hat{V}_\varphi \hat{I}_L^* = \frac{3V_\varphi^2}{\mathbf{Z}_Y^*} = \frac{V_\pi^2}{\mathbf{Z}_Y^*} \quad (2.62)$$

όπου θυμόμαστε από τη (2.41) ότι η φασική και η πολική τάση έχουν την ακόλουθη σχέση:  $\hat{V}_\pi = \sqrt{3}\hat{V}_\varphi \angle + 30^\circ$

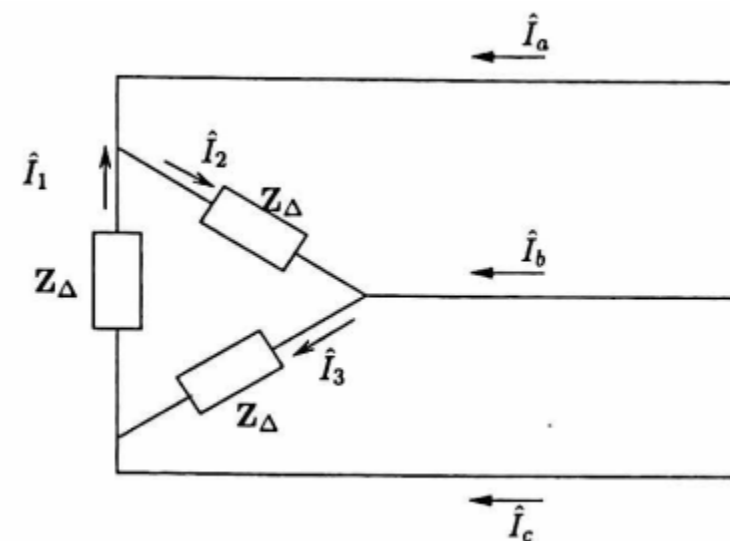
# Συνδεσμολογία φορτίου κατά τρίγωνο: ρεύμα

- Στη συνδεσμολογία τριγώνου, η τάση που εφαρμόζεται σε κάθε αντίσταση είναι η *πολική τάση*
- Άρα, από άποψης ενεργών τιμών, το ρεύμα που διαρρέει κάθε αντίσταση είναι:

$$I_{\Delta} = \frac{V_{\pi}}{Z_{\Delta}} \quad (2.63)$$

- Θυμόμαστε από τον τύπο (2.57) ότι  $I_L = \sqrt{3}I_{\Delta}$
- Αν και ο τύπος (2.57) είχε εξαχθεί για την περίπτωση πηγής σε συνδεσμολογία τριγώνου, συνεχίζει να ισχύει για την περίπτωση φορτίου σε συνδεσμολογία τριγώνου δεδομένης της συμμετρίας των ρευμάτων των φάσεων
- Άρα από την (2.63) και την (2.41) (πάλι, η (2.41) λέει ότι  $\hat{V}_{\pi} = \sqrt{3}\hat{V}_{\phi} \angle + 30^{\circ}$ ):

$$I_L = \sqrt{3}I_{\Delta} = \frac{3V_{\phi}}{Z_{\Delta}} \quad (2.64)$$



# Συνδεσμολογία αστέρα και τριγώνου

Πηγή συνδεδεμένη κατ'αστέρα

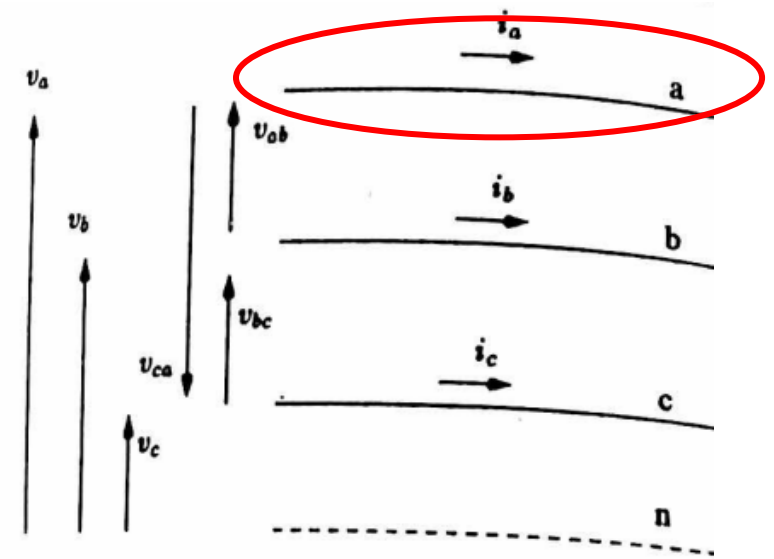
Πηγή συνδεδεμένη κατά τρίγωνο

Πηγή συνδεδεμένη κατ'αστέρα και κατά τρίγωνο

**Μετατροπή τριγώνου σε αστέρα**

# Ποια η χρησιμότητα της μετατροπής τριγώνου σε αστέρα;

- Θα δούμε αργότερα στο μάθημα πως ο ευκολότερος τρόπος ανάλυσης ενός συμμετρικού τριφασικού συστήματος είναι ανά φάση
- Συνεπώς, η ανάλυση συνδεσμολογίας τριγώνου είναι προτιμότερο να μετατρέπεται σε αστέρα πριν προχωρήσουμε στην ανάλυση ανά φάση



# Μετατροπή τριγώνου σε αστέρα για πηγές τάσης

- Μια πηγή σε συνδεσμολογία τριγώνου μπορεί να μετατραπεί σε μια ισοδύναμη πηγή συνδεσμολογίας αστέρα χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.54)
- Η (2.54) λέει ότι  $V_{\phi} = \frac{E_{\Delta}}{\sqrt{3}}$
- Στην περίπτωση μας, έχουμε ότι η φασική τάση είναι η τάση της συνδεσμολογίας τριγώνου  $E_Y$ :

$$E_Y = \frac{E_{\Delta}}{\sqrt{3}} \quad (2.65)$$

# Μετατροπή τριγώνου σε αστέρα για αντιστάσεις

- Έστω  $\mathbf{Z}_{12}$ ,  $\mathbf{Z}_{23}$ ,  $\mathbf{Z}_{31}$  οι σύνθετες αντιστάσεις συνδεσμολογίας κατά τρίγωνο
- Και ας συμβολίσουμε με  $\mathbf{Z}_1$ ,  $\mathbf{Z}_2$ ,  $\mathbf{Z}_3$  τις ισοδύναμες σύνθετες αντιστάσεις συνδεσμολογίας κατ'αστέρα
- Γνωρίζουμε από τη θεωρία κυκλωμάτων πως:

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_1 &= \frac{\mathbf{Z}_{12}\mathbf{Z}_{31}}{\mathbf{Z}_{12} + \mathbf{Z}_{23} + \mathbf{Z}_{31}} \\ \mathbf{Z}_2 &= \frac{\mathbf{Z}_{23}\mathbf{Z}_{12}}{\mathbf{Z}_{12} + \mathbf{Z}_{23} + \mathbf{Z}_{31}} \\ \mathbf{Z}_3 &= \frac{\mathbf{Z}_{31}\mathbf{Z}_{23}}{\mathbf{Z}_{12} + \mathbf{Z}_{23} + \mathbf{Z}_{31}}\end{aligned}\tag{2.66}$$



# Μετατροπή τριγώνου σε αστέρα για αντιστάσεις

- Στην περίπτωση συμμετρικού συστήματος, έχουμε τρεις ίσες αντιστάσεις στη συνδεσμολογία τριγώνου:

$$\mathbf{Z}_{12} = \mathbf{Z}_{23} = \mathbf{Z}_{31} = \mathbf{Z}_{\Delta}$$

- Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.66), έχουμε ότι είναι ισοδύναμες με τρεις ίσες αντιστάσεις συνδεδεμένες κατ'αστέρα, όπου:

$$\mathbf{Z}_Y = \frac{\mathbf{Z}_{\Delta}}{3} \quad (2.67)$$

- Η ισοδυναμία σημαίνει πως, αν εφαρμοστεί η ίδια τάση σε κάθε φάση της γραμμής, το ρεύμα γραμμής θα είναι το ίδιο και στις δύο συνδεσμολογίες

