Εξισώσεις – Λύσεις για τη Μεταφορά Ρύπων

<u>Γενική περίπτωση</u>

☞ **Μεταφορά σε 3 διαστάσεις, Ροή σε 3 διαστάσεις**

$$D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - \bar{v}_x \frac{\partial C}{\partial x} - \bar{v}_y \frac{\partial C}{\partial y} - \bar{v}_z \frac{\partial C}{\partial z} = R \frac{\partial C}{\partial t} \qquad (1)$$

<u>Παραδείγματα ειδικών περιπτώσεων</u>

☞ **Μονοδιάστατη ροή (x), μονοδιάστατη μεταφορά (x)** (παράδειγμα;)

$$D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \bar{v}_x \frac{\partial C}{\partial x} = R \frac{\partial C}{\partial t} \qquad (2)$$

☞ **Μονοδιάστατη ροή (x), διδιάστατη μεταφορά (x, y)** (παράδειγμα;)

$$D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - \bar{v}_x \frac{\partial C}{\partial x} = R \frac{\partial C}{\partial t} \qquad (3)$$

D_x, D_y = συντελεστές διάχυσης /διασποράς (υδροδυναμικής διασποράς)

$D_x = \alpha_L \bar{v}_x + D_e$, $\qquad D_y = \alpha_T \bar{v}_x + D_e$

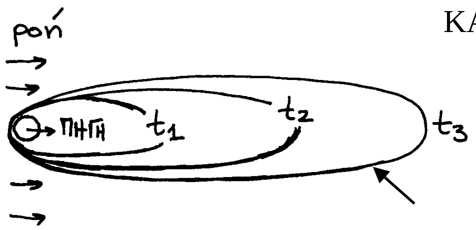
α_L = συντελεστής διαμήκους μηχανικής διασποράς

α_T = συντελεστής εγκάρσιας μηχανικής διασποράς

$\alpha_T < \alpha_L$, $\quad \alpha_T = \left(\frac{1}{20} \,\varepsilon\omega\varsigma\, \frac{1}{5} \right) \times \alpha_L$ (από εργαστηριακά πειράματα σε άμμους)

α_L εξαρτάται από την κλίμακα ($\alpha_L = 0.1x$)

ΚΑΤΟΨΗ



εξάπλωση ρύπου με το χρόνο

☞ **Μονοδιάστατη μεταφορά-ροή & υποβάθμιση* πρώτης τάξης**

$$D_x^* \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \bar{v}_x^* \frac{\partial C}{\partial x} - \lambda C = \frac{\partial C}{\partial t} \qquad (4), \qquad D_x^* = \frac{D_x}{R}, \qquad \bar{v}_x^* = \frac{\bar{v}_x}{R}$$

*Σημειώσεις:

• Υποθέτω υποβάθμιση (μείωση μάζας λόγω αντιδράσεων) πρώτης τάξης, δηλ.

$$\frac{dC}{dt} = -\lambda C \rightarrow \int_{C_0}^{C} \frac{dC}{C} = -\lambda \int_{t=0}^{t} dt \rightarrow \ln \frac{C}{C_0} = -\lambda t$$

• $\lambda = ln2/T = 0.693/T$, T = χρόνος ημιζωής (χρόνος που απαιτείται για να μειωθεί η συγκέντρωση από C σε $C/2$).

• Υποθέτω υποβάθμιση και του διαλυμένου ρύπου αλλά και του ροφημένου ρύπου και μάλιστα με τον ίδιο ρυθμό αποδόμησης, δηλαδή $\lambda_w = \lambda_s = \lambda$.

• Γραφικά, ποια διαφορά περιμένω σε σχέση με τη λύση χωρίς υποβάθμιση;

☞ **Μονοδιάστατη ροή (x), μονοδιάστατη μεταφορά (x) - συνθήκες μόνιμης μεταφοράς** (παράδειγμα: μεταφορά σε αργιλικό στρώμα πυθμένα ΧΥΤΑ με σταθερές συγκεντρώσεις στα ανάντη, ίση με τη συγκέντρωση στο στράγγισμα, και στα κατάντη, ίση με μηδέν αν υποθέσω γρήγορη απομάκρυνση ρύπου από την κατάντη παρειά του αργιλικού στρώματος)

$$D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \bar{v}_x \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \qquad (5)$$

☞ **Μονοδιάστατη ροή (x), διδιάστατη μεταφορά (y: λόγω υδροδυναμικής διασποράς, x: λόγω μεταγωγής) - συνθήκες μόνιμης μεταφοράς** (παράδειγμα: βλέπε πιο κάτω)

$$D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - \bar{v}_x \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \qquad (6)$$

Αναλυτικές λύσεις εξισώσεων μεταφοράς

☞ Εξίσωση (1), για μονοδιάστατη ροή και τριδιάστατη μεταφορά, δηλ.