- Η ισχύς που καταναλώνεται και στις δύο συνδεσμολογίες είναι:

$$\mathbf{S} = \frac{V_{\pi}^2}{\mathbf{Z}_Y^*} = 3 \frac{V_{\pi}^2}{\mathbf{Z}_{\Delta}^*} \quad (2.68)$$

- Η πρώτη ισότητα είναι η (2.62)

- Και η δεύτερη ισότητα προκύπτει από την (2.67)

- Τι γίνεται με την κατανάλωση μιγαδικής ισχύος αν τροφοδοτήσουμε με την ίδια πηγή τάσης αστέρα αντί για τρίγωνο; Πηγή: παράδειγμα 2.2 και 2.3, [3]

# Παραδείγματα

Ανάλυση ανά φάση

Διόρθωση συντελεστή ισχύος

# Ανάλυση ανά φάση

Μια συμμετρική τριφασική πηγή σταθερής πολικής τάσης 2400 V τροφοδοτεί μέσω τριφασικής γραμμής με σύνθετη αντίσταση  $\mathbf{Z}_a = 0.5 + j3 \Omega$  ανά φάση φορτίο αποτελούμενο από τρεις ίσες σύνθετες αντστάσεις  $\mathbf{Z}_\Delta = 24 + j12 \Omega$  συνδεδεμένες κατά τρίγωνο. Να υπολογιστούν:

- α) Η πολική τάση στο φορτίο
- β) Η ενεργός και άεργος ισχύς που καταναλώνει το φορτίο.
- γ) Η ισχύς που παράγει η πηγή και ο συντελεστής ισχύος.
- δ) Οι απώλειες στη γραμμή μεταφοράς ως ποσοστό της ενεργού ισχύος του φορτίου.

# Προεργασία: μετατροπή φορτίου από αστέρα σε τρίγωνο

- Για να εργαστούμε ανά φάση, μετατρέπουμε πρώτα το τρίγωνο των αντιστάσεων του φορτίου σε ισοδύναμο αστέρα
- Βάσει της (2.67), έχουμε

$$\mathbf{Z}_Y = \frac{\mathbf{Z}_\Delta}{3} = 8 + j4 \Omega$$

## α) Πολική τάση στο φορτίο

- Εστιάζουμε στη φάση a
- Η φασική τάση στην πηγή είναι

$$V_a = \frac{2400}{\sqrt{3}} = 1385.6 \text{ V}$$

- Ας την ορίσουμε ως διάνυσμα αναφοράς, οπότε:

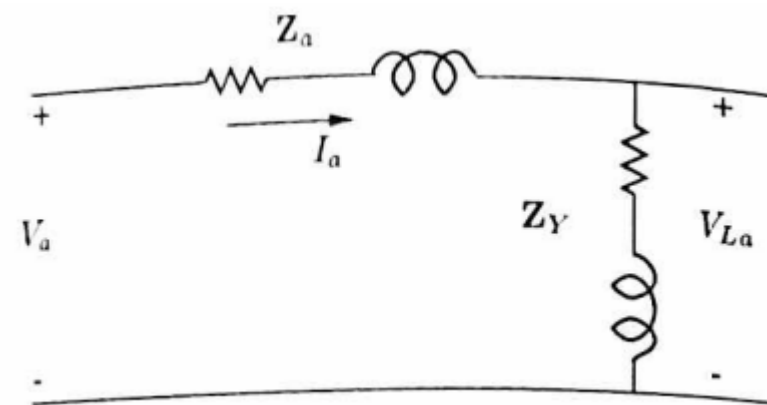
$$\hat{V}_a = V_a \angle 0^\circ$$

- Το ρεύμα της γραμμής δίνεται από τον ορισμό της σύνθετης αντίστασης:

$$\hat{I}_a = \frac{\hat{V}_a}{\mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_Y} = 125.8 \text{ A} \angle -39.5^\circ$$

- Η φασική τάση στο φορτίο είναι συνεπώς:

$$\hat{V}_{L_a} = \mathbf{Z}_Y \hat{I}_a = 1125.5 \text{ V} \angle -12.9^\circ$$



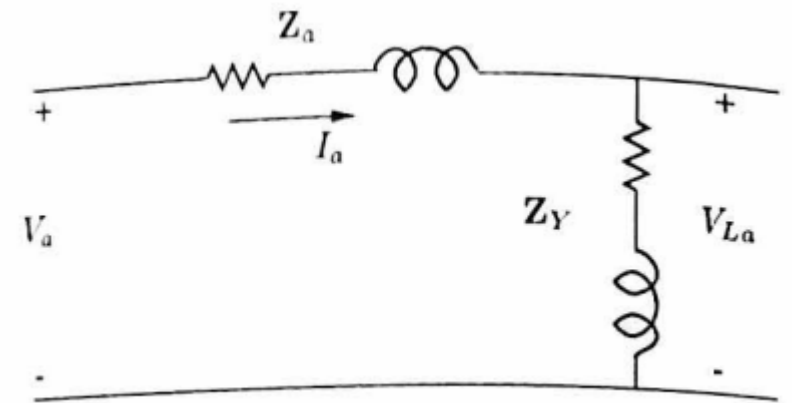
## α) Πολική τάση στο φορτίο

- Μπορούσαμε να φτάσουμε στο ίδιο αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας τη λογική του καταμεριστή τάσης:

$$\begin{aligned}\hat{V}_{L_a} &= \frac{\mathbf{Z}_Y}{\mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_Y} \hat{V}_a = \\ &= \frac{8 + j4}{8.5 + j7} 1385.6 \text{ V} = 1125.5 \text{ V} \angle -12.9^\circ\end{aligned}$$

- Η πολική τάση του φορτίου είναι συνεπώς ίση με:

$$V_L = 1949.3 \text{ V}$$



## β) Ενεργός και άεργος ισχύς που καταναλώνει το φορτίο

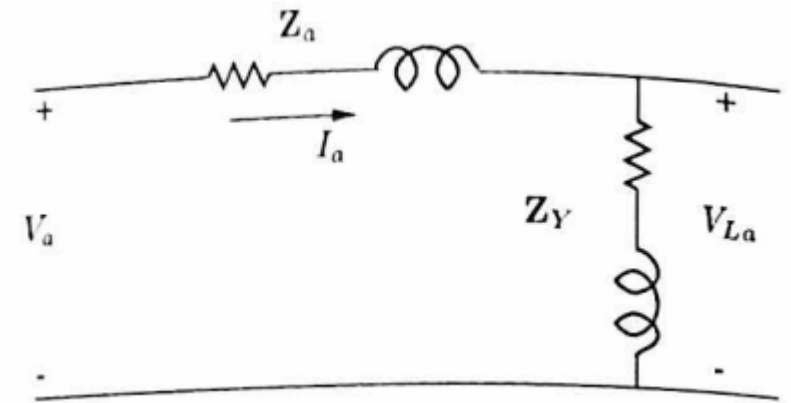
- Αφού γνωρίζουμε το ρεύμα της γραμμής, μπορούμε να υπολογίσουμε τη μιγαδική ισχύ που καταναλώνει το φορτίο:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_L &= 3\hat{V}_{L_a}\hat{I}_a^* = \\ &= 424.8 \text{ kVA} \angle 26.6^\circ = 379.8 \text{ kW} + j190.2 \text{ kVAr} \end{aligned}$$

- Εναλλακτικά, από την εξίσωση (2.62):

$$\mathbf{S}_L = \frac{V_L^2}{\mathbf{Z}_Y^*} = \frac{1949.3^2}{8 - j4} = 424.8 \text{ kVA} \angle 26.6^\circ$$

- Άρα η ενεργός ισχύς που καταναλώνει το φορτίο είναι 379.8 kW και η άεργος ισχύς είναι 190.2 kVAr

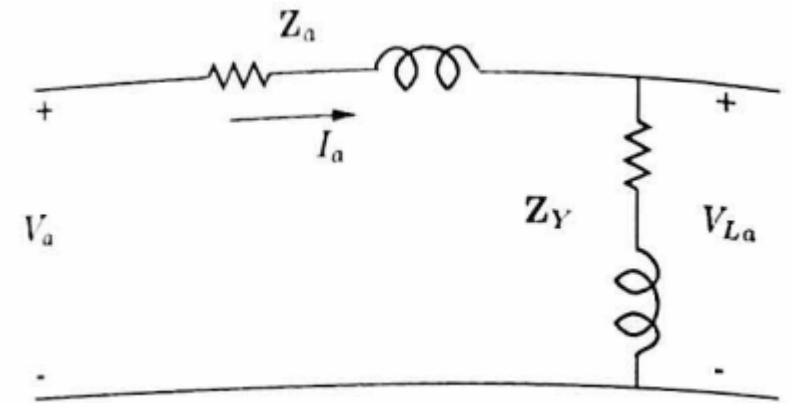


## γ) Ισχύς που παράγει η πηγή και συντελεστής ισχύος

- Η μιγαδική ισχύς που αποδίδει η πηγή είναι:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= 3\hat{V}_a\hat{I}_a^* = 522.9 \text{ kVA} \angle 39.5^\circ \\ &= 403.5 \text{ kW} + j332.6 \text{ kVAr} \end{aligned}$$

- Ο συντελεστής ισχύος της πηγής είναι  $\Sigma I = \cos(39.5^\circ) = 0.77$  επαγωγικός





## δ) Απώλειες στη γραμμή ως ποσοστό της ενεργού ισχύος του φορτίου

- Οι απώλειες ενεργού ισχύος στη γραμμή είναι:

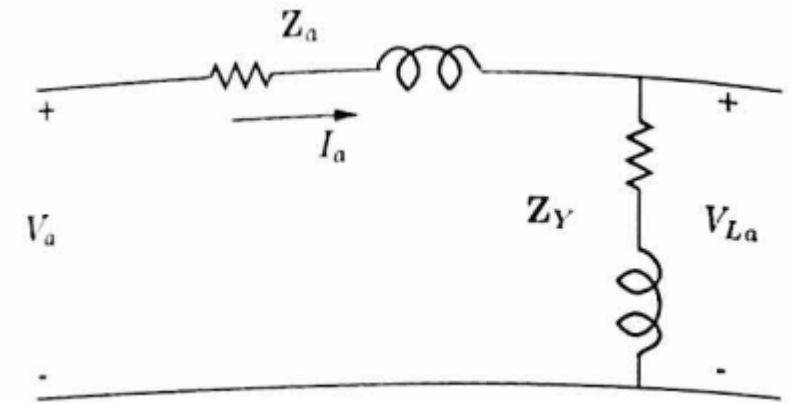
$$P_{\alpha\pi} = 403.5 - 379.8 = 23.7 \text{ kW}$$

- Οι απώλειες μπορούν να προκύψουν και ως:

$$P_{\alpha\pi} = 3R_a I_a^2 = 3 \cdot 0.5 \cdot 125.8^2 = 23738 \text{ W}$$

- Ως ποσοστό της ενεργού ισχύος που καταναλώνει το φορτίο, οι απώλειες στη γραμμή είναι:

$$\frac{23738}{379.8 \cdot 10^3} = 6.25\%$$



# Παραδείγματα

Ανάλυση ανά φάση

Διόρθωση συντελεστή ισχύος

# Διόρθωση συντελεστή ισχύος

Στο προηγούμενο παράδειγμα προσθέτουμε παράλληλα με το φορτίο μια συστοιχία τριών ίδιων πυκνωτών συνδεδεμένων κατ'αστέρα με σκοπό να βελτιώσουμε το συντελεστή ισχύος του φορτίου και να τον κάνουμε ίσο με τη μονάδα. Να υπολογιστούν:

- α) Η χωρητική αγωγιμότητα  $B_c$  του κάθε πυκνωτή
- β) Η τάση του φορτίου και η ισχύς που αυτό καταναλώνει
- γ) Η άεργος ισχύς που παράγει η συστοιχία των πυκνωτών
- δ) Οι απώλειες της γραμμής ως ποσοστό της ενεργού ισχύος του φορτίου

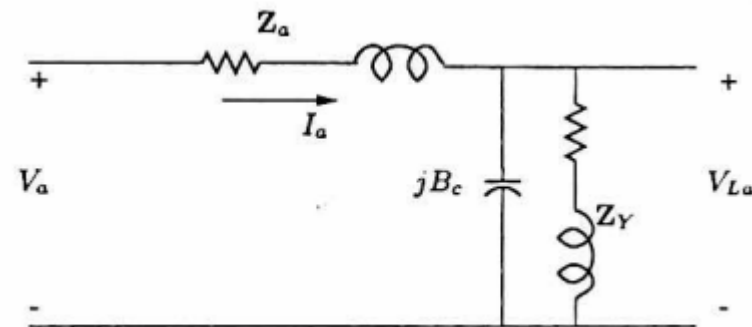
## α) Χωρητική αγωγιμότητα του κάθε πυκνωτή

- Το νέο κύκλωμα της φάσης  $a$  έχει τη μορφή του γραφήματος στα δεξιά
- Η συνολική σύνθετη αγωγιμότητα που βλέπει η φάση της γραμμής  $a$  στο πέρας της είναι:

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}_Y} + jB_c = \frac{R_Y - jX_Y}{R_Y^2 + X_Y^2} + jB_c$$

- Για να πετύχουμε μοναδιαίο συντελεστή ισχύος, το φανταστικό μέρος της αγωγιμότητας του φορτίου πρέπει να είναι μηδέν:

$$B_c = \frac{X_Y}{R_Y^2 + X_Y^2} = \frac{4}{80} = 0.05 \Omega^{-1}$$



## β) Τάση φορτίου

- Μετά τη διόρθωση του ΣΙ, η σύνθετη αγωγιμότητα που βλέπει η γραμμή ανά φάση είναι:

$$\mathbf{Y} = \frac{R_Y}{R_Y^2 + X_Y^2} = \frac{8}{80} = 0.1 \Omega^{-1}$$

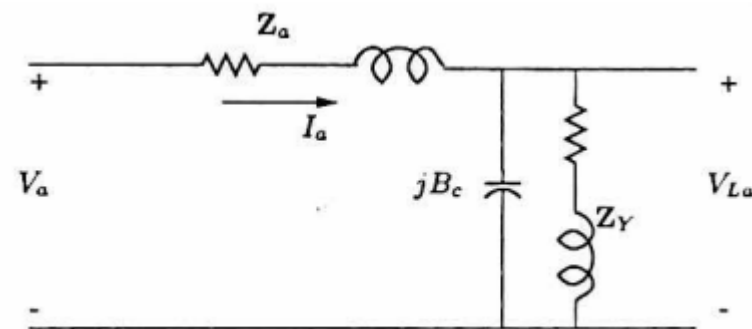
- Η συνολική σύνθετη αντίσταση που βλέπει η φάση  $a$  της πηγής είναι:

$$\mathbf{Z}_o = 10 + (0.5 + j3) = 10.5 + j3 \Omega$$

- Άρα η φασική τάση στο φορτίο είναι:

$$\hat{V}_{La} = \frac{10}{10.5 + j3} 1385.6 = 1268.8 \text{ V} \angle -15.95^\circ$$