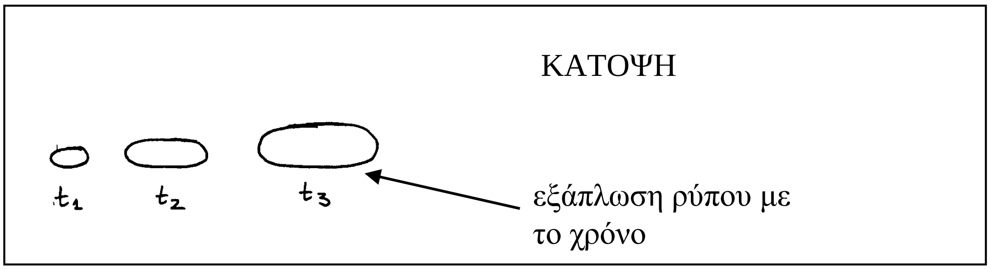
$$D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - \bar{v}_x \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial C}{\partial t} \qquad (7)$$

☞ **Λύση της Εξίσωσης (7)**, για σημειακή πηγή ($x = y = z = 0$) που εκλύει τη χρονική στιγμή t=0* μάζα ρύπου M (= $V_o C_o$), όπου n = πορώδες.

$$\boxed{C(x,y,z,t) = \frac{M}{8n(\pi t)^{3/2}\sqrt{D_x D_y D_z}} \exp\left(-\frac{X^2}{4D_x t} - \frac{Y^2}{4D_y t} - \frac{Z^2}{4D_z t} \right)}$$

για $X = x - \bar{v}_x t$, $\quad Y = y$, $\quad Z = z$

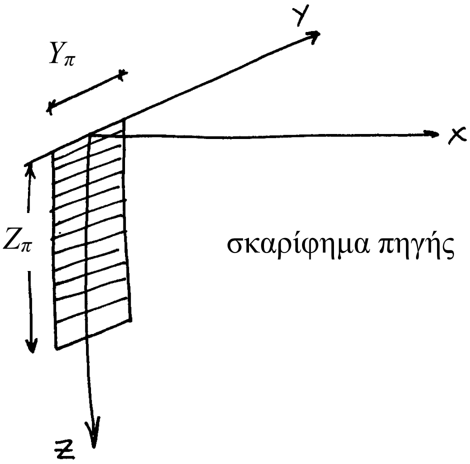
όπου $D_x = \alpha_L \bar{v}_x + D_e$, $\qquad D_y = D_z = \alpha_T \bar{v}_x + D_e$



* Για να ισχύει αυτή η προϋπόθεση, φτάνει η διάρκεια διαρροής του ρύπου να είναι μικρή σε σχέση με το χρονικό διάστημα στο οποίο μελετάμε το φαινόμενο της μεταφοράς του ρύπου.

☞ **Λύση της Εξίσωσης (7)**, για πηγή πεπερασμένων διαστάσεων, Z_π και Y_π, στο x = 0 και με σταθερή συγκέντρωση C_o.

$$D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - \bar{v}_x \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial C}{\partial t} \qquad (7)$$

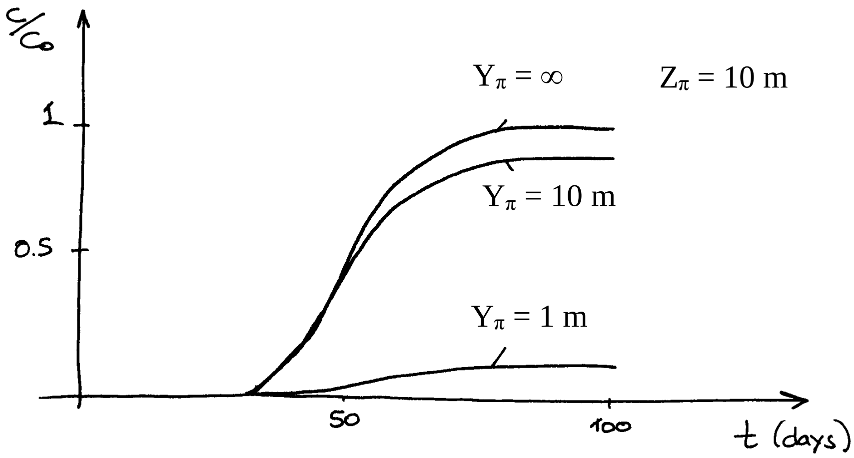


Η λύση της τριδιάστατης εξίσωσης βρίσκεται ως γινόμενο τριών μονοδιάστατων λύσεων:

$$\boxed{C(x,y,z,t) = \frac{C_o}{8}\cdot erfc\left[\frac{x-\bar{v}t}{2\sqrt{D_x t}}\right]\left\{erf\left(\frac{y+{Y_\pi}/{2}}{2\sqrt{D_y t}}\right) - erf\left(\frac{y-{Y_\pi}/{2}}{2\sqrt{D_y t}}\right)\right\}\left\{erf\left(\frac{z+Z_\pi}{2\sqrt{D_z t}}\right) - erf\left(\frac{z-Z_\pi}{2\sqrt{D_z t}}\right)\right\}}$$

όπου $D_x = \alpha_L \bar{v}_x$, $\qquad D_y = D_z = \alpha_T \bar{v}_x$

• Σύγκριση συγκεντρώσεων στη θέση x=50m, y=z=0m για διαφορετικά πλάτη πηγών Y_π, για Z_π = 10m



$$D_x^* \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \bar{v}_x^* \frac{\partial C}{\partial x} - \lambda C = \frac{\partial C}{\partial t} \qquad (4), \qquad D_x^* = \frac{D_x}{R}, \qquad \bar{v}_x^* = \frac{\bar{v}_x}{R}$$

☞ **Λύση της Εξίσωσης (4)**, για αρχικά καθαρό έδαφος, για σταθερής έντασης πηγή, για καθαρό έδαφος σε άπειρη απόσταση

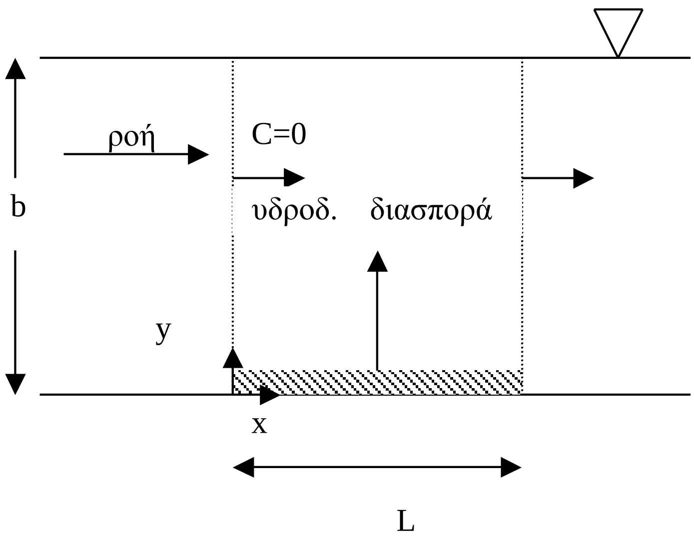
$$\boxed{C = \frac{C_o}{2} \exp\left(\frac{\bar{v}x}{2D_x}\right)\left[e^{-x\beta} erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{D_x^* t}} - \sqrt{\left(\frac{\bar{v}^{*2}}{4D_x^{\;*}} + \lambda\right)t}\right) + e^{x\beta} erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{D_x^* t}} + \sqrt{\left(\frac{\bar{v}^{*2}}{4D_x^{\;*}} + \lambda\right)t}\right)\right]}$$

όπου $\beta = \frac{1}{2D_x^*}\sqrt{\bar{v}^{*2} + 4\lambda D_x^*}$

(ελέγξτε τι δίνει η λύση για λ=0)

$$D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - \bar{v}_x \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \qquad (6)$$

☞ **Λύση της Εξίσωσης (6)** για σταθερή πηγή *C(x,y=0)* = *S* (μπορούμε να φανταστούμε την πηγή σαν μια κηλίδα μη υδατικού ρύπου, όπου *S* είναι η διαλυτότητα του ρύπου) μήκους *L* και για καθαρό υδροφορέα στα ανάντη της πηγής και σε άπειρη απόσταση



Βρίσκεται λύση *C(L,y)*, δηλ. για το σημείο *x* = *L*, που όταν ολοκληρώνεται σε όλο το βάθος του υδροφορέα *b* δίνει (θα δούμε εφαρμογή αυτής της λύσης στην επόμενη ενότητα – Τεχνολογίες Αποκατάστασης):

$$\boxed{\frac{\overline{C}(L,b)}{S} = \frac{1-e^{-w^2}}{w\sqrt{\pi}} + erfc(w), \qquad w = \frac{b}{2\sqrt{D_y L / \bar{v}_x}}, \qquad D_y = D_e + \alpha_T \bar{v}_x}$$