- Αυτό αντιστοιχεί σε πολική τάση  $V_L = 2197.7 \text{ V}$

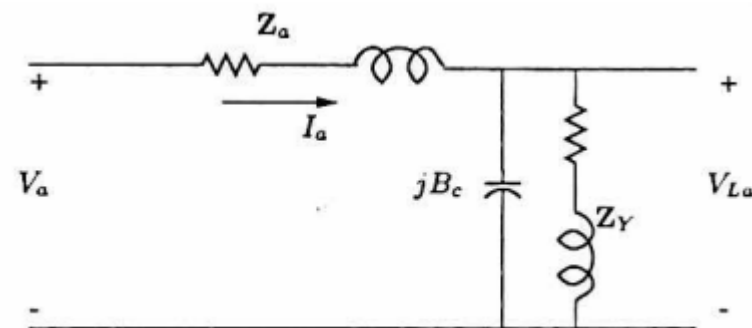


## β) Ισχύς που καταναλώνει το φορτίο

- Η ισχύς που καταναλώνει το φορτίο δίνεται από τον τύπο (2.62):

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_L &= \frac{2197.7^2}{8 - j4} = 540 \text{ kVA} \angle 26.6^\circ \\ &= 483 \text{ kW} + j241.5 \text{ kVAr} \end{aligned}$$

- Η διόρθωση του συνημιτόνου μέσω των πυκνωτών αυξάνει τόσο την τάση του φορτίου, όσο και την ισχύ που αυτό απορροφά, αφού αυτή εξαρτάται από το τετράγωνο της τάσης
- Μπορείτε να εξηγήσετε γραφικά την αύξηση του μέτρου τάσης;



## γ) Άεργος ισχύς που παράγει η συστοιχία ΠΥΚΝΩΤΩΝ

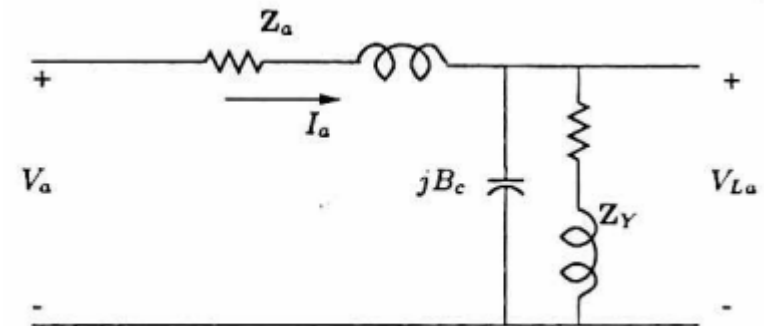
- Σύμφωνα με τον τύπο (2.62), η τριφασική μιγαδική ισχύς που καταναλώνουν οι πυκνωτές είναι

$$\mathbf{S}_C = V_L^2 \mathbf{Y}^* = (-jB_c)V_L^2$$

- Άρα η άεργος ισχύς που παράγεται από τους πυκνωτές είναι:

$$Q_C = B_c V_L^2 = 241.5 \text{ kVAr}$$

- Η άεργος ισχύς που παράγουν οι πυκνωτές είναι ίση με την άεργο ισχύ που καταναλώνει το φορτίο, προκειμένου ο ΣΙ να είναι ίσος με 1



## δ) Απώλειες της γραμμής ως ποσοστό της ενεργού ισχύος του φορτίου

- Το ρεύμα της γραμμής υπολογίζεται ως:

$$\hat{I}_a = \left( \frac{\mathbf{S}_L + \mathbf{S}_C}{3\hat{V}_{La}} \right)^* = \frac{483 \cdot 10^3}{3 \cdot 1268.8 \angle 15.95^\circ} = 126.9 \text{ A} \angle -15.95^\circ$$

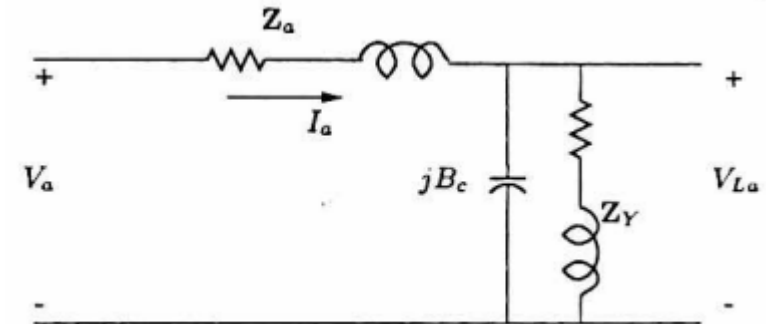
- Συνεπώς οι απώλειες ενεργού ισχύος στη γραμμή είναι:

$$P_{\alpha\pi} = 3 \cdot 0.5 \cdot 126.9^2 = 24155 \text{ W}$$

- Σε ποσοστό επί της ενεργού ισχύος του φορτίου:

$$\frac{24155}{483 \cdot 10^3} = 5.0\%$$

- Το ποσοστό των απωλειών μειώνεται με τη βελτίωση του  $\Sigma I$
- Υπάρχει τρόπος να πετύχουμε ακόμα μεγαλύτερη βελτίωση στην ενεργό ισχύ που καταναλώνει το φορτίο;





# Βιβλιογραφία

[1] Κ. Βουρνάς, Εισαγωγή στα Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας, Συμμετρία, 2010

[2] Glover, J. Duncan, Mulukutla S. Sarma, and Thomas Overbye. Power system analysis & design, SI version. Cengage Learning, 2012

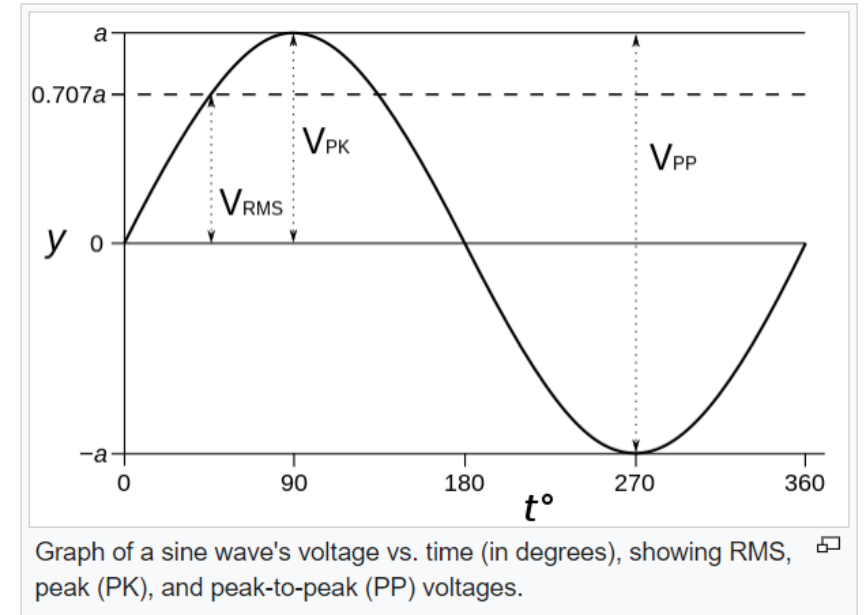
[3] El-Hawary, Mohamed E. Introduction to electrical power systems. John Wiley & Sons, 2008

# Επιπλέον ασκήσεις

# Μέγεθος RMS

- Αποδείξτε την εξίσωση (2.4):

$$F = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt} = \frac{F_{max}}{\sqrt{2}}$$



# Μέγεθος RMS: λύση

- Από τη διαφάνεια 3 έχουμε ότι  $\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$ , άρα  
$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$$

άρα

$$\cos^2 a = \left(\frac{1}{2}\right) (1 + \cos(2a))$$

- Και υπενθυμίζουμε από την εξίσωση (2.4) ότι  
$$f(t) = F_{max} \cos(\omega t + \phi)$$

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T F_{max}^2 \cos^2(\omega t + \phi) dt} = F_{max} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t + \phi) dt} \\ &= F_{max} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{1}{2}\right) (1 + \cos(2\omega t + 2\phi)) dt} = F_{max} \sqrt{\frac{1}{T} \left(\frac{1}{2}\right) T} = \frac{F_{max}}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

# Μετατροπή πηγής τάσης με εσωτερική αντίσταση από τρίγωνο σε αστέρα

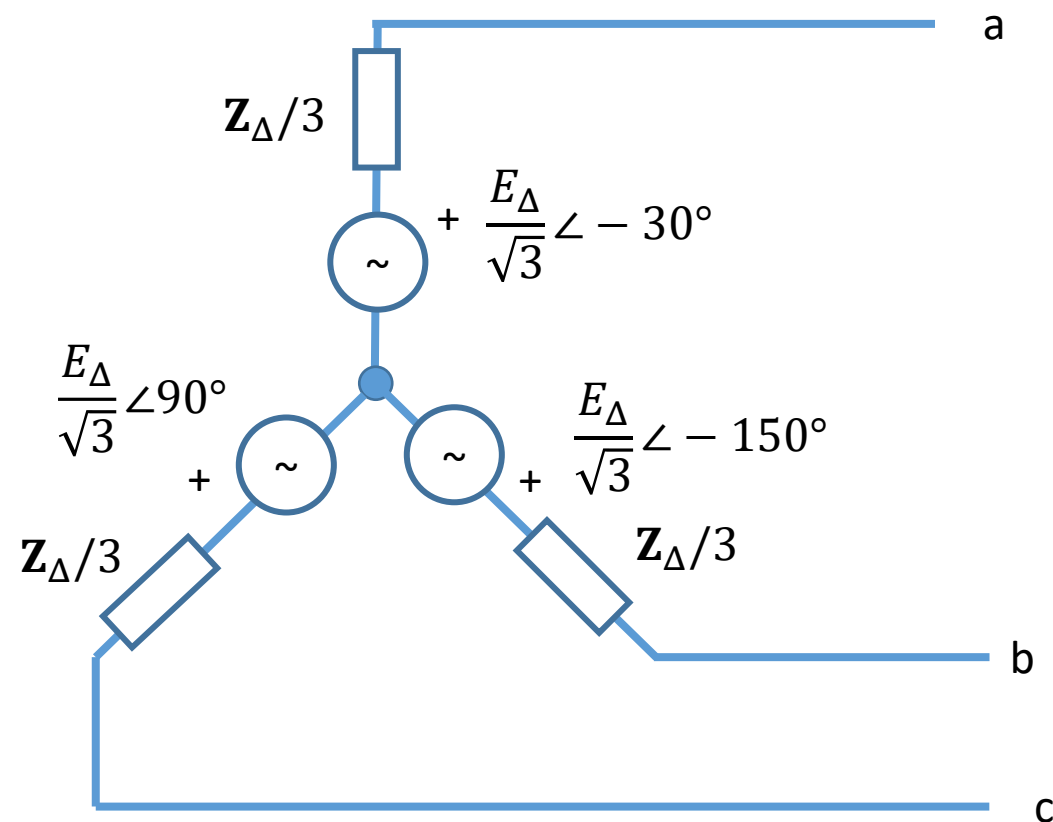
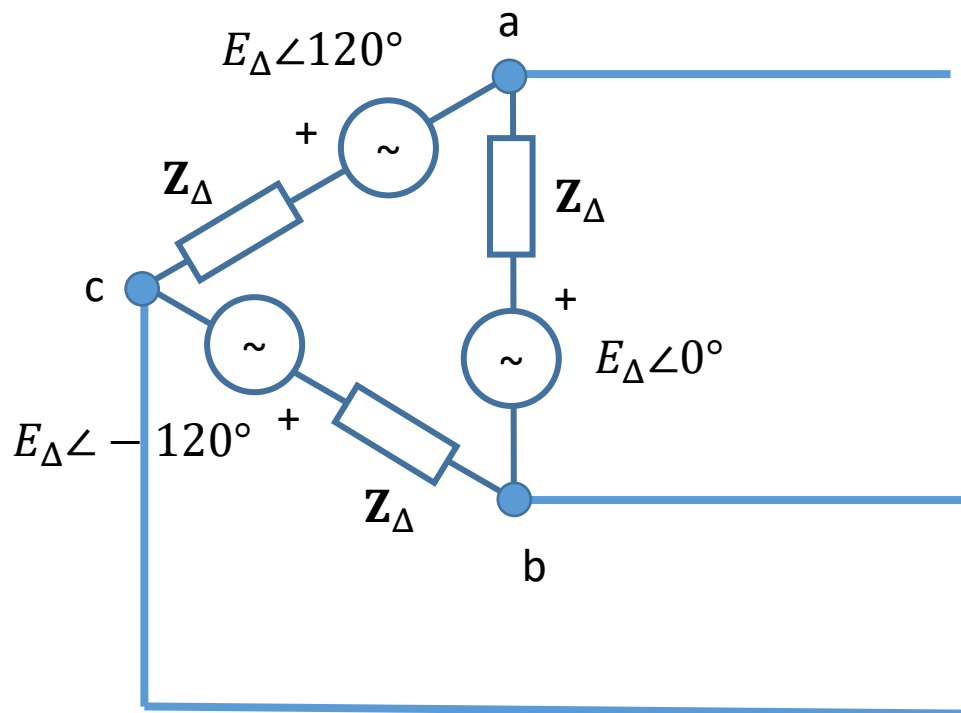
- Να αποδείξετε ότι μια συμμετρική τριφασική πηγή συνδεδεμένη κατά τρίγωνο με ΗΕΔ ανά φάση τριγώνου  $E_{\Delta}$  και σύνθετη εσωτερική αντίσταση  $Z_{\Delta}$  ανά φάση μετασχηματίζεται σε ισοδύναμη πηγή συνδεσμολογίας αστέρα με ΗΕΔ  $E_Y$  και σύνθετη εσωτερική αντίσταση  $Z_Y$  ανά φάση, ως εξής:

$$E_Y = E_{\Delta}/\sqrt{3}$$
$$Z_Y = Z_{\Delta}/3$$

- **Υπόδειξη:** αρκεί να αποδειχθεί ότι τα ρεύματα βραχυκυκλώσεως και οι τάσεις ανοιχτοκυκλώσεως στις τρεις φάσεις της γραμμής είναι ίσα και για τις δύο συνδεσμολογίες

# Λύση: τάσεις ανοιχτοκυκλώσεως

Ισχυριζόμαστε ότι ισχύει η εξής ισοδυναμία



# Λύση: τάσεις ανοιχτοκυκλώσεως

- Τάσεις ανοιχτοκύκλωσης σημαίνει πως οι σύνθετες αντιστάσεις δεν επηρεάζουν τους παρακάτω υπολογισμούς, γιατί το ρεύμα ανοιχτοκύκλωσης είναι μηδενικό (άρα, κατ'ουσίαν έχουμε ήδη αποδείξει τις παρακάτω σχέσεις στην εξίσωση (2.41))
- Από την (2.40), έχουμε για τις τάσεις ανοιχτοκύκλωσης της συνδεσμολογίας αστέρα:

$$\hat{V}_a = \frac{\hat{V}_{ab} - \hat{V}_{ca}}{3} = \frac{E_{\Delta} \angle 0^{\circ} - E_{\Delta} \angle 120^{\circ}}{3} = \frac{E_{\Delta}}{3} \left( 1 - \left( -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = \frac{E_{\Delta}}{3} \left( \frac{3}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{E_{\Delta}}{\sqrt{3}} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - j \frac{1}{2} \right) = \frac{E_{\Delta}}{\sqrt{3}} \angle -30^{\circ}$$

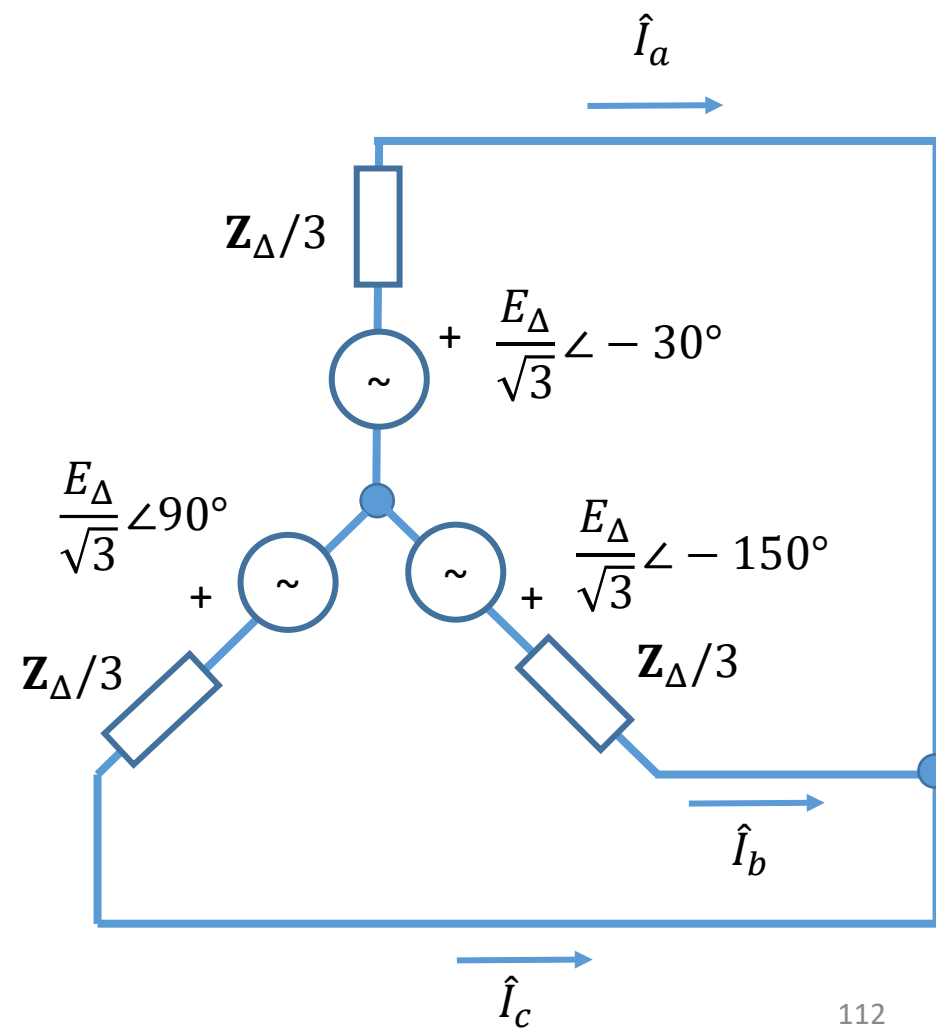
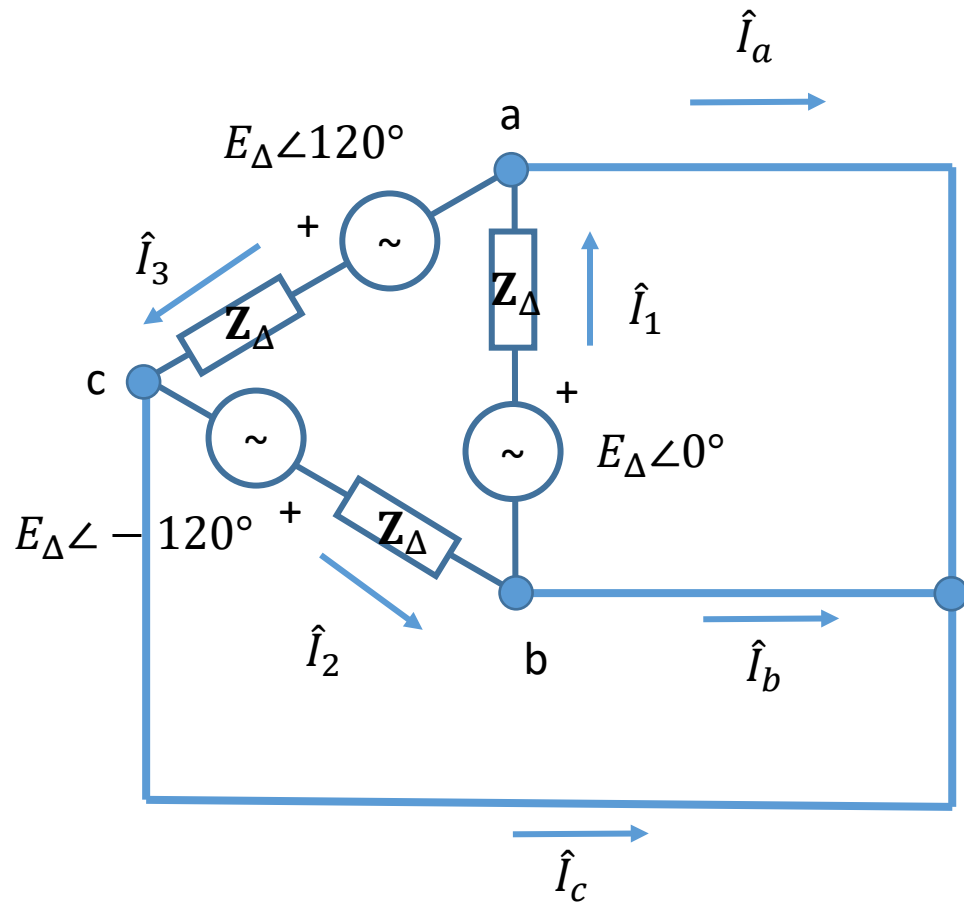
$$\hat{V}_b = \frac{\hat{V}_{bc} - \hat{V}_{ab}}{3} = \frac{E_{\Delta} \angle -120^{\circ} - E_{\Delta}}{3} = \frac{E_{\Delta}}{3} \left( -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right) = \frac{E_{\Delta}}{3} \left( -\frac{3}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{E_{\Delta}}{\sqrt{3}} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} - j \frac{1}{2} \right) = \frac{E_{\Delta}}{\sqrt{3}} \angle -150^{\circ}$$

$$\hat{V}_c = \frac{\hat{V}_{ca} - \hat{V}_{bc}}{3} = \frac{E_{\Delta} \angle 120^{\circ} - E_{\Delta} \angle -120^{\circ}}{3} = \frac{E_{\Delta}}{3} \left( -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} - \left( -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = \frac{E_{\Delta}}{3} (j\sqrt{3}) = j \frac{E_{\Delta}}{\sqrt{3}} = \frac{E_{\Delta}}{\sqrt{3}} \angle +90^{\circ}$$

- Που προφανώς συμπίπτουν με τις τάσεις ανοιχτοκύκλωσης της συνδεσμολογίας τριγώνου

# Λύση: ρεύματα βραχυκυκλώσεως

Ισχυριζόμαστε ότι ισχύει η εξής ισοδυναμία





# Λύση: ρεύματα βραχυκυκλώσεως

- Ρεύματα βραχυκύκλωσης σημαίνει πως στη συνδεσμολογία τριγώνου έχουμε

$$\hat{V}_{ab} = \hat{V}_{bc} = \hat{V}_{ca} = 0$$

άρα

$$\hat{I}_1 = \frac{\hat{E}_1}{\mathbf{Z}_\Delta}, \hat{I}_2 = \frac{\hat{E}_2}{\mathbf{Z}_\Delta}, \hat{I}_3 = \frac{\hat{E}_3}{\mathbf{Z}_\Delta}$$

στη συνδεσμολογία τριγώνου

- Και από τη συνδεσμολογία αστέρα, ξέρουμε ότι η τάση στο σημείο βραχυκύκλωσης είναι μηδέν λόγω συμμετρίας, άρα

$$\hat{I}_a = \frac{\frac{E_\Delta}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ}{\mathbf{Z}_\Delta/3} = \sqrt{3} \frac{E_\Delta}{\mathbf{Z}_\Delta} \angle -30^\circ$$

$$\hat{I}_b = \frac{\frac{E_\Delta}{\sqrt{3}} \angle -150^\circ}{\mathbf{Z}_\Delta/3} = \sqrt{3} \frac{E_\Delta}{\mathbf{Z}_\Delta} \angle -150^\circ$$

$$\hat{I}_c = \frac{\frac{E_\Delta}{\sqrt{3}} \angle 90^\circ}{\mathbf{Z}_\Delta/3} = \sqrt{3} \frac{E_\Delta}{\mathbf{Z}_\Delta} \angle 90^\circ$$

# Λύση: ρεύματα βραχυκυκλώσεως

- Επιστρέφοντας στη συνδεσμολογία τριγώνου, έχουμε:

$$\hat{I}_a = \hat{I}_1 - \hat{I}_3 = \frac{E_\Delta \angle 0^\circ - E_\Delta \angle 120^\circ}{\mathbf{Z}_\Delta} = \frac{E_\Delta}{\mathbf{Z}_\Delta} \left( 1 - \left( -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = \frac{E_\Delta}{\mathbf{Z}_\Delta} \left( \frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \sqrt{3} \frac{E_\Delta}{\mathbf{Z}_\Delta} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} \frac{E_\Delta}{\mathbf{Z}_\Delta} \angle -30^\circ$$

$$\hat{I}_b = \hat{I}_2 - \hat{I}_1 = \frac{E_\Delta \angle -120^\circ - E_\Delta \angle 0^\circ}{\mathbf{Z}_\Delta} = \frac{E_\Delta}{\mathbf{Z}_\Delta} \left( -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right) = \frac{E_\Delta}{\mathbf{Z}_\Delta} \left( -\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \sqrt{3} \frac{E_\Delta}{\mathbf{Z}_\Delta} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} \frac{E_\Delta}{\mathbf{Z}_\Delta} \angle -150^\circ$$

$$\hat{I}_c = \hat{I}_3 - \hat{I}_2 = \frac{E_\Delta \angle 120^\circ - E_\Delta \angle -120^\circ}{\mathbf{Z}_\Delta} = \frac{E_\Delta}{\mathbf{Z}_\Delta} \left( -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} - \left( -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = \frac{E_\Delta}{\mathbf{Z}_\Delta} (j\sqrt{3}) = \sqrt{3} \frac{E_\Delta}{\mathbf{Z}_\Delta} j = \sqrt{3} \frac{E_\Delta}{\mathbf{Z}_\Delta} \angle 90^\circ$$

- Άρα τα ρεύματα συμπίπτουν με αυτά της προηγούμενης διαφάνειας και αποδεικνύεται ο ισχυρισμός
- Παρατηρήστε ότι σε μεγάλο βαθμό επαναλαμβάνουμε τους υπολογισμούς της διαφάνειας 111

# Τριφασική ισχύς

- Αποδείξτε τον ισχυρισμό στη διαφάνεια 64 ότι «η εικόνα για κάθε φάση είναι ίδια όπως στην προηγούμενη διαφάνεια, αλλά μετατοπισμένη κατά  $240^\circ$ »

# Τριφασική ισχύς: φάση $b$

- Από τη (2.34) έχουμε ότι:

$$p_b(t) = 2VI \cos(\omega t - 120^\circ) \cos(\omega t - 120^\circ - \theta)$$

- Και από την τρίτη τριγωνομετρική ταυτότητα της διαφάνειας 3, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & \cos(\omega t - 120^\circ) \cos(\omega t - 120^\circ - \theta) \\ &= \frac{1}{2} (\cos(\theta) + \cos(2\omega t - 240^\circ - \theta)) \end{aligned}$$

- Άρα

$$p_b(t) = VI \cos(\theta) + VI \cos(2\omega t - 240^\circ - \theta)$$

# Τριφασική ισχύς: φάση $c$

- Από τη (2.34) έχουμε ότι:

$$p_c(t) = 2VI \cos(\omega t + 120^\circ) \cos(\omega t + 120^\circ - \theta)$$

- Και από την τρίτη τριγωνομετρική ταυτότητα της διαφάνειας 3, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & \cos(\omega t + 120^\circ) \cos(\omega t + 120^\circ - \theta) \\ &= \frac{1}{2} (\cos(\theta) + \cos(2\omega t + 240^\circ - \theta)) \end{aligned}$$

- Άρα

$$p_c(t) = VI \cos(\theta) + VI \cos(2\omega t + 240^\circ - \theta)$$

## Παράδειγμα 2.1 [2]

- Η τάση  $v(t) = 141.4 \cos(\omega t)$  εφαρμόζεται σε ένα φορτίο που αποτελείται από μια ωμική αντίσταση  $10 \Omega$  παράλληλη με μια αυτεπαγωγή με επαγωγική αντίδραση  $X_L = \omega L = 3.77 \Omega$
- Υπολογίστε τη στιγμιαία ισχύ που απορροφάται από την ωμική αντίσταση και την επαγωγική αντίδραση
- Υπολογίστε την ενεργό και άεργο ισχύ που απορροφά το φορτίο, καθώς και τον συντελεστή ισχύος

## Παράδειγμα 2.1 [2]: ρεύμα και τάση

- Το κύκλωμα και οι φασιθέτες παρουσιάζονται στο γράφημα
- Η τάση είναι

$$\hat{V} = \frac{141.4}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ = 100 \angle 0^\circ \text{ V}$$

- Το ρεύμα στην ωμική αντίσταση είναι

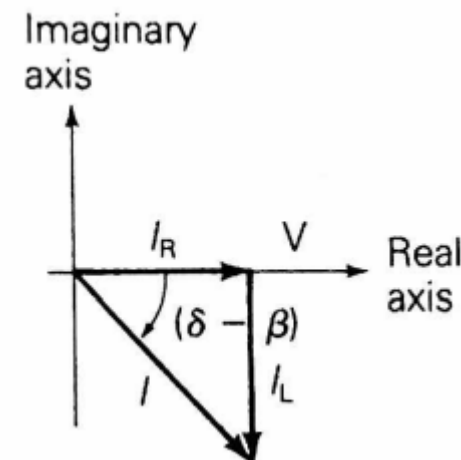
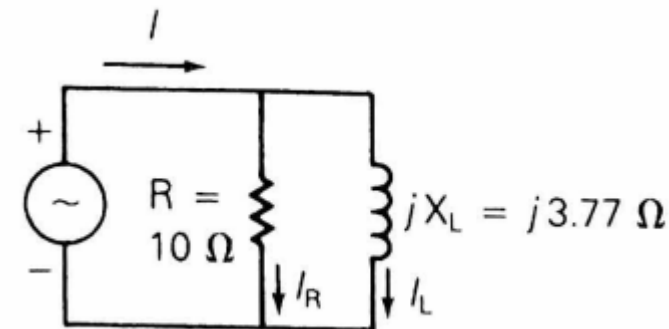
$$\hat{I}_R = \frac{\hat{V}}{R} = \frac{100}{10} \angle 0^\circ = 10 \text{ A}$$

- Το ρεύμα στην επαγωγική αντίδραση είναι

$$\hat{I}_L = \frac{\hat{V}}{jX_L} = \frac{100}{j3.77} \angle 0^\circ = 26.53 \angle -90^\circ \text{ A}$$

- Το συνολικό ρεύμα είναι

$$\hat{I} = \hat{I}_R + \hat{I}_L = 10 - j26.53 = 28.35 \angle -69.34^\circ \text{ A}$$



# Παράδειγμα 2.1 [2]: στιγμιαία ισχύς ωμικής αντίστασης

- Η στιγμιαία ισχύς που απορροφάται από την ωμική αντίσταση είναι

$$p_R(t) =$$

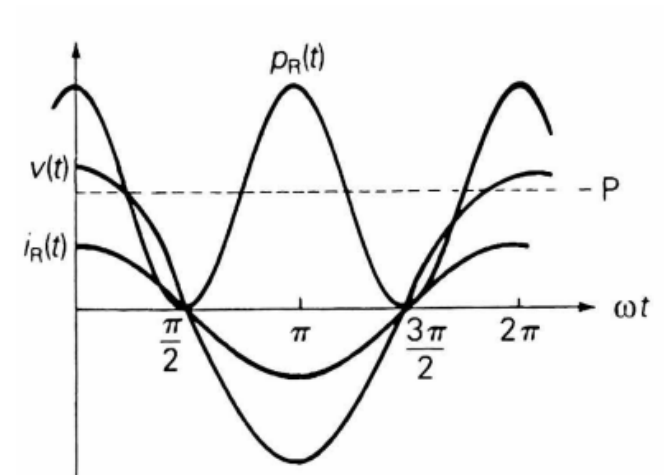
$$v(t)i_R(t) =$$

$$V_{max}I_{Rmax}\cos^2(\omega t) =$$

$$\frac{1}{2}V_{max}I_{Rmax}(1 + \cos(2\omega t)) =$$

$$VI_R(1 + \cos(2\omega t)) =$$

$$(100)(10)(1 + \cos(2\omega t)) = 1000(1 + \cos(2\omega t)) \text{ W}$$

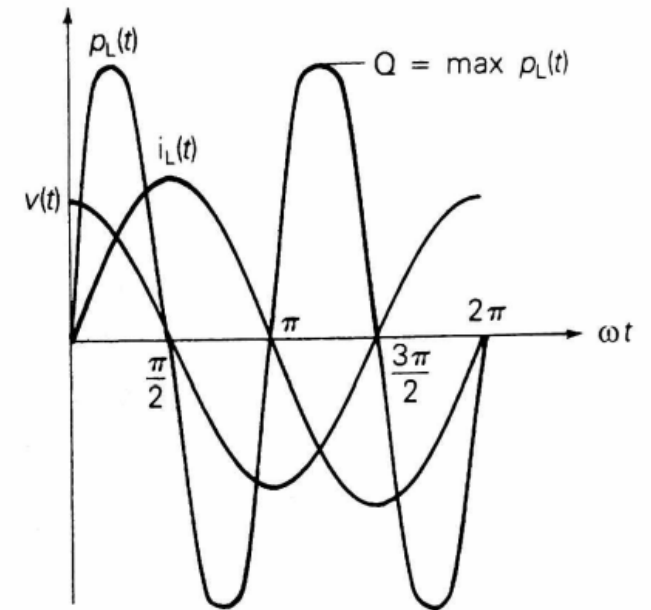




# Παράδειγμα 2.1 [2]: στιγμιαία ισχύς αυτεπαγωγής

- Η στιγμιαία ισχύς που απορροφάται από την επαγωγική αντίδραση είναι

$$\begin{aligned} p_L(t) &= \\ v(t)i_L(t) &= \\ V_{max}I_{Lmax}\cos(\omega t)\cos(\omega t - 90^\circ) &= \\ \frac{1}{2}V_{max}I_{Lmax}\cos(2\omega t - 90^\circ) &= \\ V I_L \sin(2\omega t) &= \\ (100)(26.53) \sin(2\omega t) \text{ W} &= \\ 2653 \sin(2\omega t) \text{ W} & \end{aligned}$$



# Παράδειγμα 2.1 [2]: ενεργός και άεργος ισχύς

- Η ενεργός ισχύς είναι το πλάτος ταλάντωσης της μη αρνητικής συνιστώσας της στιγμιαίας ισχύος που καταναλώνεται
- Η ενεργός ισχύς μπορεί να υπολογιστεί και από το συντελεστή ισχύος:

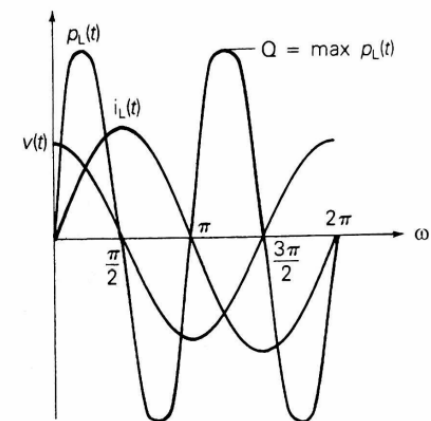
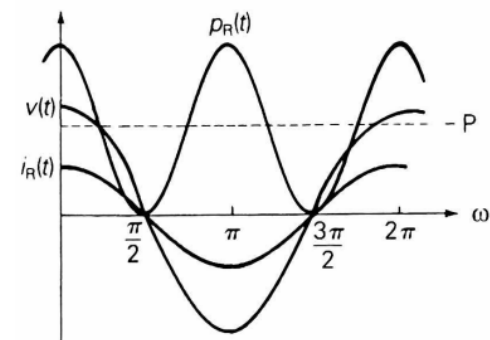
$$P = VI \cos(\delta - \beta) = (100)(28.35) \cos(69.34^\circ) = 1000 \text{ W}$$

- Και μπορεί επίσης να υπολογιστεί από την εξίσωση  $P = V^2/R$

- Η άεργος ισχύς είναι το πλάτος ταλάντωσης της συνιστώσας της στιγμιαίας ισχύος που έχει μέση τιμή μηδέν
- Η άεργος ισχύς μπορεί να υπολογιστεί και από το συντελεστή ισχύος:

$$Q = VI \sin(\delta - \beta) = (100)(28.35) \sin(69.34^\circ) = 2653 \text{ VAR}$$

- Και μπορεί επίσης να υπολογιστεί από την εξίσωση  $Q = V^2/X_L$



## Παράδειγμα 2.1 [2]: συντελεστής ισχύος

- Ο συντελεστής ισχύος είναι:

$$\text{SI} = \cos(\delta - \beta) = \cos(69.34^\circ) = 0.3528 \text{ χωρητικός}$$

## Παράδειγμα 2.2 [2]

- Μια μονοφασική πηγή τάσης με  $\hat{V} = 100 \text{ V} \angle 130^\circ$  δημιουργεί ένα ρεύμα  $\hat{I} = 10 \text{ A} \angle 10^\circ$ , το οποίο φεύγει από το θετικό άκρο της πηγής. Υπολογίστε την ενεργό και άεργο ισχύ της πηγής. Η πηγή απορροφά ή παράγει ενεργό / άεργο ισχύ;

## Παράδειγμα 2.2 [2]

- Η μιγαδική ισχύς δίνεται ως:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \hat{V} \hat{I}^* = 100 \angle 130^\circ \cdot 10 \angle -10^\circ = 100 \angle 120^\circ \\ &= -50 \text{ W} + j866 \text{ VAr} \end{aligned}$$

- Άρα η πηγή απορροφά  $P = 500 \text{ W}$ , και παράγει  $Q = 866 \text{ VAr}$
- Το προφίλ παραγωγής / κατανάλωσης ενεργού / αέργου ισχύος αντιστοιχεί σε σύγχρονη μηχανή